Ambrosius barbosa
Doctor
1577 años

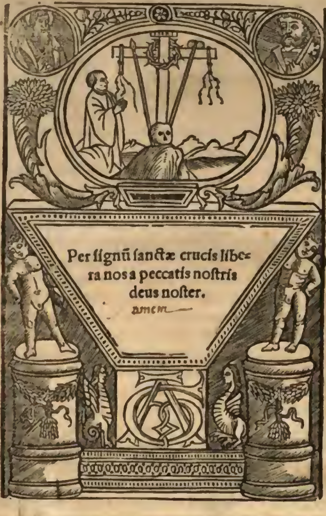
dominu

dominus

domi

me Lo

Cursus quattuor mathematicarum artiũ liberaliũ quas recollegit atq; correxit magister Petrus Ciruelus Darocensis theologus simul & philosophus.



del M° chaves

Aiio de 1705

Petrus Ciruelus Darocensis philosophus pariter & theologus: Rectori & scholasticis oībus alme vniuersitatis cōplutensis: que studio sapientiæ dicata est: salutē & liberalibus doctrinis vigilanter intendere.

Magnus ille Aurelius augustinus & christianorum philosophorum vehementissimus: dignissime Rector disertissimi præceptores ac vigilantissimi scholarū circuitores: in eo suo opere quod de institutione nouitiorum theologorum doctrinā christianam inscripsit: enumeratis omnibus fere artibus & scientiis gentiliū philosophorū sub tippo auri argēti ac præciosæ vestis & omnino thesauri egiptiorum: eas postea diuisione bimēbri sic comprehendere curauit. Duo inquit sunt genera doctrinarum quæ in gentibus etiam moribus exercentur. vnum rerum earum quas instituerunt homines: alterum earum quas animaduerterunt iā per actas aut diuinitus institutas. ac si dixisset quædā sunt scientiæ de signis: aliæ de reb9. Signa homines instituerunt: res deus creauit. primas earū prosequens subdit. Illud quod est secundū institutiones hominū: partim superstiriosum est: partim nō superstitiosum. Et vanitates superstitiosas latissime persequēs dicit eas eē inuentiones diabolicas in quibus sunt pacta quædam hominū cū demoniis. Non superstitiosa vero hominū instituta vocat pacta hominū cū hominibus inita. quæ ideo valent inter eos: ꝙ sic placuit eis vt valerēt. Quorū insuper partī superflua & luxuriosa dicit: partī vtilia & necessaria. Superflua sunt inquit q̄ saltādo faciunt histriones: & q̄ in theatris fiunt in cōspectu totius populi comediæ: tragediæ: eglogæ: fabulæ. Cōmoda siue vtilia ac necessaria hominū instituta ea signa sunt: quæcunq̄ in habitu & cultu corporis ad sexus vel honores discernendos placuerūt: & q̄ in pōderibus atq̄ mensuris & nūmorū ipressionibus & alia id genus (sine quib9 humana societas aut nō oīno aut minus cōmode geritur) instituerūt hoīes. maxime litteraria disciplina linguarūq̄ peritia quātū satis est. Ad scientias de rebus veniens ait: illa vero quæ nō instituēdo: sed aut transacta tēporibus aut diuinitus instituta inuestigādo prodiderūt hoīes: discramus. quorū alia sunt ad sensus corporis: alia vero ad rationē animi pertinētia. per hoc duplices rerum scientias denotās. i. de rebus sensibilib9 & de imaginabilibus aut intelligibilibus. Sed illa inquit q̄ sensu corporis attingūtur: vel narrata credimus vel demōstrata sentimus vel experta coniicimus. Ad primū pertinet historia: ad secūdū cosmographia: ad tertiū naturalis scientia moralis prudētia & ars factiua vt agricultura & militaris. Restāt ergo ea q̄ nō ad corporis sensus sed ad rationē animi pertinēt: vt disciplina disputationis & ratio numeri: harū altera est sermocinalis dialectica & rethorica: altera mathematica: siue numeri per seipos cōsiderētur: siue ad figurarū: aut sonorū: aliarūve motionū leges adhibeātur: quia vbiq̄ incōmutabiles regulas habēt. Quibus sic diuisis tandē septē artes liberales & vtrāq̄ philosophiam theologorum studio cōmendans (in qua facultate hæc nostra achademia cæteris hispanis iure prefertur) concludit ad hæc verba in fine secundi libri eiusdem operis. Quamobrem inquit videtur mihi studiosis & ingeniosis adolescentibus salubriter præcipi: vt nullas doctrinas quæ preter ecclesiam christi exercentur: secure sequi audeant: sed eas sobrie diligenterq̄ diiudicent. Et si quas inuenerint ab hominibus institutas varias propter diuersam volun-

In .2. lib. de doc. chri.

Duplices sciētie.

Sciētie de signis.

Scie de reb9

q̄ sciētie sint theologis discende.

tatem instituentium: & ignotas propter suspitiones errantiũ: maxime si etiam habeant cũ demonibus initam societatẽ. repudient penitus & detestentur. Alienent etiam studium a superfluis & luxoriosis hominũ institutis. Illa uero instituta hominũ quæ ad societatẽ conuiuentium ualent: pro ipsa huius vitæ necessitate non nec intelligãt. In cæteris aũt doctrinis quæ apud gentes inueniuntur: præter historiã rerũ vel præteriti temporis vel præsentis ad sensus corporis pertinentiũ: quibus etiã vtiliũ artiũ corporalium experimenta & coniecturæ annumerãtur: & præter rationẽ disputationis & numeri: nihil vtile esse arbitror. In quibus tñ omnibus hoc tenendum est ne quid nimis: & maxime in his quæ ad corporis sensus pertinentia voluũtur temporibus & cõtinentur locis. Sed quorsum tã multa ex verbis diuini augustini? Nẽpe vt ex illis duo eliceremus ad propositũ nostrũ valde necessaria documenta. Primũ vt sciremus quas scientiarum species fidelibus scholasticis liceret adiscere: quasve sicut illicitas & nociuas declinare: Alterũ est nosse quẽ modũ in licitis & honestis disciplinis deberent obseruare: quia enĩ gentiles philosophi vt plurimũ in suis editionib9 fuerũt valde prolixi & obscuri: in quorum libris perlegendis magnam fideles paterentur boni temporis iacturam: censuit præeligendas esse in singulis disciplinis extraneis breues quasdam sũmas: quæ magis necessaria doctrinarum compendiosa methodo complecterẽtur. vnde consequenter subdit. Sicut autem quidam de verbis omnibus & nominib9 hebræis: siris: & ægiptiis: vel si qua alia lingua in scripturis sanctis ĩueniri potest: quæ in eis sine interpretatione sunt posita: fecerunt vt ea separatim interpretarentur: & quod Eusebius fecit de temporuꝫ historia propter diuinorum librorum quæstiones: q̃ vsuꝫ eius efflagitant: qđ ergo hi fecerũt de his rebus: vt nõ sit necesse christiano philosopho in multis propter pauca laborare: sic video posse fieri in aliis: si quem eorum qui ad hoc valent benignam sane operam fraternæ vtilitati delectet impendere: vt quoscũq; terrarum locos quæ ve animalia vel herbas atq; arbores siue lapides vel metalla incognita speciesq; quaslibet quas scriptura cõmemorat: ea generatim diggerẽs sola exposita litteris mandet: potest etiam & de numeris fieri vt eorum exposita ratio conscribatur quos diuina scriptura meminit. Quod vtrum de ratione disputandi fieri possit. ignoro: & uidetur mihi nõ oportere: per totum enĩ textũ scripturarum colligata est neruorum vice: ideo magis ad ambigua soluenda et explicanda legentes adiuuant: quam ad incognita scripturarum signa cognoscenda: quorum aliqua aut forte omnia iam facta sunt: sicut multa quæ a bonis doctisq; christianis elaborata atq; cõscripta non arbitrabamur inuenimus: sed siue propter turbas negligentium siue propter inuidiorum occultationes latent. hæc ille. Optimum certe laboris releuamen ac saluberrimum cõsilium in hoc datum est theologis: ũ fideles christi in talibus gentilium doctrinis docti: breues ex singulis earum summas excerpserint: in quibus superfluis omnibus amputatis reiectisq;: purissimi scientiarum fructus auidissime a seruis dei captantur. Hoc itaq; munus gratiæ hac nostra ætate cum in aliis christianorum vniuersitatibus: tum vel maxime in præclarissima hac complutensi achademia: duce viro vtiq; religiosissimo pariter & sapientissimo domino eius fundatore: nobis est diuinitus concessum: quando iam non modo latinorum vocabulorum quantumcunq; abditissimorum annotationes: sed etiam hebraicorum & græcorum omnium interpretationes latine in propatulo sunt omnibus vel mediocriter in litteris eruditis: imo & multiplices singularum scientiarum introductiones nouitiis earum tirunculis passim & indies traduntur: quæ acquirendis scientiis cognoscuntur vtilissime. Nam eis tenera puerorum ingenia quasi lacteo quodam prælibamento ad solidiorem eas

Breues sũme in scientiis sunt e dende.

Laudãtur introductiões pluribꝰ ciꝰ mattibus.

rum cibum disponuntur: eorumq; mens quasi facili quodam præmisso viatico ad nitidiores auctoru3 disciplinas præparatur. Nam introductoriæ artes simillime semitis esse peribentur: quæ sine viarum erroribus ocissime perducunt ad terminum: & quasi naviculæ paratissime altum tentantibus equor: quibus sine scopulis cecæ ignorantiæ securus attingintur scientiarum portus. Nempe in eis plurimum artis & doctrinæ cum multa facilitate breuitateq; continetur. quando quidem diffinitiones diuisiones & regulæ: quibus potissimum introductiones texuntur: se statim intellectui manifestas offerunt. Et animus hominis ab ignorantiæ morbo: eq; atq; corpus a febre primum facillimis sirupis digerētibus: deinde rigorosiore farmaco purgari habet: Et anima rationalis adeo creata velut tabula mundissima primum rudi effigie linearum est figuranda: postea vero coloribus appositis est in dei imaginem pingenda ac poliēda. Sic in tradendis disciplinis: audientium animos prius rudi minerua nouimus esse præparandos, demum vero exactiore doctrina diligenter excolendos. Ego itaq; omnium hic recte philosophantium infimus cogitaui vt vel modulo meo tam præclare vniuersitati quoquo modo deseruirem: si in doctrinas mathematicas (quas omnes rationes numerorum vocauit beatus Augustinus & theologis necessarias prædicauit) breues introductiones: tum ab aliis tum & a me editas in vnum corpus recolligerem emendatissimas, quinq; videlicet numero: paraphrases duas de quantitate discreta in opera diui seuerini Boetii: quarum altera in arithmeticam: alteram in musicam eius introducit. Breuia quoq; duo compendia de quantitate continua quasi prægustamenta duarum aliarum scientiarum. Alterum geometriæ Euclidis. & alterum perspectiuæ Alacen. quinta quoq; erit introductio astrologica: quam in sphericum opusculum olim condideram correspondentem almagesto Claudii ptholomei clarissimi: et Almanach perpetuum Zacuti Salmāticensis cū nr̄o iudiciario quadriptito ac cētilegio Accipite ergo læto animo hanc tantæ vtilitatis editionem: quæ ad vtriusq; philosophiæ plenam intelligentiam erit munimentum q̄p iucundissimum.

Valete fœliciter.

Petri Ciruelli Darocēsis previa in arithmeticam quæstiuncula de vera numerorum natura.

PRoclara intelligentia omnium eorum quæ in arithmetica dicturi sumus: hæc in primis elucidēda est quæstio. Quæ nā res sint numeri de quibus hæc nostra arithmetica disputat: hoc est vtrū sint res in anima numerātis: aut res extra hominē existentes q̄s quidam vocant numeros formales: alii numerata materialia? Ad hoc dubiū sine argumentis (quoniam alias latius videri habet) dicimus tres esse opiniones de numeris arithmeticis. Prima est opinio realium distinguentiū inter

Reales.

vnum quod est transcendens: & vnum quod est principium numeri: per hoc q̄ vnū transcendens nihil aliud significat q̄ rei essentiam per quā vnaquæq̄ res seipsa ē vna vt aiunt metaphisice loquendo. vnde & opposita multitudo aut numerositas non differt ab essentiis rerum a seipsis diuisarū. Sed vnum quod est principiū numeri & limitatum: pertinens ad prædicamentū quantitatis licet reductiue: significat aliquod accidens superadditū essentiæ rei quæ est vna: & formaliter denominatur talis ab illo accidente. quia vt aiunt quantitas est vnū de prædicamentis accidentium. ergo ipsius generalissimū & quelibet species eius directa vel reductiua debet significare aliquod accidens superadditum essentiæ rei quam significat: & p consequens opposita multitudo aut numerus est accidens a quo formaliter res numerare denominātur. Sz inter istos sic oppinantes est aliquantula diuersitas. Nam eorū aliqui dicunt q̄ numerus prædicamentalis est aggregatio vel collectio talium accidentiū quæ sunt vnitates: eo modo quo dicimus de aceruo lapidum vel de exercitu qui non est aliqua vna res sz aggregatio plurium. Alii vero dicunt q̄ quilibet numerus est vna simplex forma resultans ex aggregatione talium vnitatū. quia videtur eis q̄ omnis species cuiuslibet prædicamenti debet esse vna simplex essentia: Ergo secundū istā opinionem totā cū numeramus diuinas personas vel attributa essentialia aut personalia: vtimur numeris transcendentalibus nō predicamentalibus: quia in deo nullum est accidens. sed cū numeramus creaturas vtrisq̄ numeris vti possumus. licet in angelis hoc non concedant aliqui eorum putantes q̄ istæ vnitates numerales sint accidentia corporalia causata ex diuisione continui. Et cum arithmetica sit scientia particularis: non vniuersalis vt metaphisica quæ est de transcendentibus: consequenter dicunt q̄ ipsa non speculatur de omnibus numeris: sed de solis prædicamentalibus qui sunt accidentia. vnde propterea dicta est scientia de quantitate discreta. & sic non se intromittit de numeris angelorum neq̄ de numeris rerum diuinarum. Alia est opinio nominalium prædicte totaliter opposita quæ negat illam distinctionem de vnitate aut multitudine trāscendente & delimitata. Imo dicit q̄ omnis vnitas est rei essentia & q̄ omnis multitudo est plures essentiæ rerum: & q̄ vnitas & vnū sunt vocabula sinonima. similiter multitudo & multa: quia ut aiunt numerus nihil aliud est q̄ res numeratæ. & vice uersa q̄libet res numeratæ sunt numerus. Verūtamen concedit ista opinio q̄ aliquis numerus est substantia vel substantiæ. & aliquis alius est accidens vel accidētia. Nā rerū q̄ numerantur hæ substantiæ sunt: illa vero accidentia. Similiter dicūt q̄ aliquæ vnitates sūt substantiæ: & aliæ sunt accidentia. Concedit ergo ista opinio q̄ eisdem numerorū speciebus utimur cum numeramus res diuinas & res angelicas & reliquas omnes creatu

Thomiste

Scotiste

Nominales

ras. vnde & arithmeticā de omnibus numeris vniuersaliter sciētiam esse determināt. Tertia est opinio mediocris quorūdā recentiorum qui licet in vocabulis concedant distinctionē inter vnum trāscendens & limitatū: quia hoc vniuocum est: illud vero equiuocum: tñ in rebus significatis per illa vocabula tenent oīno cū secunda opinione: nō distinguentes numeros ab essentiis reruʒ numeratarū. sed hæc tertia cū neutra prædictarum opinionū cōcedit arithmeticā esse scientiā de rebus numeratis siue illæ substātiæ sint siue accidentia. Naʒ vt aiunt numeri de quibus pertractat arithmetica: sunt in anima hominis numerantis res quædā diuinæ & spirituales abstractæ a tēpore & motu atqʒ omni phisica qualitate & transmutatione corporali. Verūtamen ista opinio bipartita est: & quibusdā eorū dicentibus q numeri illi mentales sunt quædā notitiæ vel conceptus rerū collectiui quibus intellect⁹ plures res simul cōcipit vna notitia: & q tales conceptus sunt veræ species prædicamenti quātitatis eo modo quo philosophi cōmuniter dicunt de notitia qua quis concipit exercitū aut populū vel aceruū lapidum: alii tñ sapientiores reputati apud cōmune vulgus dixerunt q numeri mentales nō sūt noticiæ aut conceptus prædicti: sed quædā aliæ res diuiniores in anima existentes. qđ sic explicant. dicentes q veri numeri quibus anima res exteriores numerat: sunt mensuræ quædam discretiue rerū exterius numeratarū: mensuræ dico eterogeneæ a quibus res appellantur extrinseca denominatione numeratæ. Vnde sicut vlna est mensura panni cōtinui qua homo mensurat pannū applicando eam panno: in qua mensuratione homo ipē dicitur mensurans principaliter: vlna vero instrumentaliter: quia hō non est mensura sed vlna: ita etiā numerus quilibet formalis in anima est mensura numerans extrinsece res quibus applicatur: anima vero ipsa est numerans principale: quia applicat illaʒ mensurā rebus numeratis vtens numero tanqʒ instrumento. vnde res exteriores denominantur numeratæ a numero animæ ipsis applicato. vt duæ res a binario animæ: & tres a ternario. & sic de aliis: sicut pannus denominatur mensuratus ab vlna sibi applicata exterius ab homine mensurante. Et sicut eadē vlna pōt pluribus pānis applicari quorū quilibet erit ab ea mensuratus: ita idē numerus animæ pōt diuersis rebus numerandis applicari: vt denarius decē hominib⁹ & decē equis. Et sicut si nō fuerit vlna applicata panno nō dicetur ipē mensuratus quāuis equā cōtineat atqʒ cū mensuratur quantitatē: ita si numerus animæ nō fuerit applicatus rebus numeratis non dicentur duæ neqʒ tres: neqʒ alio quoquā numero numeratæ: quāuis eandē atqʒ cū numerantur habeāt multitudinē. Hæc itaqʒ nomina abstracta binarius: ternarius: quaternarius: ipsum animæ numerū significant: sed eorū cōcreta denominatiua: duo: tria: quattuor: pro rebus numeratis accipiuntur. animæ tñ numerū cognotando. Addūt isti quod mirabilius est numeros ipsos virtutes quasdā naturales habere: & proprietates inseparabiles quibus agant in res exteriores perfectius q̄ qualitates actiuæ elementorū. Et qui tales numerorū proprietates agnoscūt: possunt applicatione illorū numerorū ad res naturales facere mirabiles effectus. quod dicunt ad magiā naturalem pertinere. Confirmant hanc suā opinionem auctoritate eius qui psalmos Dauidicos non eo ordine quo editi fuerant in vnū volumen recollegit: sed variato ordine iuxta numerorū & psalmorū concordantes proprietates. Itaqʒ ille psalmus: Beat⁹ vir qui non abiit &c. licet non fuerit primo editus a dauide: tamen est primo positus in psalterio: quia habet proprietatem persimilē vnitati. Et tertius psalmus concordat ternario numero: & quinquagesim⁹ quinquagenario: & centesimus centenario. Sed de his imaginationib⁹ alias operosius. Nunc autem tota hæc tertia opinio dicit arithmeticam nostrā esse de numeris illis mentalibus siue notitiis siue mensuris rerū existentibus: quia vt aiunt contra secundā opinionem arithmetica ponens vnitatē īpartibilem non posset esset vera in vnitate quæ est lapis vel albedo. Simile argumentum

Neoterici.

Jacobus faber

Johannes picus.

Uirtutes numerorū.

formaretur de numeri imparis īdimidiabilitate. Et forte hæc argumēta etiā procedere putant contra primam opinione; ponentem vnitates naturales eſſe accidentia corporalia ad diuiſionem ſubiecti diuiſibilia. Nos vero alias hanc diſputationem examinandam relinquentes: nunc dicimus ſiue alicuius doctoris præiudicio (quia eos omnes pro certo & veneramur & admiramur) arithmeticam noſtram eque bene eſſe intelligibilem cuilibet prædictarum opinionum. Nam ſecundum vnamquamq; earum vere ſaluari poſſunt arithmeticæ diffinitiones diuiſiones principia & concluſiones. Siue enim vnitas ſit res ſpiritualis ſiue corporalis: ſiue ſubſtantia ſiue accidens: ratione indiuiſibili ſiue indiuiſibilitatē cognotante explicatur & ſignificatur ab arithmetico: ita vt negatio importata in ratione vnitatis non refferatur ad rem ſignificatam: ſed ad modum ſignificandi vocabuli ſignificantis. eodem modo diceretur de quolibet alio arithmetico principio aut principiato. Hic noſter modus ſicut eſt valde facilis & liberaliſſimus: ſic oībus p̄dictis opinionib⁹ erit cōmunis & cōueniētiſſimus.

Cōcordia oim.

Petri Ciruelli Darocenſis. Paraphraſis in arithmeticam ſpeculatiuam diui Seuerini Boetii: clari⁹ & certius edita quam olim a thoma Brauardino: Cui tale premittitur exordium.

Ex omnibus ſcientiis antiqui ſapientes ſeptem ſpecialiter diſcreuerunt in ſtudis ſuis ad opus erudiendorum: Hugo de ſancto victore auctor eſt in ſuo didaſcalion: qui eſt de origine artium & ſcientiarum: in quibus tantam vtilitatem eſſe pre cæteris omnibus perſpexerunt: vt quiſquis harū diſciplinam firmiter percepiſſet: ad aliarum notitiam poſtea inquirendo magis & exercendo quam audiendo perueniret. Sunt enim quaſi optima quædam inſtrumenta quib⁹ via paratur animo ad plenam philoſophiæ intelligentiam. Hinc triuium & quadriuium nomina acceperunt: eoq; his quaſi quibuſdam viis animus viuax ad ſecreta ſapientiæ introeat. Nemo etiam tunc temporis magiſtri nomine dignus videbatur: qui nō has ſeptem ſcientias profiteri poſſet. Pictagoras quoq; hāc in ſcholis ſuis conſuetudinem ſeruaſſe legitur: vt vſq; ad ſeptennium (ſecundum numerum ſcilicet ſeptem artium liberalium) nullus diſcipulorum ſuorum de his quæ ab ipſo dicebātur rationem expeteret: ſed fidem daret verbis magiſtri: quouſq; omnia audiuiſſet. Has itaq; ſeptem diſciplinas illa ætate tanto ſtudio quidam didiciſſe leguntur: vt plenæ omnes eas in memoria tenerent: adeo vt ad quaſcunq; quæſtiones ſibi propoſitas: ex harum regulis rationes inuenientes vt diffinirent omne id de quo ambigeretur: non reuoluendo folia librorum: ſed corde tenus ſtatim haberent reſpōſiones paratas. Quare & nos antiquorum exempla inſequentes: ſcholaſticis noſtri temporis (in quo iterum omnes bonæ doctrinæ reſipiſcunt atq; reflorent) de hiſce liberalibus diſciplinis compendioſam editionem ſecundum menſuram gratiæ nobis diuinitus conceſſæ tradere voluimus. ab arithmetica exordiū facientes quā in duos libros diuidemus.

Septē artium liberalium commendatio.

Liber primus introductionis arithmeticæ de numeris & proprietatibus numeralibus: habet duos tractatus. Primus agit de numero & ſpeciebus eius ac proprietatib⁹ numerorum. habet capita ſex.

Caput primū de mathematicis doctrinis cōmuniter.

Appositis igitur sermotionalibus disciplinis: quas tradiderunt copiosissime viri excellentes ingenio in hac nostra eruditissima et patria et etate: nouellis philosophie tirũculis mathematicas doctrinas tradere volẽtes modo dumtaxat introductorio atq; intranscursu velut exploratores (vt & ipsi ad maiores nitidioresq; sapientũ facultates quasi peregrini & transeuntes necessario & facili quodã sumpto viatico properent) sola ea que ad p̃cognitiones demõstrationũ pertinent: declarabimus. hoc est vocabulorum diffinitiones. diuisiones ab auctoribus acceptas atq; approbatas: & singulorum generum ac specierum proprietates exemplariter solum declaratas dimissis alias demõstrationibus tradere itendimus: maxime in arithmetica & astrologia. Nam in aliis tribus mathematicis nonnullas conclusiones aliquantisper demõstrabimus. Mathematice itaq; discipline quo pacto q̃ ne ratione distinguantur a phisica & methaphisica sibi condiuisis in sexto methaphisicorum aristotelis: quo etiã modo mathematice alie ab aliis discernantur: in primis doceamus: vt earum diffinitiones proprias & speciales hinc elicere valeamus. Distinxit aristoteles tria scientiarum speculatiuarum genera: mathematicum: phisicũ: & methaphisicum: per hoc vel maxime q; mathematice scientie solas eas rerum naturalium proprietates que ad diuisibilitatem partium attinent speculantur. Phisica vero earumdem rerum naturalium motus alterationes & quascunq; transmutatiões theorice inquirit. Methaphisica autem transcendentibus quibusdam rationibus non modo rerum corporalium verum etiam & supernaturalium entium quiditates naturas gradusq; perfectionis absolutissime peruestigat. Hinc ergo sapientes antiqui mathematicas scientias recte diffinierũt: esse doctrinas de quantitate: que partium diuisibilitatem consignificat: vt aristoteles expresse docet in cathegoriis. quod eorum dictũ non sic est accipiendum meo iuditio: vt quantitas sit alicuius scientie subiectum atributionis (ne omnes mathematicas vnam scientiã faciamus sub vna ue comprehendemus) sed quia cuiuslibet scientie mathematice subiectum atributionis sub quantitate continetur vt species vel sicut pars in modo in diuisione accidentali. Sed iuxta duo genera subalterna quantitatis discretum & continuum: mathematice scientie bifariã distiguntur. Nã de quãtitate discreta seu multitudine aut numero disputat arithmetica cũ sibi adiuncta musica: de quãtitate vero cõtinua vel magnitudine agit geometria cum sibi annexis perspectiua & astrologia. Principalium autem mathematicarum & ãnexarũ hic sumi potest differentia: q; ille rationibus abstractis a cõsignificatione motus materie determinate & qualitatũ sensibiliũ de reb9 totius mũdi subtilissime disputãt. he vero rationibus cõcretis motũ materiã & qualitates sẽsibiles denotãtibus de eisdẽ rebus naturalibus ptractãt. Hãc differentiã egregie notauit aristoteles in secũdo suorũ phisicorũ libro dicẽs: q; mathematic9 de phisica linea intendit sed nõ in quãtũ est phisica: quia silicet nõ sub ratiõe phisica q̃ est cõcreta: sed sub ratione matematica abstracta a talib9 cognotatiõib9. & i sexto methaphisicorũ ad idẽ p̃positũ dicit q; differt sicut curuũ & simũ: que duo noĩa rem eandẽ sed diuersis ratiõib9 significãt. Ex hac aũt differentia sequitur alia inter easdẽ scientias: q; pricipales sũt pure mathematice: accessorie vero sũt partĩ phisice et ptim mathematice: qa rationes & vocabula pricipaliũ mathematicarũ sũt penitus abstracta nõ tñ absoluta (cũ sint de p̃dicamẽtis quãtitatis & qualitatis) rationes vero & noĩa min9 pricipaliũ mathematicarũ sunt concreta & super rationes principalium mathematicarum addunt phisicas cognotationes: eo modo quo logici dicũt partẽ in modo cognotare supra suũ totũ. qualia sunt: hõ & hõ albus: similiter curuũ & simũ. Ex dictis ergo possũt duo elici notatu

Mathematice scientie ab aliis distinguntur.

Mathematice scientie diffinitio

Mathematice in species distribuuntur.

dignissima. Primū est q in mathematicis scientiis ideo vna earū dicitur alii subalternata: quia subiectum attributionis eius cōtinetur sub alterius subiecto sicut pars ī modo: & consimiliter cætera vocabula illius sub aliis scientiæ superioris vocabulis: nō autem ex eo q scientia superior possit demonstratiue probare principia scientiæ inferioris: neq e diuerso scientia inferior possit aliquid demonstrare ex principiis superioris scientiæ. nam cuiuslibet scientiæ principia sunt immediata & indemonstrabilia. demonstrato etiam fit ex propriis non ex extraneis principiis. Secundū est q omnes termini principalium mathematicarum habent simplicem & vnicū modum cognotandi secundum rationem vnius tantum prædicamēti aristotelici: termini vero mathematicarum subalternatarum omnes sunt mixtæ cognotationis ex rationibus duorū aut plurium prædicamentorum. vnde nullus eorum potest ad aliquod aristotelicum prædicamentum pertinere: qui non posuit prædicamenta mixte cognotatōis. Sed de his alias operosius. Nunc autem satis sit ex prædictis singularum mathematicarum scientiarum diffinitiones colligere quæ sequuntur. Arithmetica est scientia numerorum & suarum proprietatum consideratiua per rationes abstractas. vnde & de multitudine per se considerata scientia vocata est a Boetio. Dicitur autem arithmetica a rithmis. i. a numeris de quibus considerat. Geometria est scientia magnitudinum proportionum & figurarum aliarumq proprietatum suarum contemplatiua. hanc de magnitudine immobili scientiam esse dixit idem Boetius: quia per rationes abstractas a motu rerum magnitudines inquirit. Dicitur autem geometria a metris. i. mensuris rerū de quibus considerat. Musica est scientia de vocibus & sonis eorumq armonia & concentu ac cæteris proprietatibus speculatiua; quā de multitudine ad aliud relata inseruit Boetius: quia rationes numerales concretas habet ad sonos & voces. Dicitur autē musica: non vt aiunt quidam a mos quod est aqua quia. s. sine humore illo qui est saliua cantus & armonia perfici non potest: sed potius a musis quæ canebant: quasi musarum scientia. Perspectiua est scientia lucis & coloris per radios visuales (quæ dicūtur species visum immutantes seu ad oculū venientes) scdm rationes geometricas inquisitiua. Hæc a perspiciendo dicta: ab aliis speculatiua nominatur ab speculis de quibus pertractat. Astrologia est scientia de cœlis & stellis eorūq motibus & effectibus theoriam faciens. quæ & ab astris dicta: ab aliis astronomia appellatur: quia est de norma & lege motus astrorū. Hanc de magnitudine mobili scientiam dixit boetius: quia rationes geometricas pariter & arithmeticas motibus cœlorū applicat: sicut & perspectiua qualitatib⁹ sensibilib⁹ oculorū. ideo illa sciētia de magnitudine sensibili dici poterat a boetio.

Mathematicæ scientiæ specialiter diffiniuntur. Arithmetica. Geometria. Musica. Perspectiua. astrologia.

Caput secundum de arithmetica specialiter & de numero generaliter.

Omissis autem quatuor ultimis: alias diserendis: ad primam mathematicarum scientiarum arithmeticā nostra hæc presens se conuertat oratio. quæ ideo prima inter mathematicas scientias ordinatur quia aliarum omnium est simplicissima & absolutissima vel abstractissima. Nam si aristoteli recte docenti in analecticorum posteriorū libro suo primo credi oporteat: certior aliis scientia & prior est illa quæ est ex paucioribus. i. simplicioribus terminis vtens: aliæ vero se habent ad illam ex appositione. i. additione cognotatiōis. Arithmetica aūt talis est erga alias mathematicas oēs. nā musica vtitur terminis q extrīsecā & phisicalē cognotationē addūt sup terios arithmeticos. vt tonus sup sexquioctauā pportionē; & diapason sup duplā: & sic de aliis multis. similiter geo

Arithmeticæ scientiæ primatus

metria terminos habet super arithmeticam cognotantes (non tamen phisice cum sit pura mathematica) vt punctus cognotat super vnitate3: triangulus super ternarium: & sic de aliis sine numero. Si ergo his rationibus arithmetica prior comprobatur geometria: multo verius præcedet perspectiuam & astrologiam quarū termini super geometriam cognotationes superaddunt. Primum omnium vocabulorum in arithmetica & subiectum attributionis eius est numerus seu multitudo cuius diffinitio hæc est Numerus est plurium vnitatum collectio aut aggregatio. vel clarius est plures vnitates collectæ & aggregatæ. vt binarius: ternarius: quaternarius &c. Vnitas vero (quæ priuatiue cognotat supra numerum sicut punctus super magnitudinem) est rei per se discretio. i. res alteri non collecta vel aggregata: aut saltem tali ratione considerata.

Arithmetice subiectū pricipale

dd numer⁹

dd vnitas

Numeri duæ sunt proprietates quas Iordanus in primo suæ arithmeticæ libro statim demonstrandas proponit. Prima est. omnis numerus circum se proxime positorum atq; simul iunctorum est medietas numerorum. vt quinarius medietas est denarii ex aggregatione quaternarii & senarii resultantis. cuius proprietatis probatio clara est. quia omnis numerus inter alios duos proximos mediat quorum alterum sola vnitate superat: ab altero vero sola vnitate vincitur: ergo si excessum maioris addas minori resultabunt tres numeri æquales: quorum duo extremi simul iūcti dupli sunt ad medium. vt patet in exemplo proposito de quinario. nam si vnitatem qua vincitur a senario auferas ab eo & quaternario eandem addideris: fient tres quinarii quorum medietas vnus quinarius erit. Et accipitur ī prædicta proprietate numerus large sicut sæpius in arithmetica: adeo vt comprehendat vnitatem. cui etiam quodammodo hæc ꝓprietas conuenit. nam cum ante se nullum habeat numerum: ipsa est medietas numeri immediate sequentis scilicet binarii. Secunda proprietas numeri est. omnis numerus duorum quorūcunq; extrinsecus iacentium sed ab eo æqualiter distantium ac simul iunctorum itidem est medietas. cuius probatio clarissima eadem est cum præcedente. nam numerus medius quantu3 minorem superat: tantum exceditur a maiore. ergo si excessum maioris minori addideris: fient tres numeri equales quorum duorū vnus erit medietas. Diuiditur autem numerus primo in duo genera subalterna de ꝓdicamento quantitatis: quæ sunt par & impar. Est autem par numerus ille qui in duo equalia nulla relicta vnitate diuidi potest. Impar vero numerus est qui in duo equa sic diuidi minime potest. Paris numeri tres sunt proprietates quas iordanus in suo septimo nititur demonstrare. prima est. cum numerus par in duo partitur: vtraq; pars erit eiusdem similisq; denominationis. itaq; si vna earum fuerit numerus par: aliam quoq; parem esse necesse est: & si una fuerit impar: & altera. neq; vnq̄ in hac diuisione poterit commisceri imparitas paritati. vt denarius diuiditur primo in duos quinarios. & in septem & tria. & in nouem & vnum: quæ partes omnes sunt impares. Diuiditur secundo in sex & quatuor. in duo & octo quæ partes omnes sunt pares. Secunda ꝓprietas. si numerus par alterū parē multiplicet semꝑ nascitur inde par. vt ducto binario in quaternariū ꝓducitur octonarius. similiter ducto quaternario in senariū ꝓueniet vigesim⁹ quart⁹: & sic de aliis. Tertia ꝓprietas. si numer⁹ par multiplicet iparē semꝑ īde ꝓuenit numerus par. vt multiplicato binario ꝑ ternariū nascitur inde senari⁹ & ducto quinario in senariū fit numerus trigenarius: & sic de aliis.

Numeri ꝓprietates. 2

1. ꝓprietas

2. ꝓprietas in comuni

Due spēs numerorū.

Par numerus.

Impar numerus

Paris numeri ꝓprietates tres.

Prima.

2. ꝓprietas

3. ꝓprietas

Caput. 3. de numero pariter pari & suis accidentibus.

Diuiditur autem numerus par in tres species secundum athomas: hæ sunt pariter par: pariter impar & impariter par. Pariter par numerus est qui diuiditur in duo equalia: & iterum eius medietas

Pariter par numer⁹ quid sit.

in duo equalia partitur: sic ꝙ eius partes omnes vsqꝫ ad vnitatem per duo equa diuisionem recipiant. vnde patet ratio quare dicatur numerus pariter par. vt octonarius diuiditur per duos quaternarios: & illi iterum per binarios: & tandem binarii per vnitates: & sic de omnibus aliis in quibus diuisio non cessat quousqꝫ ad impartibiles veniatur vnitates. Generenantur autem siue inueniuntur omnes numeri pariter pares si ab vnitate incipiendo per duplationem continuam in infinitum procedatur. vt vnus: duo: quattuor: octo. 16. 32. &c. Pariter paris numeri quatuor sunt proprietates ex septimo libro iordani demonstrandæ. Prima est. ꝙ omnes eius partes aliquotæ et similiter denominationes earum respectu totius sunt pariter partes. i. noīe & quantitate aliquota denominantur a pariter paribus. vt octonarii partes aliquotæ sunt. 1. 2. 4. quarum quælibet præter vnitatem est numerus pariter par. similiter & denomīationes earum. nam quaternarius est medietas octonarii cuius denominatio sumitur a binario qui est pariter par. medietas enim nihil aliud est ꝗ̄ secunda aut bina pars totius. item binarius est quarta pars octonarii cuius denominatio fit a quaternario pariter pari & sic de aliis omnibus sine exceptione. Dicitur autē in numeris pars aliquota ille numerus qui aliquotiens sumptus & replicatus efficit suum totum præcise. huiusmodi partes sunt medietas tertia quarta quinta & aliæ sine fine. Secunda proprietas pariter paris numeri est. ꝙ omnis numerus pariter par est numerus diminutus. Pro cuius declaratione supponitur vna diuisio accidentalis numeri paris quæ est non in species: sed fit per partes in modo quæ extrinsece cognotant super diuisum. Numerorum enim parium alius est perfectus: alius superfluus: alius diminutus. quorū diffinitiones ex constitutione totius per partes aliquotas accipiendæ sunt. Dicitur enī numerus perfectus ille par quem adequant præcise eumqꝫ constituunt suæ partes aliquotæ simul iunctæ vel ad seipsas additæ: talis est senarius cuius partes aliquotæ vnus duo tria præcise sex constituunt. Superfluus numerus est par cuius omnes partes aliquotæ ipsum excedunt: maioremqꝫ summam suo toto efficiunt. talis est duodenarius cuius partes aliquotæ. 1. 2. 3. 4. 6. constituunt. 16. Numerus diminutus est par cuius omnes partes aliquotæ non adequant summam totius: sed ab ea deficiunt: minoremqꝫ numerum constituunt. talis est octonarius numerus cuius omnes partes aliquotæ. 1. 2. 4. simul additæ septenarium præcise constituunt. Est ergo secunda proprietas numeri pariter paris ꝙ omnes tales numeri sunt pares diminuti. verumtamen partes eius aliquotæ sola vnitate a suo toto deficiunt. & hoc verum est in omni numero pariter pari vt patet inductiue. Tertia proprietas. omnis numerus pariter par ex correspōdentibus sibi mutuo in eo ptib⁹ aliquotis procreatur. cuius explicatio hæc est. ꝙ ꝑcreatis numeris pariter paribus quotquot voluerimus per duplationem continuam ab vnitate eaqꝫ connumerata: tā numeri mediales ꝗ̄ alii æqualiter a medialibus vtriqꝫ distantes sese mutuo denominant respectu totius: qui est maximus talium numerorum. vt si accipias per ordinem sex numeros pariter pares. vt hic. 1. 2. 4. 8. 16 32. inuenies ibi duos mediales. scilicet. 4. & 8. æqualiter distantes ab extremis connumerata in eis vt diximus vnitate. nam ante illos medios præcedunt duo numeri: totidemqꝫ sequuntur post eos. ergo isti duo mediales se mutuo denominant quotæ partes sint triginta duorum. nam quaternarius est octaua pars: octonarius vero quarta huius numeri. similiter. 2. & 16. se mutuo denominant respectu eiusdē summæ. 32. cuius binari⁹ ē decima sexta ps. & decimus sextus est medietas. tandem. 1. & 32. quæ sūt extrema prædictæ ordinationis sese mutuo denoīant: nā vnitas est trigesima scđa ps illi⁹ numeri & 32. est semel. 32. Si aūt tales numeri pariter pares fuissent tm̄ quinqꝫ: quorū. 16. fuisset vltimus: non inuenires in eis nisi vnum medialem. scilicet. 4. qui seipsum deno

Pariter pa ris ꝓprietates. 4.

1. ꝓprietas

2. ꝓprietas

Paris ꝯditio triplex.

Pfect⁹ par

Superflu⁹ par.

Diminut⁹ par.

3. ꝓprietas

minaret respectu vltimi. est enim eius quarta pars. & duo collaterales eius. 2. &. 8. sese denominarent. nam binarius est octaua pars: & octonarius medietas decimi sexti: denique vnitas est decima sexta pars eiusdem numeri: qui ab vnitate denominatur semel decem & sex. eadem ratio esset in omni alia dispositione pariter parium. quia si disponantur sub numero pari: semper sunt duo mediales. si autem sub numero impari: erit in eis tantum vnus medialis. Quarta proprietas numeri pariter paris est. ꝙ omnium numerorum pariter parium continua serie dispositorũ siue eorum sit vnus tm̃ medialis siue duo mediales: semp qd producitur ex multiplicatione vnius extremi per alterum: idem resultat ex ductu mediorũ & collateraliũ numerorum equaliter distantium a mediis. vt patet in exemplis tertiæ proprietatis præcedentis. nã quicunque numeri seipsos denominabant respectu vltimi: iidem si adinuicem multiplicentur eandem summã producent. nam in primo exemplo siue dicantur quatuor in octo: siue duo in. 16. siue vnus in. 32. eadem summa triginta duorum resultabit. & in secũdo exemplo multiplicato quaternario per seipsum siue. 2. per. 8. siue. 1. per. 16. semper idem prouenit scilicet decimus sextus.

4. ppie.

Caput quartum de numero pariter impari et proprietatibus eius.

Pariter impar numerus est qui in duo equalia diuidi potest: sed quælibet eius medietas diuisionem per equalia non admittit. huiusmodi sunt tales numeri. 2. 6. 10. 14. & alii plures. vnde patet ratio quare dicantur pariter impares. quia licet ipsi sint numeri pares: prima tamen diuisione veniunt ad impares. patet etiam generatio continua talium numerorum per duplationem singulorum imparium etiam cõnumerata vnitate loco i paris numeri. Hui9 etiam speciei quattuor sunt proprietates licet valde diuersæ & oppositæ proprietatibus præcedentis. Prima proprietas est ꝙ cuiuslibet partis eius aliquotæ quantitas & denominatio differunt quantum ad paritatem & imparitatem. ita ꝙ si pars illa sit numerus par habet denominationẽ iparẽ respectu sui toti9. & si p s est numerus impar: denominatio eius est par. vt in hoc numero. 18. nouem est impar numerus sed eius medietas. & sex est numerus par sed eius tertia. & sic de aliis similiter. Secunda proprietas. quilibet duo proximi pariter impares distant a seipsis quaternis vnitatibus: totidemque numeris interscalariter dimissis. vt patet i exemplo superioris diffinitionis: Huius autem proprietatis ratio est clarissima: quia numeri pariter impares ex naturali serie imparium geniti sunt. quilibet autem impar distat a suo proximo impari per duas vnitates: quibus duplatis vt fiant pariter impares: duplantur etiã eorũ distantiæ: ergo distãt per quatuor vnitates. vnde fit vt sequẽs pariter impar quinto loco situetur a proximo præcedente pariter impari. vt patet in exemplis supra dictis. Tertia proprietas est. dispositis naturali ordine pariter imparibus quotquot voluerimus incipiendo a binario: si in tali serie vnus tantum fuerit medialis: ille duorum pariter imparium altrinsecus ab eo æqualiter distantium erit medietas coniunctorum. vt acceptis his quinque numeris. 2. 6. 10. 14. 18. medialis vnicus est denarius: cuius collaterales prædicti. 6. & 14. vel 2. & 18. vigenarium constituunt: cuius medietas est denarius. Quarta proprietas. si in naturali serie pariter imparium fuerint duo mediales: illi simul iuncti adequantur duobus collateralibus ex vtraque parte ab eis æqualiter distantibus siue mediate siue immediate hinc & inde iacentibus. vt si accipiamus sex tales numeros. vt hic. 2. 6. 10. 14. 18. 22. duo

Pariter impar quid sit.

Quattuor eius ppriet.

1. ppietas

2. ppietas

3. ppietas

4. ppie.

mediales erunt 10.& 14. qui simul iuncti complent. 24. eandemq̧ summã perficient collaterales. 6.& 18.etiam 2.&.22.Harũ proprietatũ demonstrationes ex primo & septimo libro arithmetices iordani requirendæ sunt certissimæ.

Caput quintum de numero impariter pari et eius prorpietatibus.

Impariter par nũe[ra]? quid sit.

Impariter par numerus est par cuius due medietates per equalia partitionem admittunt: sed non procedunt vsq̧ ad vnitatem: imo citra eam deficit partitio per æqualia in tali numero. vt.12.20.24.&c.vnde patet ratio quare talis numerus dicitur ipariter par.quia scilicet nõ vniformiter ʒ difformit & ipariter diuiditur per medietates modo pares modo ipares. Generãtur autem numeri huius speciei ex multiplicatione permixta numerorum pariter parium cum numeris imparibus. Si enim fiant duæ series numerorum altera superior ex imparibus a ternario initium sumentibus & nullo impari dimisso: altera inferior ex pariter paribus numeris a quaternario incipientibus continueq̧ procedentibus: quilibet superior numerus in quemlibet inferiorem ductus: numerum impariter parem producit. vt clare demonstrat hæc forma.

3	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128
12	24	48	96	192	384
20	40	80	160	320	640
28	56	112	224	448	896
36	72	144	288	576	1152
44	88	176	352	704	1408
52	104	208	416	.832	1664

Latitudo. Longitudo.

Quatuor eius pprietates.

Huius speciei numerorum itidẽ quattuor sũt proprietates ex septimo arithmecæ iordani demonstrandæ. Prima est. omnis numerus impariter par aliquas eius partes aliquotas habʒ denominatione & quantitate sua consimiles: aliquas vero differẽtes & dissimiles. vt ille numerus. 24. habet has partes. 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. quarum istæ. 2. 4. 6. 12. & re & denominatione sunt pares. nam binarius est duodecima pars eius. duodecim medietas est. quatuor est sexta pars. & sex est quarta pars. sed istæ. 1. 3. 8. discordant a suis denominationibus. quia vnitas est vigesima quarta pars. tenarius est octaua. octonarius vero tertia eiusdem numeri. Ex hac proprietate & sequentibus apertissime constabit q̧ hæc species numeri paris (licet ordine posita sit vltima) est tamen media per participationẽ inter duas præcedentes species sibi inuicem aduersas & dissentientes: vt earũ proprietates ostenderunt.

1. pprietas

2. pprietas

Secunda proprietas est. omnis numerus impariter par est mediocriter diuisibilis in partes scilicet minus q̃ pariter par & plusq̧ pariter impar. Huius ratio ex diffinitione superiore est q̃ manifestissima. quia impariter par numerus nõ vnica sed multiplici partitione diuiditur: nec tamen adeo vt diuidi possit vsq̧ ad vnitatem.

3. pprietas

Tertia proprietas. q̧ in supradicta numerorum impariter parium formula q̃libet series secundum longitudinem figuræ accepta procedit duplando & habet quartam proprietatem numeri pariter paris siue accipias in ea duos mediales numeros siue vnicum. semper enim multiplicatio medii vel mediorum adequatur multiplicationi collateralium & extremorum: quia eadem summa producitur vtrobiq̧ vt patet ex arte multiplicandi in algorismo.

4. pprie.

Quarta proprietas. quælibet series formulæ supra posite secundum latitudinem eius procedit per æquales distantias & obseruat quartam proprietatem impariter paris. nam per artem additionis algoristicæ vnus medialis in ea est medietas duorum collateralium additorum.& duo mediales adequãtur duobus collateralibus æque distantibus ab eis si simul addantur.

Caput sextum de numero impari et speciebus & proprietatibus suis.

Impar numerus: reppetita diffinitiõe: est ille qui ĩ duo æqualia minime potest diuidi. vt. 1. 3. 5. 7. 9. &c. Eius proprietates præcipue tres sunt: ex septimo libro iordani demonstrandæ. Prima. quilibet numerus impar in duo partitus vt vnã partem habeat parem & alteram imparem: ac partitionis membra inæqualia esse necesse est. Nam si quinarium in duas tantum partes diuiseris hæ solæ erunt. 1. & 4. vel. 2. & 3. in quibus manifeste est imparitati paritas associata. & sic de aliis numeris imparibus quibuscunꝙ. Secunda proprietas. si numer⁹ impar imparem multiplicet: solum producitur numerus impar. patet inductiue nam terquinꝙ sunt quindecim. & quinquies septem. 35. & sic de aliis. Tertia proprietas. impar numerus si parem multiplicet semper nascitur inde par. Hæc proprietas conuertibiliter se habet cum tertia proprietate numeri paris superius posita: & ideo eadẽ est veritas & ratio vtriusꝙ. Numeri imparis tres sunt species immediate quæ sunt. primus. secundus. & ad alterũ primus. Numerus impar prim⁹ est qui sola vnitate pte aliquota metiri põt. vt. 3. 5. 7. idemꝙ incõpositus nominatur. & ratio vtriusꝙ denominationis est eadem: quia numeri imparis nulla potest esse pars aliquota præter vnitateꝫ nisi illa etiam sit numerus impar. Ille ergo numerus impar qui nullum alium imparem præter vnitatem habet partem aliquotam: primus dici debet: quia ante se nullum habet numerum mensurantem. dicitur etiam incõpositus: quia ex aliis numeris non componitur: sed ex solis vnitatibus. Impar secundus est qui aliam vel alias præter vnitatem habet partes aliquotas. vt. 9. 15. 21. merito ergo idem secundus & compositus nominatur: quia præcedunt ipsum alii numeri cõponentes eum. Harum duarum specierum imparitatis quatuor assignari possunt proprietates: quarũ duæ priores ex tertio libro: duæ vero posteriores ex septimo libro iordani veniunt demonstrandæ. Prima proprietas est omnis numerus primus in se etiam est primus ad omnem alium numerum quem non mensurat. vt. 7. ad. 9. & ad. 15. & sic de aliis. Secunda proprietas. omnis numerus secundus & compositus ab aliquo primo & incomposito necessario mensuratur. vt. 9. a ternario. & 15. a quinario. & 21. a septenario & sic de aliis. Tertia proprietas. omnis numerus primus aliquis imparium est taliter dispositorũ qui post nullum imparem totus venerit quotus aliquis impariuꝫ fuerit in naturali serie ab vnitate. Quarta proprietas. omnis numerus secundus & cõpositus post aliquẽ impariuꝫ naturali ordine dispositorũ totus esse cognoscitur quotus ille impar erat ab vnitate. Hæ duæ proprietates simul declarari poterunt: data arte inueniendi per ordinem numeros prædictarũ duarũ specierum imparitatis. quæ talis est. Disponantur a ternario incipiendo omnes numeri impares in serie naturali. vt. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. tunc clarum est ꝙ ternarius est impar primus & incõpositus ante quẽ nullus impar est præter vnitatem. Si ergo post ternariũ tot numeros accipiamus in prædicta serie: quot ipse ternarius continet vnitates continue procedendo: inueniem⁹ omnes numeros secundos a ternario mensuratos. vt post ternarium acceptis. 5. 7. 9. tertius istorum nouenarius est secundus & cõpositus a ternario parte aliquota eius. Item post nouenarium tribus acceptis. vt. 11. 13. 15. tertius istorũ quindenarius est secundus & cõpositus a ternario parte aliquota eius. similiter post quindenariũ iterum trib⁹ acceptis vt. 17. 19. 21. tertius istorũ est secundus & cõpositus a ternario. & sic continue p

Impar nu mer⁹ qd sit. Tres eius ꝓprietates. 1. ꝓprietas 2. ꝓprietas 3. ꝓprietas Imparis. 3 species. Prim⁹ & icõposit⁹ qd sit. Secund⁹ & cõpositus qd sit. 1. ꝓprietas 2. ꝓprietas 3. ꝓprietas 4. ꝓprie. Modus generationis harũ. 2. specierum.

cedendo per illam seriem inueniemus infinitos secundos & cōpositos a ternario mē suratos. Similis ratio est habenda post quinarium ad inueniendum numeros secūdos & cōpositos ab eo.s. acceptis post quinarium quinq; numeris cōtinue: quia tot ipse cō tinet vnitates. vt acceptis. 7. 9. 11. 13. 15. vltimus istorū est secundus & cōpositus a qui nario parte aliquota eius. & iterum post illum si alios quinq; accipiamus. vt. 17. 19. 21 23. 25. vltimus istorū est secundus & cōpositus a quinario. & sic consequenter procedē do inueniemus omnes alios. Eadem ratio est de numero septenario continue accep tis septem numeris post ipsum: & de nouenario acceptis nouem: & sic de aliis omnib⁹ imparibus per ordinem. Ex quo processu liquido constat qui numeri impares in di cta serie sint de prima & qui de secunda specie imparium supradictis. omnes enim im pares inuenti per saltū ternarii aut quinarii aut septenarii & sic de aliis: sunt secūdi & cōpositi. qui vero per nullum præcedentium numerorum saltus faciendo inueniri po tuerunt: sunt primi & incompositi. vt patet in his duabus seriebus aut lineis.

Per quinarium.

Per septenarium.

Inuentio taliū numerorum

Primi & incompositi. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47.

Secundi & compositi. 9. 15. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 45. 49. 51. 55. 63. 81.

Et si ex hac secunda serie vellet quis plures alias diuidere: quarū prima contineret nu meros mensurandos per ternarium: secunda mensurandos per quinarium: tertia eos quos mensurat septenarius & sic de aliis: inueniet hanc legem in eis obseruatā inuiolabi liter. q; denominationes cuiuslibet imparis respectu suæ seriei numerorū ab eo cōpo sitorum variantur cōtinue secundū naturalē seriem omnium numerorū impariū su perius descriptam. itaq; respectu primi in sua serie quilibet impar est tertia pars. & se cundi est quinta pars. tertii est septima: & sic consequenter in omnibus lineis.

Obseruāda regula.

Compositi a ternario. 9. 15. 21. 27. 33. 39. 45. 51. 57. 63. 69. 75.

Compositi a quinario. 15. 25. 35. 45. 55. 65. 75. 85. 95. 105.

Compositi a septenario. 21. 35. 49. 63. 77. 91. 105. 119. 133. 147.

Ex his facile intelliguntur duæ proprietates harum specierū imparitatis vltimo posi tæ supi⁹. nā oīs numerus secundus & cōpositus ab aliquo impari: totus est in sua serie quotus erat ille impar cōponens ipsum in ordine impariū vel alius sequens eum natu rali ordine. vt nouenarius totus est inter secūdos & cōpositos a ternario quot⁹ erat ter nari⁹ in naturali serie imparium: quia primus & quindenarius totus quotus quinarius quia secūdus. & vigesim⁹ primus est eorū tertius sicut septenarius inter impares. Eadē ratio est in omnibus aliis. Numerus autē primus & incompositus hac lege non astri gitur. quia non dicitur per relationē ad aliquem alium numerum: ex quo a nullo com ponitur sed a sola vnitate. hæc de primis duabus speciebus numerorū imparium. Nu merus ad alterum primus est impar qui secundum se est secundus & composit⁹: sed ad alterum cōparatus sola cū illo cōuenit vnitate parte aliquota qua vterq; cōmuniter mē suratur. vt nouenarius ad vigesimū quintū. & ad. 49. &c. Generantur aūt siue iueniū tur omnes numeri huius tertiæ speciei per continuā multiplicationē numerorū ipariū primæ speciei: si eorū quilib; ducatur in se ipm. vt in hac serie est quā manifestissimū 3. 5. 7. 11. 13. 17. Nam ex tali multiplicatiōe quilibet numerus productus 9. 25. 49. 121. 169. 289. est secūdus & cōpositus per diffinitionē: cuius pars aliquo ta præter vnitatem est ille impar ex cuius multiplicatione producitur & nullus alius. igitur quilibet duo tales ad inuicē cōparati in nulla parte aliquota præter vnitatē con cordant. Huius speciei duæ sunt proprietates. Prima est. omnes numeri ad seipsos primi singuli in se ducti numeros etiam primos ad seipsos producunt. vt. 81. qui ex multiplicatione nouenarii per seipm producitur: licet sit secūdus & cōposit⁹ seorsum acceptus: tñ cōparatus ad. 625. (qui ex vigesimo quinto in seducto nascitur) est pri mus & incompositus. quia in nulla cum eo parte aliquota conuenit excepta vnitate.

Numerus ad alterū primus qd sit

Numeri ad alterū primi due proprietates.

1. proprietas

Secūda proprietas. omnis numerus minor qui ad maiorē est primus: si a maiore detrahatur quotiēs poterit: & eo q̄ relinquetur quoties pōt a minore ditracto: atq̄ hoc pacto cōtinue detractis residuis a suis præcedētibus pcedendo: tandē sola relinqtur vnitas. q̄ si aliqs ali9 nūer9 ab vnitate remāserit: tales numeri nō sūt adinuicē primi. vt si. 9. de matur q̄tiens poterit a. 25. remanēt. 7. q̄ residuo vlteri9 detracto a nouenario quotiēs poterit: remanent duo. qb9 iterū subtractis a septenario quotiēs fuerit possibile: remanet sola vnitas. non sic autē se habebit. 9. ad. 21. quia ante vnitatē remanebit ternari9. ergo duo primi nūeri sūt ad seipos primi & icōpositi ptinētes ad tertiā speciē iparium duo vero vltimi nō possunt ad illā pertinere: sed tantū remanēt sub secūda specie imparium. prædictæ duæ proprietates ex tertio libro iordani veniūt demōstrandæ. Quia vero superius de numeris parib9 perfectis superfluis & diminutis mentionē fecim9: libet hic in calce huius tractat9 eorū inuentiōes & pprietates determinare. Numeri igitur perfecti duabus regulis inueniūtur. prima est q̄ in quolibet limite numerorū est tantū vnus perfectus. Ideo numeri perfecti quia rari & præciosi similitudinē gerunt moraliū virtutū: de quibus aristoteles dicit in fine secūdi ethicorū q̄ virtus est rara & præciosa. Vocamus aūt in proposito limites numerorū eos quos in descriptionib9 algoristicis locos scribēdi numeros vocare solent. vt in primo loco vnitates. i. oēs numeros vsq̄ ad nouē inclusiue. in secūdo loco denas quæ etiā sunt nouē. in tertio cētenas. in quarto millenas. & sic de aliis quæ oēs denominationes vsq̄ ad nouē præcise se extendunt. Est ergo sensus hui9 primæ regulæ q̄ infra decē est vnus solus numerus pfectus. & supra decē sed infra centū etiā vnicū perfectū repperimus. deinde supra cētum sed infra mille est tantū vnus perfect9. & sic consequenter per oēs alios limites numerorū idē reperimus. Sed quia ista regula prima est satis cōfusa addamus secundā magis distinctā. q̄ omnis numerus perfectus ex cōtinua aggregatione pariter pariū numerorū naturali serie ab vnitate dispositorū: & ex multiplicatiōe iparis primi inde resultantis per vltimū pariter pariū simul additorū infallibiliter & continue generatur. vt dispositis hoc ordine pariter paribus. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. si addamus primū secundo resultat ternarius: qui cū sit numerus primus & incompositus: si multiplicetur per binarium qui erat vltimus additorum: resultat senarius numerus perfectus. deinde si duobus primis addatur tertius pariter par scilicet quaternaris. resultat septenarius: qui cum sit impar primus & incompositus: debet multiplicari per quaternarium vltimum additorū: & producetur inde. 28. qui est numerus perfectus. postea addatur octonarius ad præcedentes: & resultant. 15. qui cum non sit impar primus: inefficax & inutilis est ad generationem numeri perfecti. dimittatur ergo & nō multiplicetur per octonarium vltimū additorū: sed procedatur addendo pariter pares sequentes. & vbi ex eorum additione resultauerit numerus impar primus: ille est multiplicādus per vltimum pariter parium additorum. vt generetur inde numerus perfectus. quorum exemplar & recta series est hæc.

Impares collecti.		3.	7.	15.	31.	63.	127.	255	511.
Pariter pares	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256
Perfecti numeri.	0.	6.	28.	0.	496.	0.	8128.	0.	130816

Numerorū perfectorum hæc est notabilis proprietas. q̄ oēs numeri pfecti seriatim & naturali ordine dispositi alternatim senario & octonario numeris terminantur semper. Numeri igitur perfecti licet pares sint: inter alios sui generis obtinuerunt principatū laudesq̄ promeruerunt: cū alii pares oēs dicātur apud pictagoricos infamati: & maxime pariter pares propter suā diuisibilitatē. nā perfecti numeri a radice īparitatis procreantur oēs: q̄ magnas laudes habet in negocio arithmetico. Inuēcio aūt numerorū pariū superfluorū & diminutorū facilis est. quia vt superius dixim9 oēs numeri

2. pprietas

Incidēs de numeris pfectis.

Inuētiōis eorū due regule.

Prima.

2. regula

Unica pprietas perfectorum.

pariter pares sunt diminuti: ergo reliqui oẽs pares exceptis pfectis erũt numeri superflui. Quorũ duorũ modorũ proprietates ex septimo libro iordani demonstrandæ hæ duæ sunt. Prima oĩs numer⁹ diminutus a sola vnitate aut ab alio numero diminuto pte aliquota eius mẽsuratur. Hæc ex prima ꝓprietate pariter paris est q̃ manifestissima. Scḋa ꝓprietas. oĩs numerus abũdans aut superfluus solũ numerũ abundantẽ mẽsurare põt tanq̃ pars aliquota eius. patet inductiue. quia. 12. est ps aliquota istorũ. 24 36. 60. qui oẽs sunt superflui. Hactenus igitur de numero & specieb⁹ suis tã subalterni q̃ specialissimis: q oẽs termini sunt de p̃dicamẽto quãtitatis: & de ꝓprietatib⁹ siue generis siue specierũ oĩm: hæc nos dixisse sufficiat ꝓ primo tractatu hui⁹ nostri primi libri introductiõis arithmeticæ. Quæ quãtas cõmoditates afferãt in maiorib⁹ sciẽtiis phisica: methaphisica: morali sciẽtia: & medicina: atq̃ theologia: longũ esset enarrare & altioris egens speculatoĩs. Nunc aũt hoc vnũ tacere nõ volumus: q̃ diuinus ille pictagoras totã philosophiã numerorũ rationib⁹ intexuit: attribuẽs vnitatẽ primo oĩm rerũ principio. s. deo. Numeros aũt oẽs creaturis adaptauit. vt aristoteles narrat in primo libro methaphisicorũ. sed pares numeros ꝓpter eorũ diuisibilitatẽ creaturis corruptibilib⁹ indidit: impares vero creaturis spũalibus & incorruptibilibus. Hinc processit illa distinctio duorũ p̃dicamentorũ apud pictagorã. s. rerũ perfectarũ & iperfectarũ. in quarũ coordinationũ prima imparẽ posuit: ĩ secũda vero parẽ. Et quia materia rerũ naturaliũ est oĩm imperfectissima creatura. & causa oĩs corruptionis & varietatis in rebus mũdi: ideo ei attribuit primũ & iperfectissimũ oĩm numerorũ binariũ. cuius mentẽ plato explicans vocauit materiã magnũ & paruũ: vt aristoteles tradit in primo phisicorũ. Elementis aũt pictagoras attribuit quaternariũ: quia sunt prima & imperfectissima oĩũ corporũ naturaliũ: & sic cõsequẽter ꝓcedebat per alias species numerorũ pariũ & rerũ naturaliũ. Post quas ad corpora celestia veniẽs quia sunt ĩcorruptibilia: atribuebat eis numeros ĩpares: quia spherã quãlibet planetarũ trifidã in tresq̃ orbes diuisam ponebat. Quã viã postea secut⁹ est ptholemeus ponẽs orbes eccẽtricos planetarũ. & tandẽ sup septẽ spheras planetarũ. tres alias spheras mobiles cõcessit Pictagoras. vt Aristoteles narrat in primo methaphisicorũ. Vltimo veniẽs ad substãtias spũales separatas de eis per numeros ĩpares primos & incõpositos ratiocinabatur ponens eas substãtias simplices a sola vnitate q̃ deus est depẽdentes & mẽsurabiles. Hũc modũ philosophãdi diuinissimus Plato postea insecut⁹ est satis copiose & mirabilit. Deinde aristoteles ingeniosissimus hãc viã sibi placuisse testat⁹ est: cũ in octauo libro suorũ methaphisicorũ dixerit q̃ eẽntiæ rerũ sunt sicut numeri. & alibi pluries de hoc. Sãcti etiã doctores ecclesiæ Augustinus. Hieronymus. Chrysostom⁹. Origenes: & alii plures in suis opusculis multa ad fidẽ & mores ptinẽtia rõnibus numeralibus sufficiẽtissime explicarũt. atq̃ in cõmẽtationibus suis supra textũ sacræ bibliæ nimis põderãt ea q̃ certis numerorũ speciebus spũs sctũs determinari voluit a ꝓphetis & apostolis. vt videre ẽ apḋ moysen in descriptõe tabernaculi: & apḋ ezechielẽ ĩ mẽsuratiõe tẽpli. cui fere similia verba posuit Ioãnes in apocalipsi. Vnde nõ sine oĩm theologorũ miraculo legitur illud Gene. 1. vbi in secũdo die creatiõis nõ dicitur: vidit de⁹ q̃ eẽt bonũ: cũ tñ hoc verbũ ĩ nullo aliorũ dierũ p̃termitatur. quia vt aiũt in hoc designauit spũs sãctus numeri binarii ĩperfectionẽ: qui cũ sit primus recessus ab vnitate: pcti primorũ parentũ vel malorũ angelorũ figurã habet. Senarii quoq̃ numeri pfectionẽ August. sup Genesim ãnotauit: rõnẽ reddens quare ĩ sex diebus pfecti sunt cœli & terra & omnis ornat⁹ eorũ totaq̃ mundi pfectio illo dierũ numero edita est. Nõ solum autẽ supradicti philosophi & theologi p numeros & eorum ꝓprietates de rebus humanis & diuinis ratiocinãtur: sed etiam p numerorum habitudines quas vocãt ꝓportiones: de quibus vt iam disseramus opus est.

Marginalia: Due ꝓprietates aliorũ. 1. ꝓprietas. 2. ꝓprietas. Epilog⁹ predictorũ. Pictago. Unitas est deus. Pares numeri corruptibilia. Impares numeri incorruptibilia. Binarius materia. Quaternarius elemẽta. Ternarius sphera celestis. Impar primus intelligentia. Plato. Aristote. Theologi. Moyses. Ezechiel. Joannes. Senarius creationis.

Tractatus secundus de proportione et proportionum speciebus ac proprietatib⁹.cuius sunt capita septē. Primū caput de pportione multiplici & specieb⁹ & pprietatib⁹ eius.

POstq̄ ea quæ ad quēlibet numerū per se sumptū pertinebāt diffusius ptractauimus: reliquū est vt numerorū ad numeros habitudines seu pportiones inquiramus: a vocabuli diffinitiōe exordiū nostræ narratiōis auspicantes. Proportio numeralis est numeri ad numerū certa habitudo. vel clari⁹ est numerus ad numerū aliqualiter se habēs in quātitate sua. vt. 2. ad. 4. & ecōtra est pportio: & sic de aliis. Huius generis duæ assignari possunt pprietates. Prima est. q̄ oīs pportio numeralis est pportio rōnalis. pbatur ex diffinitiōe rōnalis pportiōis q̄ est hæc. Proportio rōnalis est habitudo duarū quantitatū ad inuicē cōmunicantiū in parte aliquota q̄ cōmuniter vtriq̄ illarū cōuenit licet nō sub eadē denoīatione. cōstat aūt q̄ oīs numer⁹ cuilibet alteri numero cōmunicat in parte aliquota admin⁹ in vnitate: q̄ oīs numeri est pars aliquota: oīsq̄ numerus ad vnitatē est pportio multiplex: ergo oīs pportio numeri ad numerū est rōnalis. Ex hac prima pprietate sequitur alia & secūda. q̄ nō oīm pportionū modi aut species possunt in numeris reppeiri: pbatur quia sunt dabiles aliq̄ species pportionum q̄ dicūtur irrationales: quales sunt quantitates in nulla parte aliquota adinuicē cōmunicātes: vt geometræ pbāt de duab⁹ lineis ī quadrato q̄ sunt diameter et costa: & etiā de quibusdā aliis lineis & superficieb⁹. nulli aūt numeri sunt adinuicē incōmunicātes: vt pbatū est. ergo taliū pportionū modos vel species: numerorū natura nō patitur. Diuiditur aūt pportio nūeralis in duas spēs imediate q̄ sunt equalitas: & inequalitas. Equalitas est nūerus taliter se habēs ad aliū numerū q̄ eū nō excedit neq̄ ab eo exceditur. vt. 3. ad. 3. & 8. ad. 8. Inequalitas vero ē numerus ad aliū sic se habēs q̄ illū excedit vel ab eo exceditur. vt. 6. ad. 3. vel. 4. ad. 8. Patet ergo q̄ in arithmetico negotio secūdū veriorē philosophiā noīa abstracta & cōcreta sinonima sunt: ideq̄ penitus significāt: vt equalitas & equale: inequalitas & inequale. Harū duarū specierū simul tres ponim⁹ pprietates: ex nono libro iordani demōstrandas. Prima est q̄ equalitas est oīs inequalitatis principiū origo & mater. Secūda. ex prima sequitur q̄ oīs īequalitas ex equalitate nascitur. Tertia. q̄ oīs īequalitas est resolubilis vsq̄ ad equalitatē. Harū pbationes in vltimis duob⁹ capitulis hui⁹ tractatus erūt clarissime. Equalitas aūt in alias spēs vlteri⁹ nō diuiditur: sed est spēs athoma aut specialissima: quia talis numerorū habitudo est īuariabilis & ī indiuisibili cōsistens. Inequalitatis vero duæ pbātur species immediate ex diffinitiōe eius disiūctiua. hæ sunt maior & minor īequalitas. Inequalitas maior est numerus excedēs alterū numerū ad quē cōparatur in sua habitudine vt. 6. ad. 3. Minor inequalitas est numerus q̄ ab alio exceditur ad quē refertur: vt. 4. ad. 8. Horū generū subalternorū cōsimilis est diuisio in suas spēs: quot eīm modis contingit vnū numerū excedere aliū: tot modis cōtingit q̄ vnus nūerus ab alio excedatur. ideo totidē sunt spēs p̄cise minoris quot maioris inequalitatis eisdēq̄ vocabulis fere distinctæ. Maioris ergo inequalitatis quinq̄ sunt spēs pximæ. tres primæ simplices vt multiplex. superparticularis & super partiēs. duæ vltimæ sunt cōpositæ ex tribus primis. s. multiplex superparticularis: & multiplex superpartiēs. ergo similiter minoris īequalitatis erūt quinq̄ spēs istæ. submultiplex. sub superparticularis. subsuper partiēs. submultiplex superparticularis. & submultiplex superpartiēs. Et pportionaliter diffiniendæ sicut spēs maioris & minoris īequalitatis atq̄ eisdē exēplis cōuersis declarādæ. Multiplex igitur pportio est numerus maior sic excedēs suū minorē q̄ eū totū p̄cise pluries cōtinet. vt. 12. ad. 3. vbi maior cōtinet minorē totū quater & nihil plus. & ī eodē exēplo cōparādo. 3. ad. 12. est pportio submul

Proportio numeralis quid sit. — diffinicio

Due eius pprietat.

1. pprietas

2. pprietas

Proportio nis duo genera. Equalitas. Inequalitas.

Proprietates earū. 3.

1. pprietas

2. pprietas

3. pprietas

Inequalitatis speci es. 2.

Maior inequalitas.

Minor inequalitas.

Maioris inequalitatis species. 5.

Multiplex pportio qd

Proprietates eius. 3.

triplex: qua minor numer⁹ totus pluries exceditur a maiore cōtineturq; in illo. Multi-
plicis ꝓportionis icōmuni tres notātur ꝓprietates ad nonū librū arithmetices iorda-
ni referēdæ. Prima est ꝙ multiplex ꝓportio cæteris iequalitatib⁹ est ātiquior & origi- *1. ꝓprietas*
ne prior. hæc declarabitur infra in cap. 6. huius tractatus qd erit de origine ꝓportio-
nū. Secūda ꝓprietas oīs ꝓportio multiplex oēsq; multipliciū spēs & modi ex cōtinua *2. ꝓprietas*
serie numerorū ad vnitatē relata facile iueniūtur. hæc ex pri⁹ dictis i hoc capitulo cla
rescit. dictū est enī ꝙ oīs numerus ad vnitatē est multiplex: sub varia tñ specie multipli
catis. Tertia ꝓprietas ꝙ oīs ꝓportio multiplex habet aliā multiplicē se maiorē. vt du- *3. ꝓprietas*
pla quadruplā. tripla nonocuplā: & sic de aliis. Multiplicis ꝓportiōis infinitæ sunt spe *Multiplicis spēs infinite*
cies specialissimæ tot. s. quot sunt spēs numerorū a qbus denoīantur. vt dupla: tripla:
quadrupla &c. sine statu. Dupla proportio est numer⁹ maior cōtinēs totū minorē ad *Dupla.*
quē cōparatur bis præcise vt. 6. ad. 3. &. 8. ad. 4. &c. Tripla proportio est cū maior nu *Tripla.*
merus minorē ter ꝑcise cōtinet vt. 9. ad. 3. &. 12. ad. 4. &c. Quadrupla portio est. cū ma *Quadrupla.*
ior numer⁹ minorē cōtinet totū ꝑcise quater. vt. 8. ad. 2. &. 12. ad. 3. &c. & secūdū hanc
proportionē definirētur oēs aliæ species proportiōis multiplicis. Generātur aūt siue *Generatio earum.*
iueniūtur numeri taliū proportionū ex naturali serie numerorū. nā quilibet numer⁹
ad vnitatē cōparatus cōtinue sub alia & alia specie mltiplicitatis se habet ad illā. vt bina
rius est duplus: ternari⁹ triplus: quaternari⁹ quadrupl⁹ ad vnitatē: & sic in ifinitū. Sꝫ
in hoc processu nō habem⁹ pro qualibet specie multiplicatis nisi vnū exēplū: vt ergo
sub qualibet specie ifinita exēpla repperiamus: oportet nos hāc regulā obseruare ꝙ de
scripta naturali serie numerorū ab vnitate incipiēdo sup eā scribatur alia series q̄ icipi
at a binario procedatq; p continuā additionē binarii & sic habebimus infinita exem-
pla proportionis duplæ. vt patet in hac serie.

Dupli. 2. 4. 6. 8. 10. 12. Et si linea supior icipere a ternario ꝓcederetq; p cōti
1. 2. 3. 4. 5. 6. nuā additionē ternarii iuenirem⁹ ifinita exēpla ꝓpor
tiōis triple. vt hic. 3. 6. 9. 12. 15. 18. Et si series superior icipere a quaternario: extē
Tripli. 1. 2. 3. 4. 5. 6. dereturq; per continuam additionem quaterna-
rii deseruiret exemplis proportionis quadruplæ. vt in hac forma patet.

Quadrupli 4. 8. 12. 16. 20. 24. Et si in incipiamus a quinario in serie superi-
1. 2. 3. 4. 5. 6. ore & cōsequēter procedam⁹ p quinarios iue
niem⁹ infinita exempla proportiōis quīcuplæ: & sic cōsequēter i aliis oīb⁹ spēbus.

Quincupli. 5. 10. 15. 20. 25. 30. Alii vero auctores diuersis verbis huius regu
1. 2. 3. 4. 5. 6. læ eandē sentētiā aliter protulerūt dicētes ꝙ
si ex naturali serie numerorū procedatur cōtinue vno dimisso interscalariter: iuenie
mus oēs duplos. & duobus dimissis oēs triplos. & tribus dimissis oēs quadruplos & sic
cōsequēter: vt patet in exēplis positis. Alii clarius dixerūt ꝙ acceptis primis exēplis
oīm proportionū ex naturali serie nūerorū vt prius dicebamus: si illi numeri duplen
tur erunt secūdi numeri in eisdē proportionibus & si triplētur erūt tertii numeri earū
dē proportionū. & si quadruplētur erūt quarti nūeri. & sic cōsequēter. & hoc patet etiā
eē verū in exēplis supra positis. Quarū oīm spērū simul he sūt due proprietates ad no
nū librū iordani ptinētes: Prima ē ꝙ oīm proportionū multipliciū a paribus nūeris *Due ꝓdictorū ꝓprietates.*
denoīatarū semp nūeri maiores sūt pares in oībus suis exēplis: imparē vero hñtiū de
noīationē: nūeri maiores neq; oēs sūt pares neq; oēs impares: sed vnus par & alter im *1. ꝓprietas*
par alternatī procedēdo: vt manifeste declaratur in formulis proportionū multiplicū
superius descriptis. Secunda prpprietas ꝙ omnis proportio multiplex in sua genera
tiōe p solā vnitatē numeros superat ōmitendos ex naturali serie: sic ꝙ denoīatio illius *2. ꝓprietas*
proportiōis sumitur a maiori nūero q̄ sit nūerus ōmittēdorum: & ille excessus ē sola
vnitas. vt in dupla proportione est cōtinue dimittendus vnus numerus: in tripla duo
numeri. in quadrupla tres. & sic consequenter.

Caput secūdū de ꝓportione supparticlari & ei⁹ specieb⁹ & ꝓprietatibus.

Supparticularis ꝓportio quid.
Proprietates ei⁹ due
1. ꝓprietas
2. ꝓprietas

SVperparticularis ꝓportio est nūerus maior cōtinēs in se aliū minorē totum semel & vltra hoc vnā tm̄ eius partē aliquotā.i.medietatē vel tertiā vel quartā &c.vt.6.ad.4.&.12.ad.9.Huius generis duæ sunt ꝓprietates etiā ex nono libro arithmeticæ iordani demōstrādæ.Prima est ꝙ oīs superparticularis ꝓportio h3 post se aliā minorē superparticularē.vt sesquialtera sesqtertiā & illa sesquiquartā & sic deiceps.Pro cui⁹ declaratiōe additur secūda ꝓprietas.ꝙ oīs supparticularis ꝓportio quāto a minori nūero denoīatur tāto est maior:&viceversa quāto a maiori nūero sumit denoīationē tāto ipa est minor.vt sesquialtera est maior ꝓportio ꝙ̄ sesquitertia & hæc maior ꝙ̄ sesquiquarta &c.ratio clara est ex quātitate partiū aliquotarū qa medietas ē maior tertia parte & tertia maior quarta&c. In multiplicibus aūt ꝓportionib⁹ quātitates earū augētur secūdū ordinē suarū denoīationū:& a maiori nūero denoīata ꝓportio ē maior:vt tripla ꝙ̄ dupla &quadrupla est tripla maior &c. Supparticularis ꝓportionis infinitæ sunt spēs sūptæ ex varietate aliquotarū partiū q̄ ꝓcedit secūdū naturalē seriē numerorū:vt sesquialtera sesquitertia sesquiquarta sesquiquinta:& ita sine fine. Sesquialtera vel poti⁹ sesqualtera quā græci hemiolā vocāt:est nūerus maior minorē cōtinēs totū & ei⁹ medietatē p̄cise.vt.3.ad.2.&.12.ad.8.&c. Sesquitertia ꝓportio q̄ & epitrita est maior numer⁹ minorē cōtinēs & ei⁹ tertiā partē.vt.4.ad 3.&.12.ad.9.Sesquiquarta ab excessu quarte ptis sup minorē numerū denoīatur:vt.5.ad 4.&.15.ad.12.Sesquiquinta vero a quīta pte:& sic cōseqūēter. Gn̄atio aūt oīm istarū spērū ad habēdū singula exēpla earū hac vnica regula cōphenditur.ꝙ ī serie nūerorū vnitate dimissa qlibet seqūēs nūerus ad suū ꝓximū p̄cedentē cōtinue sub alia & alia spē supparticularis ꝓportiōis refertur.vt.3.ad.2.est sesqualter &.4.ad.3.sesquiterti⁹.&.5.ad.4.sesq̄quartus&c. Ad habendū aūt infinita exēpla cuiuslibet speciei ponitur hæc alia regula. Si ex exēplis multiplicium ꝓportionū superi⁹ descriptis lineæ superiores adinuicē cōparentur: infinita exempla cuiuslibet proportionis superparticularis ostendentur..s. quia tripli ad duplos sunt sesquialteri:& q̄drupli ad triplos sesquitertii.&sic cōseqūnter.vt p3 hic.

Sesquialtera
Sesquitertia
Sesquiquarta.
Sesquiquinta.
Gn̄atio eorum

Sesquialteri.	3.6.9.12.15.	Sesquitertii	4.8.12.16.20.24.
	2.4.6.8.10.		3.6.9.12.15.18.
Sesquiquarti.	5.10.15.20.	Sesquinti.	6.12.18.24.30.36.
	4.8.12.16.		5.10.15.20.25.30.

Ali⁹ mod⁹ facilior

Alii vero facilius hāc secūdā regulā protulerunt dicentes ꝙ habitis ex prima regula primis exēplis ꝓportionis superparticularis cuiuscunqꝫ:si illi numeri duplētur erūt scdi in illis ꝓportionib⁹. & si triplentur erunt tertii:& si quadruplētur erunt quarti: vt p3 in exemplis prædictis. Oīm autem superparticularium proportionum hæc vnica est & notanda proprietas.ꝙ quælibet superparticularis proportio in omnibus exemplis suis seriatim sumptis primus dux primum comitem sola vnitate superat:& secundus secundum binario:tertius tertium ternario.& sic consequenter procedendo per numeros naturalis ordinis.vocam⁹autem in hoc capitulo & in oībus sequentibus illos numeros duces qui sunt maiores in suis proportionibus:minores vero comites.exempla huius proprietatis iam posita sunt in generatione istarum specierum.

ꝓprietas vnica.

Caput tertiū de ꝓportiōe superpartiēte & speciebus & ꝓprietatibus eius.

Superpartiens ꝓportio qd sit

PRoportio superpartiens:est numerus maior qui ad alium minorē comparat⁹ ipsum totū semel & plures eius partes aliquotas eiusdem denominationis ex quibus tm̄ nō fiat vna pars aliquota:cōtinet.vt.5.ad.3.vel.9.ad.7.&c vocam⁹ autem plures partes aliquotas eiusdem denominationis vt plures medietates: vel plures tertias: aut plures quartas &c. dicimus etiam notanter ex quibus non

fiat una pars aliquota: quia in tali casu illa proportio reduceretur ad supparticularē & nō esset suppartiēs. vt si maior nūerus cōtinet minorē & duas q̃rtas ei⁹ esset illa proportio sesquialtera: quia duæ quartæ sūt vna medietas. similiter si maior nūerus cōtineret minorē & tres nonas ei⁹ illa esset proportio sesquitertia quia tres nouenæ sunt vna tertia pars totius. Huius generis hæ due sunt notabiles pprietates ex nono libro arithmetices iordani requirēdæ. Prima est q̃ oīs suppartiēs pportio h₃ post se aliā maiorē superpartientē sub eadem partiū denoīatione. vt superbipartiēs habet post se supertripartientē & illam sequitur superquadripartiens: deinde superquinpartiens &c. quæ semper augentur retenta eadē denoīatiōe. nam in hoc genere tanto proportio est maior quanto a maiori nūero partium denominantur si earū denominatio sit eadem & similis. vt maior proportio est supertripartiens septimas q̃ supbipartiēs septimas. & adhuc maior est q̃ sequitur supquadripartiēs septīas: & sic de aliis. Secūda pprietas. oēs suppartiētes pportōes. i. oēs spēs subalterne hui⁹ generis cōsurgūt ex naturali serie iparium sūpto initio a quinario: quibus subscribantur omnes numeri tā pares q̃ ipares naturali serie sumpto initio a ternario. vt 5. ad. 3. est superbipartiēs pportio. 7. ad quatuor supertripartiēs. 9. ad. 5. supraquadripartiēs: & sic de aliis. sed hæc numerorū forma: nō oēs spēs specialissimas suppartiētes explicat: ideo alr iuestigāda est hui⁹ gñis ramificatio. Diuiditur ergo suppartiēs pportio prio p ifinitas spēs subalternas ex nūero partiū acceptas. hæ sūt superbipartiēs. suptripartiēs superquadripartiēs &c. Est aūt pportio superbipartiens nūerus maior cōtinens minorē & duas eius partes aliquotas eiusdem denoīatiōis ex quib⁹ nō fit vna pars aliquota. vt. 5 ad. 3. vel. 9. ad. 7. &c. Supertripartiēs pportio tres tales partes aliquotas superaddit. vt. 7 ad. 4. vel. 8. ad. 5. &c. Superquadripartiēs q̃tuor. vt. 9. ad. 5. vel. 11. ad. 7. & sic deiceps p infinitas spēs. Quelibet aūt pdictarū spērū quia subalterna iterū diuiditur per infinitas species specialissimas variatas ex denoīatione partiū. vt pportiōis superbipartientis: hæ sūt species athomæ. superbipartiens tertias. superbipartiens quītas. superbipartiens septīas: & sic pcedendo p nūeros īpares in infinitū. Item pportiōis sup tripartientis hæ sūt spēs spēalissimæ suptriptiēs q̃rtas suptripartiēs quītas. suptripartiēs septīas &c. Eodē mō pcederetur in diuidendis aliis speciebus subalternis hui⁹ generis: dūmodo obseruetur hæc cōditio q̃ prima species special. ssima cuiuslibet subalterni habeat denoīationē partiū sola vnitate maiorē numero earūdē partiū vt sit superquadripartiens quītas. su pquīpartiēs sextas. supersexpartiens septīas &c. Pro gñatiōe aūt vel iuentiōe nūerorū q ad singulas spēs hmōi pportionū ptinent. hæc vnica regula & facillima ponitur. q̃ pposita qualibet hmōi specie specialissima: primus comes ei⁹ statuatur nūerus denoīationis partiū: cui si addātur tot vnitates quot⁹ est nūerus illarū partiū: ptin⁹ cōsurget prim⁹ dux illi⁹ pportionis. vt si pponatur pportio supbipartiens tertias: prim⁹ comes est ternari⁹: cui additis duab⁹ vnitatib⁹ cōsurgit quinari⁹ prim⁹ dux illi⁹ pportiōis. nā. 5. cōtinet. 3. & duas vnitates q̃ sunt duæ tertiæ ternarii. & si pponatur superbipartiens quītas: prim⁹ comes erit 5. & prim⁹ dux. 7. superaddens duas vnitates. eodē mō in supbipartiente septimas: primus comes est. 7. & prim⁹ dux. 9. & sic de aliis oībus speciebus huius primi generis. Ite₃ si proponatur pportio superpartiens quartas: prim⁹ comes erit. 4. & primus dux. 7. q̃a addit tres vnitates q̃ sunt tres quartæ q̃ternarii. sic in pportiōe supertripartiente quintas primus comes est. 5. & prim⁹ dux est. 8. & sic de aliis speciebus huius gñis. Eodem mō pcedi pōt per hanc regulā in singulis speciebus aliorū generū sequentiū in hmōi pportionibus. Habitis aūt primis numeris cuiuslibet speciei talium pportionū: secundi & tertii & quarti in eisdem pportionibus p cōtinuā multiplicationem eorum facile inueniuntur. vt eis duplatis fient secundi. triplatis tertii. quadruplatis quarti: & sic deinceps sine fine. est enim regula verissima q̃ multipliciū & submultiplicium numerorum eadem & similis est proportio. vnde per hanc viam qui vellet procedere: faceret plures series nūerorum quæ essent exempla istarum specierum: sed hæc lectorum ingenio pariter & exertitio describenda relinquimus.

Due eius pprietates.
1. pprietas.
2. pprietas.
Suppartiētis species infinite.
Supbipartiens
Suptripartiens
Supquadripartiēs
Superbipartiētis spēs infinite
Suptripartiētis spēs infinite
Proprietas vnica.
Gñatio numerorum specierū.
Regula verissima.

Caput quartū de multiplici supparticulari & eius spēbus & ꝓprietatibus.

MVLTIPLEX superparticularis ꝓportio est maior numer⁹ cōtinēs minorē totū pluries & vltra vnā tm̄ ei⁹ partē aliquotā vt. 5. ad. 2. nā binari⁹ pluries cō tinetur i qnario: quia bis & remanet adhuc vnitas q̄ est medietas binarii. Similiter se hn̄t. 7. ad. 3. & 9. ad. 4. &c. Hui⁹ gn̄is hæc vna ponitur ꝓprietas ad nonū librū iordani ptinēs. ꝙ multiplices supparticulares cōtinue nascātur ex ipārib⁹ suo ordine a quinario ꝓcedētib⁹. Hui⁹ rō est. quia an̄ quinariū nullus est nūerus talr excedēs suos minores p̄cedētes. post quinariū aūt cōtinue sequūtur ipares talr ꝓportionabiles ad suos iferiores. Diuiditur aūt hoc genus primo p ifinitas spēs ex pte multiplicis variatas q̄ sunt: dupla superparticularis tripla superparticularis &c. q̄ sic diffiniūtur. Dupla superparticularis ꝓportio est nūerus maior cōtinēs minorē totū bis & vnā eius partē aliquotā vt. 5. ad. 2. & 7. ad. 3. &c. Tripla superparticularis est maior nūerus cōtinēs minorē itegrū ter & vnā ei⁹ ptē vt. 7. ad. 2. & 10. ad. 3. &c. Quadrupla suppticlaris ē maior nūe⁹ cōtinēs minorē qter & vnā ei⁹ ptē aliqtā vt. 9. ad. 2. & 13. ad. 3. & 17. ad. 4. & sic cōseqnter diceretur de oībus aliis spēb⁹ subalternis. Quarū q̄lib₃ iterū diuiditur p ifinitas spēs specialissimas variatas ex denoiatōe partis aliquotæ: q̄ ꝓcedūt secūdū naturalē ordinē numerorū vt superius dicebatur i cap. 2. hui⁹ tractat⁹. sic dicēdo. dupla sesquialtera: dupla sesqtertia: dupla sesqquarta &c. Simılr tripla sesquialtera: tripla sesqtertia: tripla sesquiquarta. Itē q̄druple sesquialtera. quadrupla sesquitertia. quadrupla sesquiquarta &c. quarū spērū diffinitiones ex ꝓximo dictis subalternis: & ex diffinitioīb⁹ secūdi cap. nuper allegati facile quis colligere pōt. Generātur aūt siue ieniūtur nūeri oī₃ istarū spērū hac vnica regula obseruata. ꝙ in qualibet spē prin⁹ comes semp est nūerus denoiatiōis partis aliquotæ. quo duplato vel triplato aut quadruplato secūdū exigētiā speciei subalternæ ꝓpositæ: & unitate superaddita: resultat prim⁹ dux talis ꝓportōis. ut dupla sesquialtera ꝓcedit ex binario duplato & unitate apposita. ut. 5. ad. 2. dupla sesquitertia oritur a ternario duplato cū unitate. ut. 7. ad. 3. & sic de aliis spēbus huius subalt̄ni. Simılr tripla sesquialtera fit ex binario triplato cū unitate. ut. 7. ad. 2. tripla sesqtertia ex ternario triplato adiūcta etiā unitate. ut 10. ad. 3 tripla sesquiqrta ex qternario triplato & unitate. ut. 17. ad. 4. & sic de aliis speciebus tā subalt̄nis q̄₃ specialissimis fiat ꝓcess⁹ sine fine. Habitis aūt primis nūeris cuiuslibet ꝓportiōis p̄dictæ p cōtinuā eorū multiplicationē. i. duplationē triplationē &c. iueniētur secūdi nūeri & tertii & q̄rti in eisdē speciebus ꝓportionū. & sic cōseqnter i ifinitū. & poss₃ qui vellet hic formulas istarū ꝓportionū ex dictis facile describere.

Multiplex supparticularis ꝓportio qd sit. Proprietas vnica. Diui⁹ gn̄is species ifinite. Dupla supparticula. Tripla supparticularis. Quadrupla supparticularis. Spēs iste subdiuidūt i alias spēs infinitas. Modus gn̄ationis earū.

Caput quītū de multiplici superpartiente & spēbus & ꝓprietatibus eius.

MVLTIPLEX superpartiēs ꝓportio est nume⁹ maior minorē totū cōtinens pluries & cū hoc plures ei⁹ ptes aliquotas eiusdē denoiatiōis ex quib⁹ nō fit vna ps aliquota. vt. 8. ad. 3. & 11. ad. 4. &c. Hui⁹ gn̄is hæc vnica ꝓprietas est. ꝙ multiplices suppartiētes ab octonario pricipiū habēt deīde p alios nūeros modo pares modo ipares subsequūtur & generātur. Cui⁹ rō est quia an̄ octonariū nul⁹ est dabilis nūerus talē ꝓportionē hn̄s ad aliquē minorē p̄cedentiū: & tm̄ post ip̄m multi & ifiniti sequūtur nūeri i quib⁹ hmōi ꝓportiōes ieniūtur. Diuiditur aūt hoc gen⁹ tripl̄r i spēs. prīo i subalt̄nas ifinitas variatas ex pte mltiplicis. vt dupla suppties tripla suppties q̄druple suppties &c. q̄ sic diffiniūtur. Dupla suppties ꝓportio ē nūe⁹ maior cōtinēs minorē totū bis & plures ptes ei⁹ aliqtas ex qb⁹ nō fiet vna ps aliqta. cōsimilr diceretur de aliis subalternis sequentibus. Secundo diuiditur q̄libet species subalterna per infinitas species variatas ex nūero partiū. vt dupla superbipartiēs. dupla supertripartiens. dupla superquadripartiens &c. Itē tripla supbipartiens. tripla suptripartiens &c. Simılr quadrupla supbipartiēs. quadrupla suptripartiens &c. quarū specierū facile darentur diffinitōes sic Dupla supbipartiens ꝓportio est maior numer⁹ cōtinens minorē bis & duas ei⁹ partes aliquotas nō facientes vnā aliquotā. & si excrescerent tres tales ptes est dupla suptripartiēs & si quatuor: dicitur dupla supquadriptiēs. eodē mō diffinirentur aliæ oēs spēs supradi

Multiplex suppartiēs quid sit. Proprietas eius. Diui⁹ gn̄is spēs ifinite. Dupla suppartiens. Ei⁹ spēs ifinite. Dupla supbipartiens.

Eius spēs ĩfinite.

ſtæ. Tertio quælibet proximo dictarū ſpecierū ſubalternarū diuiditur ꝑ infinitas ſpecia- liſſimas variatas ex denominationibus partium. vt dupla ſuperbipartiens tertias: dupla ſuperbipartiens quintas: dupla ſuperbipartiens ſeptimas; &cetera. Item dupla ſupertri partiens quartas. dupla ſuptripartiēs quintas vel ſeptimas &c. Itē dupla ſupquadriparti ens quītas. vel ſepttimas &c. Simil'r tripla ſupbipartiēs tertias. quītas. vel ſeptimas &c. Itē tri pla ſuptripartiēs quartas. vel quītas &c. Itē tripla ſupq̄driptiēs quītas vel ſeptimas &c. Simil'r q̄drupla ſupbipartiēs tertias. vel quītas. vel ſeptimas &c. Itē quadrupla ſuptripar tiēs quartas vel quītas &c. Itē q̄drupla ſupquadripartiens quītas. vel ſeptimas &c. Quarū ſpecierū diffinitōes facile ex dictis ĩgeniari poſſunt hoc mō. dupla ſupbipartiēs tertias ꝓ- portio eſt numer9 maior cōtinens minorē totū bis & duas partes ei9 q̄ ſūt duæ tertiæ mi noris. vt. 8. ad. 3. & ſi ſint duæ quīte eſſet dupla ſupbipartiens quītas. vt. 12. ad. 5. & ſi duæ ſeptimæ: eſſet dupla ſupbipartiens ſeptimas. vt. 16. ad. 7. &c. Simil'r diffiniretur aliarū ſpecierū p̄denoīatarū vnaq̄q;. Qui aūt vellet ĩuenire cuiuſlibet ſpeciei ex p̄dictis nume ros primos hac vtetatur regula facillima. Cuiuſlibet ꝓportiōis multiplicis ſuppartiētis ĩ ſpecie ſpecialiſſima. prim9 comes eſt numer9 denoīatiōis partiū q ultimo ꝓfertur in illa ſpē: deide ſi ille dupletur aut tripl etur aut q̄drupletur ſcd3 cōditionē ſpeciei ſubalt'næ pri mo diuiſæ: & tertio tot unitates ad dātur quot9 eſt numer9 partiū ſignificat9 ĩ ſpecie ſub alterna ſcdo loco diuiſa: reſultat prim9 dux talis ꝓportiōis. vt ſi ꝓponatur tripla ſupbip- tiēs ſeptimas: prim9 comes eſt. 7. q̄ triplato fiūt. 21. & additis duab9 vnitatib9 cōſtat. 23. q eſt prim9 dux talis ꝓportiōis. & ſic fiat in oīb9 aliis ſpēb9 ſine exceptiōe. & tūc primis il- lis numeris duplatis aut triplatis aut q̄druplatis aut aliter multiplicatis ꝓueniēt ſecūdi & tertii & quarti nūeri in eiſdē ꝓportionib9: & ſic de aliis multis. Vñ pt3 mod9 deſcribēdi formulas iſtarū ſpecierū: ſi qs vellet eas facere. Sed qa multi ſunt ĩpediti & tardi ĩgenio ad faciēdas ſupdictas ꝓportionū formulas: quas arbitrio eorū reliquim9 ĩ cap. p̄cedētibus: decreuim9 hic addere quādā nūerorū formā quadratā q̄ oīb9 aliis formulis & factis & faci endis equaleat: atq; ĩ ea oīm ꝓportionū ĩequalitatis nūeri exēplares valeāt ĩueniri. q̄ ma gna forma p lōgitudinē ſuā a ſiniſtra in dexterā habeat ĩ prima linea naturalē ſeriē nūe- rorū ab vnitate. ſecūda linea ſub ea ĩcipiat a binario p cōtinuā ei9 additionē ꝓcedēs. tertia linea ĩcipiens a ternario cōtinue p additionē ei9 ꝓcedit. quarta per quaternarios. quīta per quinarios &c. donec tot fiant lineæ ſubſcriptæ quot ſunt numeri in prima linea. ſicq; euadet forma quadrata oīm laterū equalium talis.

Tripla ſupbipartiens

Quadrupla ſupbipartiens

Dupla ſupbipartiens tertias.

Mod9 gñationis harū ſpecierum.

Longitudo tabulæ.

Latitudo tabulæ

Exēplares ꝓportionū numeraliū

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	12	18	24	30	36	42	48	54	90	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	190	180	200
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	155	272	289	306	323	340
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	40	60	80	100	120	140	160	150	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

In hac igitur forma quælibet linea ad primã cõparata est ꝓportio multiplex. vt secũda linea ad primã est dupla. tertia tripla. q̃rta q̃drupla. & sic p oẽs spẽs multiplicium ꝓportionũ. Itẽ dimissa prima linea q̃libet aliarũ seq̃ns ad suã ꝓximo p̃cedẽtẽ est supparticularis ꝓportio. vt tertia ad secũdã est sesquialtera. q̃rta ad tertiã sesquitertia. quita ad quartã sesq̃ quarta. & sic deĩde p oẽs spẽs supparticulariũ. Itẽ quita linea ad tertiã. vel septima ad quitã. vel nona ad septimã. & sic cõseq̃ter p oẽs ĩpares: ostẽdent singulas spẽs supbipartiẽtis ꝓportionis. Simil'r septima linea ad quartã. & octaua ad quintã. & decima ad septimã &c. declarãt spẽs suptripartiẽtis. Simil'r nona linea ad quintã. & vndecima ad septimã. & tredecima ad nonã &c. explicãt singulas spẽs superquadripartiẽtis. & sic ꝓcedi põt ad oẽs spẽs tertii generis q̃ est ꝓportio superpartiẽs. Itẽ referẽdo quintã lineã ad secũdã. vl septimã ad tertiã. vel nonã ad quartã. vel vndecimã ad quintã &c. p additionẽ binarii: habebimus oẽs spẽs duplicis supparticularis. Simil'r cõparãdo septimã lineã ad secũdã. vel decimã ad tertiã. vel tredecimã ad quartã &c. p additionẽ ternarii: ĩueniem⁹ oẽs spẽs triplæ superparticularis. Simil'r si cõparemus nonũ ordinẽ ad secũdũ. & tredecimũ ad tertiũ. & decimũseptimũ ad quartũ &c. p additionẽ quaternarii: ostendem⁹ oẽs spẽs quadruplicis superparticularis. & sic cõseq̃ter ꝓcederetur p oẽs spẽs multiplicis superparticularis q̃ erat quartũ gen⁹ ꝓportionis ĩequalitatis. Tãdẽ ad habẽdas singulas spẽs specialissimas quiti generis qđ est multiplex suppartiens. cõparare oportet alias lineas ad alias ĩ p̃dicta forma. nã octaua linea ad tertiã. & vndecima. & quartadecima. & decimaseptima. ad eãdẽ tertiã & sic cõseq̃nter p additionẽ ternarii aliæ multæ: exibẽt nũeros singularũ spẽrũ mľtiplicis superbipartiẽtis tertias. vt duplã. triplã &c. Simil'r si ad quintã lineã duodecima & decimaseptia. & vigesimasecũda: & cæteræ p additionẽ q̃narii referãtur: ostẽdũt oẽs spẽs multiplicis superbipartiẽtis quitas. vt duplã. triplã &c. Simil'r ad quartã lineã referendo vndecimã. & decimãquintã. & decimãnonã &c. per additionẽ quaternarii: habem⁹ singulas spẽs multiplicis supertripartiẽtis quartas. Simil'r si ad quintã lineã tredecima. & decimaoctaua. & vigesima tertia &c. p additionẽ quinarii: erũt oẽs spẽs multiplicis suptripartiẽtis quintas. vt dupla tripla &c. Eodẽ modo si ad septimã lineã decimaseptima: & vigesimaquarta. & trigesima prima &c. per additionẽ septenarii: referãtur ostẽdent singl'as species multiplicis supertripartiẽtis septimas. vt duplam triplam &c. Consimiliter si ad quintam lineam comparemus quartamdecimam. & decimam nonam. & vigesimãquartam &c. per additionem quinarii habebimus singulas species superquadripartiẽtis quintas. vt duplam triplam &c. Itidẽ si ad septimam lineam refferatur decimaoctaua. & vigesima quita. & trigesima secđa &c. p additionẽ septenarii appebũt oẽs spẽs ꝓportõis mľtiplicis supquadripartiẽtis septĩas vt duplã triplã &c. Patet ergo q̃ prædicta numerorũ forma si bene in longũ & latũ augeatur: facile intuentib⁹ demonstrabit oĩm ꝓportionũ etiã specialissimarũ numeros. vnde arguitur maxima ei⁹ vtilitas pariter atq̃ dignitas. quapropter nõ indignũ duximus eius notabiles proprietates hic apponere et sunt numero quinq̃. Prima ꝓprietas q̃ oẽs numeri in hac forma diametraliter aut diagonaliter a primo ãgulo ad tertiũ descendentes sũt numeri quadrati. nã quilibet eorũ resultat ex multiplicatõe duorũ equaliũ adinuicẽ de quib⁹ paulo post dicem⁹. Secũda ꝓprietas. q̃ numeros q̃dratos in hac forma circũdant alii nũeri dicti lõgilateri aut altera pte lõgiores; qui fiũt ex ductu nũerorũ inequaliũ sed ꝓximorũ in naturali ordine ad seipos. Circũdãtes dicũtur numeri positi sub et supra vel dextrorsum et sinistrorsum ad aliquẽ quadratũ. vt circa. 9. sũt 6. et. 12. &c. Tertia ꝓprietas q̃ duplato quotlibet numero quadrato atq̃ superadditis ei duobus circũdantib⁹ longilateris: resultat inde alius numer⁹ quadratus. vt duplato quaternario supadditisq̃ binario et senario longilateris fiunt. 16. qui etiã ẽ quadrat⁹. Quarta ꝓprietas q̃ additis duob⁹ q̃dratis ꝓximis simul cũ duplo lõgilateri cõmunis: iterũ resultat nũer⁹ q̃drat⁹ vt additis simul. 4. et. 9. cũ duplo senarii fiũt. 25. q ẽ numer⁹ quadratus. Quita proprietas q̃ in hac tota forma quadrilatera et ĩ qualibet eius parte quadrata duo ãguli oppositi ĩ seipsos ducti producũt equalẽ sũmã aliis duob⁹ ãgulis oppositis in

Multiplex

Supparticularis

Suppartiens.

Multiplex supparticularis.

Multiplex suppartiens

Supbipartiens.

Supertripartiens.

Superquadripartiens.

Supradicte forme ꝓprietates. 5

1. ꝓprietas

2. ꝓprietas

3. ꝓprietas

4. ꝓprie.

5. ꝓprietas

se ductis vt semel. 400. est idē qd vigesies. 20. & ter. 15. faciūt. 45. sicut nouies. 5. similiter septies. 40. sūt. 280. sicut decies. 28. & sic de aliis multipliciter exēplis. Hactenꝰ igit de oībꝰ generibꝰ & speciebus ꝑportiōis maioris inequalitatis. qbꝰ totidē corepōdēt vt diximꝰ diuersitates minoris īequalitatis: Nā sub multiplicis ꝑportōis spēs sūt sub dupla sub tripla sub q̄drupla & ce. Species subsuꝑticularis sunt subsequialtera subsequitertia subseq q̄rta &c. Species subsuppartiētis ꝑportiōis sūt subsupbipartiēs subsuptripartiēs subsupquadriptiēs &c. Species submltiplicis supparticularis sūt subdupla sesqaltera: sesqtertia; sesquiq̄ta &c. itē subtripla: sesqaltera: sesquistertia &c. itē subq̄drupla sesqaltera sesquitertia &c. Species vno submultiplicis suppartiētis sūt subdupla supbipartiēs suptriptiēs: supq̄dripartiēs & c. itē sub tripla supbipartiēs suptripartiēs &c. itē sub q̄drupla supbipartiēs suptripartiēs supq̄driptiēs &c. & q̄libet istarū specierū diuiditur ad huc ꝑ infinitas secundū varias denoīatiōes partium: sed hæc oīa statim cuilibet nota sunt.

Minoris inequalitatis spēs nominantur.

Caput. 6. de origine proportionum ineq̄litatis ab æqualitate.

Cōparatio proportionum.

POST ꝑmissa cōsideratiōe dignū videtur ōndere quō oēs īequalitatis species ab æqualitatis primordiis ꝑcreātur. noticia. n. cōparatiua specierū alicuius generis post noticiā singularē earūdē multū cōferre solet ad clariorē ipsarū intelligentiā: quēadmodū porphiriꝰ circa ꝑdicabilia fecisse cōperitur: post singulorū declaratiōes addēs quinq̄ ꝑdicabiliū cōparatiōes. Q̄āt oīs inequalitas ab æqualitate ꝑcedat rationabile est. sicut. n. vnitas se habet ad nūeros oēs: sic se habet æq̄litas ad ꝑportiōes oēs: quia aliarū oīm origo est & mr̄. deīde inter genera īequalitatū etiā ordo originis obseruatur. quia īequalitatū pria ē multiplicitas: ex qua īmediate oritur supparticularis: deīde ex superparticulari superpartiēs: itē ex superparticulari multiplex superparticularis. deniq̄ ex superpartiēte multiplex superpartiēs. Sed hoc est itelligēdū obseruato tali ordīe: quod ex prima specie generis ꝑcedētis: ꝑcreatur pria species generis subsequentis. & ex secunda secunda. & ex tertia tertiā. & sic de aliis: quod verū est in oībꝰ generibus ꝑportionū sese cōsequētibus ordine subꝑposito. ergo de prīo ad vltimū per media cōtinue ordinata: ex æqualitate oritur oīs īequalitatis species. Pro ista aūt successione originis ꝑportionū hæc vnica regula & infallibilis sufficere potest. ꝙ descriptis tribus æq̄libꝰ numeris qbuscūq̄ in vna serie: subscribatur nūero primo alius nūerus sibi æq̄lis. deinde sub secūdo superiore scribatur nūerus alius cōpositus ex primo & secundo superioribus deniq̄ sub tertio æqualiū scribatur alius numerus aggregatus ex primo equalium & ex secundo duplato & ex tertio simplici. per talem ergo modum subscribendi ex tribus æqualibus crescūt alii tres in ꝑportione dupla continuati: & ex tribus duplis simili mō subscriptionis: oriūtur alii tres in proportione tripla sese consequentes. & ex tripla quadrupla & sic cōsequenter per oēs multiplices. vt clare ostendere pōt hæc forma.

Ordo proportionum

Origo proportionū ordinata.

1.	1.	1.
1.	2.	4
1.	3.	9.
1.	4.	16

Origo multiplicium.

Similiter permutato ordine numerorū multipliciū: itaq̄ maiores numeri prescribātur minoribus ꝑ eandē artē subscribēdi ex dupla ꝑportōe triū nūerorū cōtinua oritur sesquialtera. & ex tripla sesq̄tertia: & ex q̄drupla sesq̄quarta. & sic ꝑ oēs alias spēs supparticulariū ꝑportionū erit cōtinua gn̄atio ex multiplicibus: vt hic.

Origo superparticularium.

4. 2. 1.	9. 3. 1.	16. 4. 1.
4. 6. 9.	9. 12. 16.	16. 20. 25

Origo superpartientiū.

Item permutato ordine superparticularium proportionum oriūtur suo ordine singulæ spēs superpartiētiū proportionū. vt ex sesquialtera supbipartiēs. & ex sesquitertia suptripartiēs &c. vt ꝑʒ hic

9. 6. 4.	16. 12. 9.	25. 20. 16.
9. 15. 25	16. 28. 49	25. 45. 81.

Origo multiplicium superparticularium.

Eodem modo subscribendi ex superparticularibus non permutatis sed ordine suæ originis descriptis: nascuntur multiplices superparticulares seriatim. vt ex sesquialtera dupla sesquialtera. & ex sesquitertia dupla sesquitertia &c. vt clare ostendit hæc forma.

4. 6. 9.	9. 12. 16.
4. 10. 25	9. 21. 49

Origo multiplicium superpartientium.

Tandē ex superpartiētibus numeris eo ordine quo geniti sunt descriptis: per eādē artē subscribēdo ꝑcedūt multiplices superpartiētes singulas spēs singlis cōparando. itaq̄ ex superbipartiēte nascitur dupla superbipartiens: & ex supertripartiente dupla supertripartiens &c. vt hic per tria exempla.

9. 15. 25.	16. 28. 49.	25. 45. 81.
9. 24. 64	16. 44. 121.	25. 70. 196.

Relinquitur ergo ex dicto processu veram esse regulã supradictam de continua origine proportionum ab equalitate vsq ad vltimam inequalitatem.

Caput. 7. de resolutione oim ꝓportionũ iequaliũ vsq ad equalitatẽ.

QVIA vero sicut in naturalib⁹ ita & i mathematicis ois res ex quib⁹ cõponitur in eadẽ resoluitur: cõseqũes ergo erit oẽm iequalitatẽ p cõtinuas reductiones vsq ad equalitatẽ ꝑducere: quaten⁹ fortiori argumẽto certissimũ relinquam⁹ qđ de primatu equalitatis ad oẽm aliã ꝓportionẽ ꝓlibauimus. Et in hac ꝓportionũ reductiõe eadẽ via eisdẽq passib⁹ sicut ꝓgressi sumus regrediemur. s. vnaquãq iequalitatis ꝓportionẽ ad eã reducẽdo: a qua ꝓcesserat p doctrinã capituli ꝑcedẽtis. hanc vero ꝓportionũ resolutionẽ etiã vnica hac regula cõprehendimus. ꝙ descriptis trib⁹ numeris iequalib⁹ in qualibet ꝓportiõe colligatis: si primo numero subscribatur ali⁹ sibi equalis. & secũdo supponatur residuũ substractiõis primi a secũdo supiore: sub tertio vero numero scribatur ille numerus qui remanet subtractis primo simplici & secundo inferiore duplato a tertio superius descripto: per hanc ergo artem subscribendi proportio dupla reducetur ad equalitatẽ: & tripla ad duplã: & quadrupla ad triplã: vt pȝ hic.

Modus resolutiõis ꝓportionum

De multiplici.

1. 4. 16	1. 3. 9.	1. 2. 4
1. 1. 1.		

In ꝓportionib⁹ vero supparticularib⁹ sesqaltera resoluitur i duplã: & sesqtertia itriplã: & sesquiqrta i qdruplã. vt clare oñdẽt exẽpla supioris cp. reppetita vt hic.

De super particulari

4. 6. 9.	9. 12. 16.
4. 2. 1.	9. 3. 1.

Similiter in proportionibus superpartientibus reducuntur omnes species ordinate ad superparticulares vt superbipartiens ad sesquialteram. supertripartiens ad sesquitertiam & cetere. vt hic.

De suppartiente

9. 15. 25.	16. 28. 49.
9. 6. 4.	16. 12. 9.

Pariformiter multiplices supparticulares resoluũtur ordiate ad supparticulares a quib⁹ oriebãtur. s. dupla sesqaltera: ad sesqui alterã: & dupla sesquitertia ad sesquitertiã: & sic de aliis vt mõstrãt exẽpla sequentia.

De multiplici super particulari

4. 10. 25.	9. 21. 49.	16. 36. 81.
4. 6. 9.	9. 12. 16.	16. 20. 25

Postremo singulæ species multiplicium superpartientium resoluuntur per eandem artem ad species superpartientium a quibus oriebantur. vt dupla superbipartiens ad superbipartientem. & dupla supertripartiens ad supertripartientem & cetera. vt hic.

De multiplici super partiente.

9 24 64	16 44 121
9 15 25	16 28 49

Patet ergo quã vniformiter se habet in proportionibus: siue ꝓgressus ab æqualitate: siue regressus ad eandẽ p grad⁹ medios inter extrema: q̃ sũt pria æqualitas & maxima iequalitas si esset dabilis i nũeris. Quia tamẽ ordo supradictus faciens ꝓportiões multiplices ꝓximiores æqualitati tam i ꝓgressu q̃ i regressu: videtur ratiõi cõtrari⁹: (quia maiores iequalitates sũt multiplices q̃ supparticulares. vt duplã q̃ sesquialtera & tripla q̃ sesqtertia & c. ideo videtur magis ab æqualitate distare ꝙ supparticulares.) ad satisfaciẽdũ huic dubitationi dabim⁹ aliam regulã de origine & resolutiõe ꝓportionũ inequaliũ ad æqlitatẽ: quãtũ ad multiplices & supparticulares dũtaxat: de aliis aũt nõ curabimus. Regula hæc est. ois ꝓportio duorũ extremorũ nũerorũ ad inuicẽ cõponitur ex ꝓportiõib⁹ illorũ extremorũ ad mediũ vel ad media iter eos repperibilia. ideoq illa ꝓportio ẽ maior qualibet istarũ sicut totũ sua parte: ac perinde illa ẽ remotior ab æqualitate q̃ iste partiales. Et quia iter nũeros ꝓportionis multiplicis sẽp est dabile mediũ hñs ꝓportionẽ supparticularẽ vnã vel plures ad nũeros extremos: ideo ꝓportio multiplex resoluitur insup particularẽ tanq̃ in priorẽ se. Modus etiã istius resolutiõis talis est ꝙ ꝓportio dupla (exceptis binario & vnitate) sẽper est resolubilis i duas prias suppticulares q̃ sũt sesquialtera & sesquitertia. quia sẽp iter extrema duple ꝓportionis est dabilis aliquis nũerus medi⁹ ad vnũ extremũ sesquialter & ad aliud sesquitertius. vt inter. 2. & 4. est ternarius sesquialter ad. 2. & subsesquitertius ad. 4. & ita in oĩbus aliis duplis ifallibiliter. In aliis vero multiplicibus q̃libet seqũes species resoluitur in ꝑcedentẽ multiplicẽ & in illã supparticularẽ q̃ a tali multiplici nascitur secundũ regulã ꝑcedẽtis capituli. vt tripla resoluitur in duplã & sesquialterã. & quadrupla in triplã. & sesquitertiam & sic de aliis quia inter oĩa extrema triple ꝓportionis dabi

Dubiũ de ordine ꝓportionum supradicto.

Ali⁹ ordo multipliciũ et supparticulariũ. Prima regula.

2. regula

le est mediū tales ꝓportiões obseruans ad extrema vt inter.3.&.1.ponitur binarius duplus ad vnitatē.& subsequialter ad ternariū.& inter.4.&.1 q̄ sunt extrema q̄druple proportiōis: cadit ternarius triplus ad vnitatē: & subsequitertius ad quaternariū.eodē modo ꝓcederetur in oībus aliis exēplis istarū & aliarū ꝓportionū multipliciū. Hic fecissem⁹ finē tractui de ꝓportiōib⁹ nūeralib⁹ & toti prio nr̄æ itroductiōis arithmeticæ libro: nisi quorūdā musicorū & platonicorū dubitatio frequens absolui posset ex p̄dictis. q̄rūt eni sepi⁹ ꝓposito aliquo numero quot nūeri supparticulares possint cōtinue ad illum se qui in data speciæ illi⁹ generis: vt post binariū quot possunt dari sesquialteri cōtinue se cōsequentes: & post ternarium quot sesquitertii. & post q̄ternariū quot sesquiquarti & c. Hui⁹ questiōis solutio ex doctrina ꝓcedentis capituli pendet vbi dictū est ꝙ ex qualibet spēie ꝓportiōis multiplicis ꝓcedit aliqua species ꝓportiōis supparticularis ordine debito. vt ex dupla sesquialtera.ex tripla sesquitertia.ex q̄drupla sesquiq̄rtia & c. Nūc āt ex illa doctrina duo sequūtur ad p̄missā q̄stionē respōsiua: primū est ꝙ post numerū qui nulli est dupl⁹ null⁹ sequitur sesquialter.quia talis nō habet medietatē. & post numerū qui nulli est tripl⁹ null⁹ datur sesquiterti⁹: eadē ratiōe quia ille nō habet tertiā ptē. & similiter post numerū qui nulli est quadrupl⁹ nō datur aliquis sesquiqnart⁹.& c. Secūdū est ꝙ post aliquē numerū duplū tot sesquialteri cōtinue subsequūtur: quot⁹ ille fuerit inter duplos sup aliquā radicē nō duplā. & tot sesquitertii quotus numer⁹ dat⁹ fuerit īter triplos sup radicē nō triplā. & tot sesquiq̄rti quot⁹ fuerit numerus datus inter quadruplos super radicē nō quadruplā & sic de aliis hmōi nūeris infallibiliter. Vt sup vnitatē q̄ ē radix nulli dupla: prim⁹ dupl⁹ est binari⁹.post quē vn⁹ tātū reperitur sesquialter.s. ternari⁹. scd̄s dupl⁹ est quaternari⁹ cōtinuat⁹ post binariū.ad quē sequūtur duo sesquialteri.s.6.&.9. terti⁹ dupl⁹ est octonari⁹ ad quem sequūtur tres sesquialteri.s.12.18.&.27 & sic de aliis in infinitum. Eodē mō posset quis ꝓcedere in nūeris duplis sup ternariū.sup quinariū. & sup septenariū.& c.q̄ sūt radices nō duplæ. Itē sup vnitatē q̄ nulli ē tripla prim⁹ tripl⁹ est.3.post quē vn⁹ tantū datur sesquiterti⁹.s.4.secund⁹ tripl⁹ est.9.post quē reperiūtur duo sesquitertii.s.12.&.16.terti⁹ tripl⁹ est.27. post quē dabiles sunt tres sesquitertii.s.36.48.&64.& c.in infinitū.eodē mō posset quis ꝓcedere i numeris triplis sup binariū.q̄ternariū.quinariū.& alios qui sunt radices nō triplæ. Item sup vnitatē q̄ nulli est quadrupla prim⁹ quadrupl⁹ est.4.quē sequitur vn⁹ tātū sesquiquart⁹.s.5.scd̄s quadrupl⁹ est.16 qui habet post se duos sesquiquartos.s.20.&.25.terti⁹ quadrupl⁹ est.64.qui post se habet tres sesqquartos.s.80.100&.125.& c.in infinitum.eodem modo posset procedi sup binarium.ternarium.& quinarium.& alios qui sunt radices non quadruple.predictorū sequuntur exempla tria.s.in sesquialteris sesquitertiis & sesquiquartis.

1.	2.	4.	8.
An	3.	6.	12.
i	gla	9.	18.
		res.	27

1.	3.	9.	27.
An	4.	12.	56.
	gula	16.	48.
		res.	64.

1.	4.	16.	64.
An	5.	20.	80.
	gula	25.	100.
		res.	125.

Harū formarū duæ sunt notādæ ꝓprietates. Prima ꝙ qualis ē proportio multiplex numerorūm prime lineę superioris in qualibet figura: talis est & oim aliarū linearū sub ea descriptarū. vt in pria figura est ꝓportio dupla in oib⁹ suis lineis.ī secunda figura ꝓportio tripla.in tertia quadrupla. Secūda ꝓprietas ꝙ nūeri āgulares in qualibet dictarū figurarū hn̄t sola vnitate maiorē multiplicitatē q̄̄ nūeri linearū p̄dictarū. vt angulares prime figure sunt tripli.in secūda quadrupli.in tertia quītupli.& sic de aliis oībus. Satis ergo fuerit ex pleno discursu oīū ꝓportionū nūeraliū (qui oēs sūt termini de p̄dicamēto ad aliquid sub illo genere sub alterno qd̄ alias īposuim⁹ sic dictū ad aliquid scd̄m quātitatē & in duas species æquale & inæquale stati diuisim⁹) ꝑuenisse vsq; ad cōtinuationē pluriū ꝓportionum eiusdē speciei in trib⁹ aut quattuor aut plurib⁹ numeris sese cōsequētib⁹.q̄ cōtinuatio ꝓportionalitas appellatur.de qua & specieb⁹ suis ac ꝓprietatib⁹ in sequēti libro secūdo dicturi sum⁹. Sed in fine hui⁹ libri primi.(ne doctrina ista de ꝓportiōibus videatur oino arida & inutilis:) cōmēorabimus ea q̄ sanctus augustin⁹ pictagoricā simul & platonicā

Incidēs ad ꝓpositum.

Questio

Solutio.

1.regula.

2.regula

1.exēplum

2.exēplum

Horū ꝓprietates.2.

1.ꝓpriā.

2.ꝓpriā.

Epilogus.

Digressio notanda.

imaginationē sequens i diuino illo opusculo suo de vera de religiōe secreta philosophica pandit: dicens auctoritate hilarii ꝙ i patre est vnitas: in filio æqualitas: & in spiritu sancto vnitatis æqualitatisq connexio: in creaturis autem oib9 inæqualitas. In æqualitatūq; va rie species reperiuntur: quia solus dei filius cū spiritu sancto ab vtroq; ꝓcedente sic geni tus est a patre suo: vt esset vera & ꝓpria imago iuisibilis dei primogenit9 ante oēm creatu ram: vt Paulus apostolus dicit: est eni i splēdor patris & figura substātiæ eius adæquans pa ternā pfectionē i omnib9 essentialib9 perfectiōib9. quibus duob9 per oia etiā similis ē spi ritus sctūs adequās sui pricipii a quo ꝓcedit pfectionē. ideo nimirū ponitur vnitatis æq̄ litatisq; cōnexio: diciturq; nexus āborū se ꝓducentiū. Creaturæ vero sic pticipāt diuinas pfectiōes: ꝙ nō adequātur psonis diuinis a quib9 ꝓcesserūt: sed lōge ab eis distāt inequa liter. vnde nō imagines sed vestigia diuinæ triniattis esse dicūtur. & si quādo nomē ima ginis sacræ litteræ ad creaturas trāsferūt: in obliquo nō in recto illud ponūt ad significā dā. s. inæqualitatē. tale est illud genesis primo faciam9 hoiem ad imaginā & similitudinē nr̄am. & illud ezechielis de āgelo apostatāte a deo: tu signaculū similitudis iquit dei. &c. Et sicut imaginatōe pictagorica eēntiæ creaturarū speciebꝰ nūerorū assimilate sunt: quia gradati i suis pfectiōib9 ꝓcedūt: sic eadē via speciebus īæqualitatū diuersis cōparari pos sūt: quarū q̄dā ꝓpius aliæ vero remoti9 accedūt ad æqualitatē diuinarū psonarū. semp ta mē (vt aurelius ibidē doctor ꝓsequitur) creaturarū iæqualitas ad diuinā æqualitatē quā tū est possibile nititur tendere. vt pote quia oīs ista iæqualitas ab illa sūma æqualitate ꝓ cessit: ideo nimirū si in eadē sit iterū resolubilis: quia vniuersa ꝓpter semetipsū oparat9 est de9. Hic fit ꝙ hoibus ex inclinatiōe naturali cōuenit vt nihil placeat iu creaturis: quod nō aliquomō imitetur illā sūmā æqualitatē q̄ est dei filius: quo verbo dei facta sunt omia. Et adducit angu. ibi exēplū de fenestris arcualib9 q̄ si duæ solæ inæquales iuxta se ipsas posite sint: stati intuitū aspicientiū offendūt displicentq; hoibus: ꝓpter deffectū æquali tatis q̄ nulla est. si vero tres tales vel plures fenestræ simul ponātur gradati iæquales: vel duæ laterales miores iuxta mediā maiorē: stati placet illa structura fenestrarū: quia ibi est aliquod vestigiū æqualitatis. Nā inter fenestras inæquales sunt ꝓportiōes æquales. s. re latis extremis ad mediā. Hoc inquit nullus artificū quātūcūq; ingeniosus aduertit in edi ficiis talibus: quia decūbit iclinatis ad terrā oculis: nec vnde res pendeat e cœlo videt: sed tanū si ꝑcōtetur respōdet: sic deberi fieri fenestras: quia sic habet ratio artis hædificato ris & nō aliter: & si c hædificia pulcra sunt & nō aliter: ideo sic facta placēt & aliter facta dis plicent. Multaq; alia notatu dignissima in p̄dicto opusculo ad ꝓportiōes & formas nūe rorū pertinētia sctissim9 ille vir diuinitate plen9 latissime ꝓsequitur. vnde conueniens est vt ad foras numerorū & ad ꝓportionalitates trāseam9. Primi libri arithmeticæ finis.

Pater de vnita e. Fili9 equa litas. Sp̄s san ctus cōne xio vel pro portionali tas. Creatura inequalitas. Diuersi gra dus creatu rarum. Creaturæ inequalitas est a diuina e[q]ualitate ad eāq; reduci tur. Exēplū de fenestris in equalibus.

Conclusio primi libri arithmeti ces.

Liber secundus itroductiōis arithmetice de formis

nūeralib9 atq; de ꝓportionalitatib9 eorū. habet igr̄ duos tractat9 sicut p̄cedens liber.

Tractatus primus de numeris habentibus similitudinē figurarū geometricarū quæ propriæ formæ numerorum dicuntur. habet capita tria.

Caput primum de numeris linealibus & superficialibus.

Quantitas discreta uel numerus licet variā ra tionē habeat a continua quātitate: sitq; genus subalternū quātitatis ab ea distinctū: hæc tñ duo genera hn̄t magnā iter se cōuenientiā in multis ꝓprietatib9 vt in ꝓportiōib9: ꝓportionalitatib9: diuisiōib9: partibus ali quotis & aliis mltis q̄ tñ nō æque prio mltitudini & magnitudini cōueni unt: sed prius pfectius & simplicius multitudini: deide p attributionem ad eā cōuenire ꝓbātur magnitudini. s. secūdū aliquā rōnē nūeralē. Horū oim argumentū clarissimū ē figura que vtrisq; quātitatib9 cōis ē. nā & numeri æque atq; supficies & cor pora figurabiles sunt: sed nūeri puri9 & simplici9: nā eūdem nūerū cōtingit simul linea lē superficialē & solidū esse: imo circularē & quadratū cubicū & sphericū vt. 64 q̄ oia nul

Cōparatio vtriusq; quā titatis.

Figura ꝓ prietas com munis ca[p]

la eadē superficies nullūq; idē corp9 simul hēc pōt. Igitur postq̄ de aliis ꝓprietatib9 tū ab solutis tū relatiuis dictū est: cōsequēs erit vt etiā de figuris numerorū disseram9. Sed discretiōis grā has cōditiōes ī nūeris formas vocabim9: ī magnitudinib9 vero figuras. ad hūc em̄ sensū verissime exponitur q̄rta spēs ꝑdicamēti q̄litatis apud aristotelē: q eā disiūcto vocabulo formā vel figurā appellauit. p formā numeralē descriptionē significās: p figurā vero magnitudinis teriationē. vñ rōne pri9 dicta formā ꝑtulit figuræ. Est igitur forma numeri talis dispositio vel nūer9 talr̄ disposit9: vt figuræ geometricæ similitudinē gerat. vt qñ aliquis nūer9 vocatur triāgularis q̄drāgularis aut circlaris &c. vñ cōstat oēs tales terminos ad quartā spēm q̄litatis ꝑtinere: & ꝓprias passiōes eē nūerorū: quorū gña & spēs sunt de ꝑdicamēto quātitatis. nā in hac ꝑdicatiōe ternari9 est triāgulus. nouenari9 est quadratus. vigesim9 quītus est circul9. & sic de aliis. ꝑdicatur ꝓpriū ꝑdicabile de suo subiecto

Quarta species qualitatis est forma vel figura.

Forma numeralis qd sit.

Numeralis formæ tria sūt gña subalterna hæc. forma linealis. superficialis. & solida. & q̄a in his sicut in superiorib9 cōcretū & abstractū sinonima sunt: has formas diffiniētes dicimus. Linealis nūerus est qui ab vnitate exordiū sumēs: p cōtinuā vnitatis additionē ꝓcedit crescēdo. & talis est ois nūerus siue par siue ipar. vt. 2. 3. 4. Dicitur aūt linealis nūerus ad similitudinē lineæ geometricæ: q̄ imaginariæ lic3 nō realr̄ dicitur fieri ex cōtinuo fluxu pūcti: sic & nūeri singuli ex cōtinuo fluxu vnitatis resultāt. Et debēt scribi nūeri lineales p singulas vnitates suas ī vna serie dispositas ad modū lineæ. itaq; tot pūctis scribatur nūerus quilibet linealis quot vnitates habet: nō aūt tot9 nūerus simul vno solo caractere vt hacten9 fiebat: vt binari9 sic .. ternari9 sic ... quaternari9 sic .... Iste enī ē naturalis modus scribēdi nūeros; nā illos caracteres nūerales ars hūana iuenit nō natura. Hui9 primi generis formæ nūeralis īfinitæ sūt spēs tot. s. quot positæ sūt spēs specialissimæ nūerorū. & noiantur sic. linealis duarū vnitatū. linealis triū vnitatū. linealis quattuor vnitatū &c. sed de his satis: quia sicut apd geometras linea quātūcūq; teriata suis extremis nō dicitur figura neq; ei9 ꝓprietates demōstrāt: sic apud arithmeticos parua est cura de nūeris linealib9 nullasq; eorū ꝓprietates demōstrāt.

Formæ species tres

Linealis forma qd sit

Quare dicta sit linealis.

Formæ lineæ alie spēs infinite

Superficialis nūerus est qui p suas vnitates ī plana superficie descript9 lōgitudinē & latitudinē h3: vt senari9 sic scripi9 : : : Et sicut ī geometria ex fluxu lineæ ī seipam vel in aliā imaginatur fieri sup̄ficies: vt h3 Euclides in secūdo libro: sic ī arithmetica ex ductu vel ex additiōe nūeri linealis ad seipm̄ vel ad aliū numerū linealē ꝓducitur nūerus sup̄ficialis. vt ducto binario in seipm̄ ꝓducitur quaternari9: nā bisduo sūt quattuor qui est nūer9 sup̄ficialis. similr̄ addito binario ad ternariū fit quinari9 superficialis numer9. ducto etiā binario ī ternariū ꝓducitur senari9 sup̄ficialis nūerus. & sic de aliis. Vñ p3 rō quare talis forma nūeri dicatur sup̄ficialis. tū quia ꝓducitur ex lineali ad linealē vt sup̄ficies ī geometria. tū quia p suas vnitates descript9 lōgitudinē & latitudinē exhib3 admodū superficiei geometricæ s3 altitudinē nō h3 de qua in nūeris solidis dicem9. Diuiditur aūt superficialis aut plan9 nūerus p īfinitas spēs a ternario initiū sumētes. hæ sunt: triāgularis: quadrangularis: pētagon9: exagon9 &c. & tādē circularis nūerus. Binarius em̄ nō pōt eē nūerus sup̄ficialis: tū quia ex solo fluxu vnitatis ꝓcedit admodū lineæ. tū quia quomodocūq; scribātur suæ vnitates p singula pūcta: solā lōgitudinē h3 & nullā latitudinē.

Superficialis forma qd sit

Forme superficialis spēs infinite

Triāgularis nūerus ē qui p suas vnitates certo mō descript9 ī plano tria latera eq̄lia mōstrat: vt hic .·. Hui9 gñis etiā sūt īfinitæ spēs: q̄ sic noiāt triāgulus hñs vnā unitatē in quolibet latere. triāgul9 hñs duas unitates in quolibet latere deīde tres & quatuor &c p naturalē seriē numerorū. q̄ oēs spēs facile iueniētur p cōtinuā additionē nūerorū naturalis ordinis nullo dimisso. Vñ prim9 triangulorū est unitas nō quidē realr̄ & in actu (cū ipa nō sit nūerus sup̄ficialis: īmo neq; linealis: sed solū pūctualis) sed est triāgulus solū in potētia: & eadē rōne in oim formarū superficialiū gñib9 ipa unitas primū locū obtinebit: uocabiturq; prim9 quadrat9 prim9 pētagon9 &c. hñs. s. unā vnitatē in quolibet latere. dimisso ergo hoc primo triāgulo. Secūdus est ternari9 ꝓduct9 ex aggregatiōe vnitatis & binarii: vñ & duas vnitates h3 ī quolibet latere. Terti9 est senarius ꝑdictis duob9 addēs ternariū. & tres vnitates hñs ī quolibet latere. Quartus est dena

Triāgularis forma qd

Triangularis forme species.

Inuentionu merorū huius formæ

eius p additionē q̄ternarii ad p̄cedētes: h3 q̄ q̄tuor unitates ī q̄libet latere. &sic de aliis. Quadrāgularis nūer9 ē q p suas vnitates sparsi descript9 q̄tuor lat̄a on̄dit: vt : : Hui9 gn̄is sūt duæ spēs subalternæ p̄cipue: sc3 nūer9 q̄drat9 & nūer9 altera pte lōgior: q̄drat9 nūer9 est qui oīa q̄tuor latera eq̄lia h3. & diuidit p īfinitas spēs sicut & triāgul9 variatas ex nūero unitatū q̄ sūt in quolibet latere. s. vna. duæ. tres. q̄tuor &c. Altera pte lōgior nūer9 est qui nō h3 oīa latera eq̄lia s3 lōgitudinē h3 latitudine maiorē. & si sit excessus ī sola vnitate dr̄ nūer9 alt̄a pte lōgior: vt : : : coq alterū dr̄ de duob9 quorū vnū imediate sequitur ad aliud: si aūt ī duab9 aut plurib9 unitatib9 sit laterū dr̄ia: dr̄ ātelōgior. i. valde lōgior: estq̄ for̄a irregularis de q̄ arithmetici nō curāt. Generātur aūt nūeri quadrati oēs ex naturali serie nūerorū p additionē vno ī terscalariter dimisso cōtinue. vt vnitas ē prim9 q̄drat9. 1. ī potētia. cui si addatur ternari9 fiūt 4. secūd9 q̄drat9: hn̄s duas vnitates ī q̄lib3 latere. deide addito q̄nario fiūt. 9. terti9 q̄drat9 triumq̄ vnitatū ī q̄libet latere. & sic cōseq̄nter p alios q̄dratos de quib9 supi9 data ē alia regl̄a gn̄atiōis eorū p multiplicationē cuiuslib3 nūeri ī seip̄m. vbi etiā nūeros altera pte lōgiores: q̄s vocabam9 lōgilateros: p m̄ltiplicationē nūerorū p̄ximorū ī naturali ordine īuenire docuim9. Pentagon9 vl̄ quīquāgulus nūer9 est q supficiali descriptiōe p singulss vnitates ī plano descript9 quīq̄ latera eq̄lia cōtinet. eiusq̄ spēs īfinitæ gn̄antur p additionē ex naturali serie nūerorū cōtinue duob9 dimissis. vt addita vnitate ad quaternariū fiūt. 5. nūer9 pētagon9 quib9 si addātur septē fiūt. 12. terti9 pētagon9: & sic de aliis. Exagon9 vl̄ sexāgul9 nūer9 est qui eodē mō vt supiores descript9 sex eq̄lia latera exhibet. Gn̄anturq̄ ei9 spēs ex naturali serie nūerorū trib9 dimissis. epragoni q̄tuor dimissis. octogoni quīq̄ dimissis &c. Circularis nūer9 est q ex aliquo nūero ī seip̄m ducto p̄duct9: in eūdē nūerū desint a q̄ p̄ducebatur. & se h3 admodū circuli ī geometria cui9 finis reddit ad pricipiū. tales nūeri ex q̄nario & senario

Quadrāgularis for̄ma q̄d sit.
Quadrati for̄ma.
Altera pte longior.
Inuētio q̄dratorū nūerorū p additionem
Inuētio altera pte lō
Pētagona for̄a q̄d sit
Exagona for̄a q̄d sit.
Circularis for̄a q̄d.

Triāguli. 1. 3 6. 10. 15. 21. 28. solū oriūtur vt. 25. &. 36. Seq̄tur descriptio oīū istarū spērū sil̄r.
Quadrati. 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. Sūt aūt p̄dictarū spērū for̄æ supficial̄ nūerorū p̄prietates
Alt̄a pte lōgiores. 2. 6. 12. 20. 30. multæ: s3 earū notabiliores hæ sūt. Pr̄ia ē q̄ merito oīū
Pētagoni. 1. 5. 12. 22. 35. 51. spērū istarū triāgularis nūer9 ē pr̄ia quia gn̄atiōib9 & resolu-
Exagoni. 1. 6. 15. 28. 45. 66 tōib9 aliarū sempest necessari9. nā oēs for̄æ nūerorū sibi p̄xie
Eptagoni. 1. 7. 18. 34. 55. &c. si primū prīo & secūdū sc̄do: & sic deiceps nūeros cōparaue-
Circularis nūeri. 1. 25. 36. ris: triāgularib9 nūeris sese superant. ergo ex triāgulis gn̄antur

Supficiali[u]m formarū p̄prietates
1. p̄prietas

ī triāgulosq̄ resoluūtur. vt prim9 triāgul9 ternari9 differt a prīo quadrato p vnitatē q̄ ē triāgulus. & secūd9 triāgulus senari9 differt a sc̄do quadrato nouenario p ternariū q̄ ē triāgul9 & terti9 triāgulus. s. 10. supatur a tertio q̄drato. 16. p senariū q̄ est triāgulus: & sic de aliis seq̄ntib9. Eadē cōpatio erit iter primū quadratū & primū pētagonū. iter s3 & s̄m. iter tertiū & tertiū: & sic de aliis: q̄a eisdē triāgulis differūt. s. vnitate. ternario. senārio &c. Simil̄r p̄nt cōpari pētagoni ad exagonos. & illi ad eptagonos. & sic de aliis. Sicut etiā ī geometria triāgulus est pr̄ia figurarū supficialiū excepto circulo: q̄a duæ rectæ lineæ q̄tūcūq̄ applicatæ ad āgulū nō pficiūt figurā. vn̄ oēs aliæ figuræ geometricæ ex triāgulis fiūt ī triāgulosq̄ resoluūtur: vt alias videri h3. Scd̄a p̄prietas q̄ q̄lib3 for̄a nūeri supficialis p additionē nūerorū naturalis ordinis comō q̄ p̄diximus gn̄ata: tot vnitates h3 ī q̄libet latere suæ descriptiōis ex quot nūeris aggregatis gn̄ata est. vt ternarius aggregatur ex vnitate & binario. iō duas vnitates h3 ī quolibet latere triāgulari. senarius seq̄ns tres vnitates q̄a ex tribus aggregatur. s. vnitate binario & ternario. & sic de aliis. Eadē rō est de quadratis: nā q̄ternarius h3 duas vnitates ī quolib3 latere: q̄a ex duobus nūeris aggregatur. vnitate. s. & ternario. nouenarius h3 tres: q̄a tres nūeros aggregat ī sua gn̄atōe supaddēs duobus primis q̄nariū. Pariformit̄ se h̄nt nūeri pētagoni ī suis lateribus. nā q̄narius aggregatus ex vno & q̄tuor duas vnitates h3 ī quolibet latere. duodecimus tres vnitates: & sic de aliis. Tertia p̄prietas: si quadratus quadratū multiplicet nūerū: p̄ductus nūerus sēp est q̄dratus. maior tn̄ & alius ab eis: vt nouē quater sūt. 36. & sic de aliis. Quarta p̄prietas. si nūerus altera pte lōgior aliū altera pte lōgiorē multiplicet. tertius altera pte lōgior ide p̄creatur. vt bis sex. sunt. 12. & sic de aliis. Quīta p̄prietas q̄ si q̄dratus multiplicet altera pte lōgiorē vel ecōtra: p̄duct9 numerus: neq̄ ē quadratus neq̄ altera pte lōgior: vt bis quatuor. 8. & sic de aliis. Sexta p̄prietas q̄ oīs quadratus ex duobus sibi p̄xi[m]is

2. p̄prietas
3. p̄prietas
4. p̄p̄ie.
5. p̄prietas
6. p̄prietas

suprapositis triãgulis simil additis gñatur.vt qternari9 ex vnitate & ternario:nouenari9 ex 3.&.6.pariter.16.ex.6.&.10.Eadẽ rõne ois pẽtagon9 ex duob9 eñ pximo pcedẽtib9nũeris gñatur altero triãgulo & altero qdrato:vt.5.ex.1.&.4.Simil'r.12.ex.3.&.9.Eadẽ lege exagon9 ois ex triãgulo & pẽtagono.oisqꝫ eptagon9 ex altero trigono alteroqꝫ exagono pcedit:& sic de aliis.quo fit vt oẽs forẽ superficiales extrigonis cõsurgere:& in eosdẽ resolui facilime dephẽdãtur qđ nõ solũ ad pitagoricã:sed etiã ad platonicã doctrinã itelligẽdã magni esse momenti reputatur ab oib9 doctis.hacten9 igitur de nũeris superficialib9.

Caput secundũ de numeris solidis vel corporeis.

Solida forma qđ sit.

SOlidus nũer9 siue corpore9 est q sparsim p suas vnitates descript9 lõgitudinẽ:latitudinẽ:& altitudinẽ(q̃ crassitudo vel pfũditas appellatur)hẽre vr:trinaqꝫ distẽditur dimẽsiõe.Qđ vt facili9itelligatur:reppetam9imaginationẽ geometricã de imagiaria descriptõe vl pductõe cõtinui ex idiuisibilib9.q̃ licet i re nulla sit:vtilis ẽ tñ imaginatio illa ad multa rectius itelligẽda.nec pptere a sciẽtiæ mathematicæ sũt deceptorie imaginãtes qđ nõ est.qa vt aristoteles h3.2.phisicorũ abstrahẽtiũ nõ ẽ mẽdaciũ.sicut ergo ex fluxu pũcti lineã:& ex fluxu lineæ supficiẽ descripsim9 tã in discretis q̃ i cõtinuis:sili imaginatiõe ex fluxu supficiei crassitudinẽ & corpulẽtiã describere poterim9:vt Euclides facũdissime docet i.11.libro suæ geometriæ.si ergo supficialẽ nũerũ aliquẽ ad seipm vl ad aliũ aut addiderim9aut mltiplicauerim9:solidũ nũerũ ide cõstituem9.vt bis qtuor sũt.8.q est nũer9solid9:&sic de aliis.recti9 tñ imaginatio solidorũ nũerorũ multiplicatõe q̃ additiõe cõcipitur:multiplicatõe inq̃ duplicata:i q̃ tres nũeri pferãtur:quorũ prior lõgitudinẽ.seq̃es latitudinẽ:terti9 vero pfũditatẽ exhibet.vt bis duo bis sũt.8.nũer9 solid9 hñs duas vnitates in lõgũ &totidẽ in latũ vt hic : : q̃ figura qdrata si iterũ p imaginationẽ describatur i altũ:habebit nũer9 ille etiã duas vnitates in pfundũ:eritqꝫ totus nũer9.8.vnitates q̃s dicim9 bis duo bis:qa duas vnitates bis i plano describẽtes p duas lineas fecim9 qternariũ:q bis descripto i pfundũ:cõstitut9 est octonari9:eadẽ rõ est de istis bis duo ter.bis tria ter.ter tria qter.& sic de aliis.Nũeri solidi innũeræ sunt spẽs:neqꝫ a nobis oẽs explicabiles.sunt eñ q̃dã nũeri piramidales.alii cubi. alii asseres:alii cunei.alii laterculi.alii paralellipidi:vl vt alii dicũt parallelepipedi &c.&tãdẽ numeri spherici.Harũ oĩm spẽrũ sola pria additõe nũerorũ& diffinit& pcreatur:aliæ vero oẽs replicata vt dixim9 multiplicatiõe.Piramidalis nũer9est solid9 q̃ ex aggregatõe pluriũ supficialiũ nũerorũ eiusdẽ spẽi resultat.vt ex plurib9triãgularib9nũeris fit vna piramis. simil'r ex plurib9 qdratis:aut ex plurib9 pẽtagonis naturali serie dispositis.vñ eliciũtur duo certissima.Primũ q nũerorũ piramidaliũ sunt ifinitæ spẽs variate iuxta spẽs nũerorũ supficialiũ.s.piramis trilatera q̃ fit ex triãgulis.quadrilatera ex quadrãgulis.pẽtilatera ex qnquãgulis &c.Scđm est facilis mod9 gñatiõis aut iuẽtiõis nũerorũ istarũ spẽrũ q̃ fiũt p additionẽ superficialiũ q̃s oẽs iã nouim9.Sed piramis ita se h3 iter nũeros solidos sicut se habebat triãgulus iter nũeros supficiales:qa ipa est pricipiũ oi3 solidarũ formarũ.debetqꝫ i ei9 descriptiõe fieri talis imaginatio q vnitas ponatur suspẽsa i aere.deĩde sub ea etiã i aere ponatur ternarius.sub q̃ tertio ponatur senari9.& sic cõseq̃ter p oẽs numeros triãgulares descẽdẽdo.ex eis oĩbus resultabit vna piramis trilatera magna vl parua ſm q plures vel pauciores triãgulos aggregat i sua cõpositiõe:cuius piramidis ãgulus est vnitas:basis vero ẽ vltimus triãgulorũ sub ea positorũ.Eodẽ mõ ẽ describẽda piramis q̃drilatera si subvnitate cõseq̃nt ponãt q̃drati nũeri.&piramis pẽtilatera subvnitate aggregat nũeros pẽtagonos.&sic de aliis.vt hic.

Imaginatio solide forme — *Forme solide spẽs* — *Forma piramidalis qđ* — *Spẽs eius infinite* — *Descriptio forme piramidalis*

Trianguli. 1.3.6.10.15. Piramides trilatere. 1.4.10.20.35.
Quadrãgli.1.4.9.16.25. Piramides q̃drila. 1.5.14.30.55.
Pentagoni.1.5.12.22.35. Piramides pẽti. 1.6.18.40.75.

Piramidũ pprietas.

Est autẽ oĩm piramidaliu3 hæc pprietas q vna q̃qꝫ pramis tot vnitates h3 i quolib3 latere suæ altitudinis ex quot supficialibus numeris aggregatur.vt trilatera piramis q̃ est.4. h3 duas vnitates in altitudine.decẽ h3 tres vnitates &c. Simil'r quadrilatera piramis.5.h3 duas vnitates in altitudine.14.habet tres vnitates &c. Eodẽ mõ pẽtilatera piramis.6.habet duas vnitates.18.tres vnitates i quolibet latere suæ altitudinis:& sic de aliis.Scire etiã oportet q sunt q̃dã piramides itegræ:aliæ vero curtæ vl truncatæ quas græci coluros appellãt.Integræ piramides sunt quas prius descripsimus.sed curtæ dicerẽtur si ex pte ãguli piramidis auferrẽtur

Quid integra & qđ curta piramis

aliqui numeri superficiales pertinētes ad eius integritatē. Et tunc si sola vnitas suprema auferatur: dicitur curta piramis: si aūt etiā auferatur primus numerus superficialis sub vnitate posit9: vocatur biscurta piramis. Et si adhuc auferatur ali9 sequēs superficialis: vocabitur tricurta piramis et sic cōsequenter. Et hoc verū est in oib9 speciebus piramidaliū nūerorū de quibus iā satis. Cubicus numerus est qui ex duplicata multiplicatione alicuius nūeri p seipm consurgit. vel clari9 si in replicata multiplicatione tres numeri equales pferātur vt bis duo bis sunt. 8. ter tria ter sunt. 27. et sic de aliis. Hui9 formæ prima pprietas est q qlibet cub9 hꝫ sex superficies equales. octo angulos solidos. et duodecī lineas siue latera eqlia. quomodo aūt debeat imaginari hui9 formæ et aliarū sequentiū corpulētia vel altitudo q̄ ē tertia dimēsio: superi9 in principio hui9 cap. declarauim9. Scda pprietas q si cubic9 nūer9 se vel aliū cubicū multiplicet. semp inde pducitur cubic9 maior eis. nā octies: 27. sunt. 216 qui etiā est numerus cubus ex trib9 senariis replicata multiplicatione pcedens. vt dicēdo sexies sex sexies. Cune9 numer9 oppositas cōditiones hꝫ ad cubicū. quia omnes tres dimēsiones habet inequales: fitq ex replicata multiplicatione triū numerorū inequaliū. vt si dicerem sexies quatuor bis sunt. 48. vel sic. quinquies quatuor ter sunt. 60. Iste numerus a græcis vocatur scalenos quod latine est gradatus. dicitur etiā spernïscon. i. cune9 ad modū illi9 corporis cui9 longitudo est maior latitudine. latitudoq maior altitudine. Asser numerus est ad modū corporis serratilis quod vocatur tabula erecta in altum: producitur q ex replicata multiplicatione triū inequaliū: sed aliter q̄ cuneus. nā in assere longitudo est minor latitudine: et latitudo minor altitudine. vt dicendo bis tria quater sunt. 24. aut bisquatuor quinquies. sunt. 40. &c. Laterculus numerus describitur admodū lateris quadrati cuius longitudo et latitudo equales sunt sed altitudo minor eis. vt dicendo ter tria bis sūt. 18. vel quater quatuor bis sunt. 32. &c. Parallelipidus nūerus est admodū colūnæ quadratæ cuius longitudine et latitudine equalibus altitudo maior est: vt si di dicam bis duo sexies. sūt 24. vl ter tria octies sunt. 72. &c. Præter has formas solidas sunt aliæ plurimæ species figuræ laterata tum regulares tum irregulares: de quibus non est modo dicendū per singula: sed ex geometria sunt requirendæ. Sphericus numerus est cubicus talis. qui admodū sphere terminatur in numerum illum ex cuius multiplicatione processit: sicut et de circularib9 dicebamus. vt quinquies quinq quinquies. sunt. 125. vel sexies sex sexies. sunt. 216. et preter hos vix alii reperientur: nisi vellet quis vnitatem et circularem et sphericum numerū appellare: quia per omnem multiplicationem reddit ad seipam. vt dicendo semel vnum. uel semel vnum semel: quidam etiam dicunt q. 64. est numerus sphericus quia a quaternario cubica multiplicatione procedens ad quaternarium terminatur. sed apud arithmeticos non consueuit numerus sphericus appellari: nisi ille cuius quadratus etiam fuit circularis. hoc autem non habet prædicti numeri quadratus qui est. 16. incipiens a quaternario et ternarius in senarium.

Cubica forma qd sit.
Cubice forme pprietates due.
Prima
2. pprietas
Cune9 nūerus qd sit.
Asser nūerus qd sit
Latercul9 quid est.
Parallelipid9 qd sit
Spherica forma nūerorū qd est

Caput tertium de comparatione quadratorū et altera parte longiorum numerorum.

DE FORMIS ergo numerorū tam multiplicibus satis dictum fuisse putaremus: et finē huic tractatui faceremus: nisi quia boetius ex numeris quadratis et altera pte lōgioribus magnum facit in philosophicis theorematibus sacramētū. Ideo ne diuina ei9 imaginatio inutilis videatur a nobis reputata: breuibus eā hic colligem9 verbis. In primis ānotātes nūerorū quadratorū et altera pte lōgiorū hāc notabilē differētiā: si nō ex multiplicatōe vt oli: sꝫ ex additōe nūerorū eos voluerm9 sgnare: q q̄drati nūeri ex naturali serie ipariū: sꝫ altera pte lōgiores ex nūeris parib9 seriati ordinatis cōtinua additiōe pcreātur: vt ptꝫ hic.

Differētia istarū forma rū one. pma

Impares. 1.3.5.7.9.11.13. Pares. 2.4.6. 8. 10. 12. Ideo numeri quadrati ex ipa

Scda dfia

Quadrati.1.4.9.16.25.36.Alta pte lõgi.2.6.12.20.30.42. ribus ꝓcreati: quorũ vnitas prima radix est & imutabilis naturæ: oĩa latera equalia habent. sed altera parte lõgiores ex paribus ortũ habẽtes: quorũ binari9 primus est & mutabilis naturæ: latera inequalia hñt.

Unitas est naturæ imu tabilis. Binari9 est alteritatis principium

Immutabilitas aũt vnitatis ex hoc ostenditur ꝙ quicquid ipsa multiplicet prior quãtitas nõ mutatur. vt semel vnus est vnus. semel duo sunt duo. semel tria sunt tria &c. Mutabilitas aũt binarii eodẽ mõ ꝓbatur quia in quẽcũqȝ numerũ ipse ducatur prior quãtitas mutatur & alia ꝓducitur. vt bis duo sunt quatuor. bis tria sunt sex &c. eadẽ ratio est de oĩbus aliis nu meris post binariũ. Nimirũ ergo si binarius alteritatis principiũ dicatur a philosophis: tũ quia est primus numerus qui ab vnitate recedit. tũ etiã quia est primus eorũ qui sua multi plicatione numerorũ alteritatẽ causant. Ergo ex iuariabilitate vnitatis prouenit ꝙ quadra ti numeri iparitatis naturã habentes: oĩa latera habeant equalia & vniformia. sed ex varia bilitate binarii ꝓcedit ꝙ altera parte longiores numeri paritatis naturã habentes latera ha beant inequalia & difformia vt dictũ est. Patet etiã tetragonos numeros participare natu ram ĩparium: quia facta cõtinuatione duplorũ in vna serie vt. 1.2.4.8.16.32.&c. vel triplo rũ numerorũ. vt. 1.3. 9.27.81.&c. numer9 quadratus inter eos semper in loco impari iue nitur.

Quadrato rũ & cubico loꝝ ꝓprie tas notabilis

Cubi etiã numeri ĩmutabili natura participant: eo ꝙ per additionẽ ordinatã non ab aliis ꝗ̃ ab iparibus numeris producuntur vt posita serie impariũ. 1.3.5.7.9.11.13.&c. pri mus eorũ est cubus. s. vnitas. deinde duo sequentes simul aggregati faciunt octo qui est cu bus. & tres sequentes simul sumpti producunt. 27. qui etiã est cubus. & quatuor seqũtes sunt. 64. numerus cubus & sic de aliis per ordinem. Hac supposita differentia: dicam9 vlte rius ꝙ istæ duæ formæ numerorũ sunt tã principales in negotio arithmetico: sicut corrup tibile & incorruptibile in toto vniuerso: vbi omne q̃d est his duab9 differẽtiis cõprehẽdi tur. quicquid. n. in mũdo est: aut est naturæ ĩmutabilis eiusdẽqȝ substãtiæ vt de9 ãgel9 cœlũ aut est mutabilis variabilisqȝ naturæ vt elemẽta & alia corpora naturalia: aut ex his duab9 naturis cõpositũ vt homo. Ita etiã ĩ numeris arithmeticis quicquid est vel ipar est ex quo ꝓcedit quadrata forma: vel par vnde ꝓcessit altera parte longior: vel ex his duabus formis procedens. nã permixtis eis & certo modo cõparatis: ex ipsis nascuntur omnes numeri & numerorum species. omnesqȝ proportiones. & etiam numerorum formæ supradictæ. atqȝ proportionalitates inferius dicendæ. Disponantur enim quadrati numeri omnes ĩ vna serie: & sub eis altera parte longiores ordinati. vt hic.

Pricipales fore nũero rũ que sint.

Regula ge neralis

Quadrati 1.4.9.16.25.36.49. Si primũ altera parte longiorẽ binariũ primo tetrago

Lõgilateri. 2.6.12.20.30.42.56. no. i. vnitati cõparaueris: differentia erit vnitas. si secũ dum secundo: differẽtia est binari9. si tertiũ tertio. ternari9 &c. oẽs numerorũ spẽs indeqȝ ꝓ duces. & in eisdẽ cõparationib9 iuenies primo ꝓportionẽ duplã. deĩde sesquialterã. postea sesquitertiã. & cõsequenter oẽs ꝓportiones superparticulares. Itẽ si secundũ quadratũ pri mo altera parte longiori. & tertiũ secũdo. & quartum tertio. & sic deinceps transuersaliter cõparaueris: easdem ꝓportiones inuenies. oẽsqȝ numerorum species ex eorũ differentiis ꝓter vnitatẽ elicies. Adhuc aũt in serie quadratorum differentiæ sunt numeri impares na turali ordine: sed in serie altera parte longiorum differentiæ eorum sunt numeri pares per ordinẽ naturalem. Itẽ permixtis tetragonis & longilateris alternati itaꝙ ex duabus serie bus fiat una series. ut hic. 1.2.4.6.9.12.16.20.25.30.36.42. Primus longilaterus ad suos collaterales quadratos continuat duplam proportionem. secundus longilaterus sesquial teram copulat ad suos quadratos. tertius sesquitertiam. quart9 sesquiquartam: & sic de aliis proportionibus superparticularibus. Ex quorum iterum differentiis naturalis numero rum series procreatur. In premissa etiam serie permixta continue comparando quẽlibet numerũ mediũ ad suos ꝓximo collaterales: apparebũt q̃nqȝ drĩæ similes & ꝓportiões di uersæ: q̃nqȝ ecõtra ꝓportiões similes & drĩæ diuersæ. sȝ crescũt differentiæ sedȝ naturalem seriẽ numerorũ. similiter & ꝓportiones a dupla incipientes per omnes spẽs superparticu

Prima cõ paratio de nu meris

De ꝓporti onibus.

De vtrisqȝ simul

De nũeris iterum.

De ꝓporti onib9 iterũ

lariũ ꝓcedunt. Eadẽ imaginatio occurret cõpando differẽtias nũerorũ in tali serie positorũ: ad eosdẽ nũeros quorũ sunt differẽtiæ. Nõ solũ aũt ex quadratis & altera pte longioribus adinuicẽ cõparatis nascũtur nũerorũ & ꝓportionũ spẽs ut pdictũ est: sed etiã aliæ nũerorũ formæ. additis .n. simul prio tetragono qui est unitas: & prio altera pte lõgiore binario resultat ternariusq̃ est triãgulus. deide addito scdo quadrato ad primũ altera pte lõgiorẽ fit secũdus triãgul⁹ senari⁹. & sic cõsequẽter ex additiõe duorũ ꝓximorũ i serie pmixta resultãt nũeri triãgulares suo ordine naturali. Itẽ p gñatiõe q̃dratorũ ex pdicta serie pmixta: repetẽdæ sũt duæ ꝓprietates figuræ magnæ ꝓportionũ sup⁹ positæ in cap. 5. pcedẽtis tractat⁹. s. ꝓprietates tertia & q̃rta: hac facta dria: q vbi ex duob⁹ q̃dratis & vno altera pte lõgiore tetragon⁹ ꝓcreatur: ille semp est numer⁹ ipar & ex ipari radice ꝓcedẽs: sʒ q̃n ex duobus altã pte lõgiorib⁹ & vno q̃drato cõficitur tetragon⁹: ille sp est par & a pari radice ꝓcedit. Ex linea insup q̃dratorũ seorsũ oẽs lõgilateri ꝓcreãtur: si cuiuslibʒ q̃drati lat⁹ ad ipʒ addideris vel ab eo subtraxeris. ois em̃ nũer⁹ ide resultãs erit lõgilater⁹. Deniq ꝓportiõalitates: ad q̃s trãsitũ facim⁹: ex pmixta serie q̃dratorũ & altera pte lõgiorũ hri pñt: q̃nquidẽ i eis dãtur mõ driæ siles vt dixim⁹ & ꝓportiões diuersæ: qd ptinet ad ꝓportiõalitatẽ arithmetică: mõ apparẽt driæ ieq̃les & ꝓportiões siles: q̃ ẽ ꝓportionalitas geometrica vt dicetur ifra. Sed de his iã satis: & p cõclusiõe hui⁹ tractat⁹ addam⁹: q supradictæ oẽs formæ nũerorũ debite applicatæ magnũ phĩs & theologis afferre pñt veritatis monimentũ. qd em̃ ꝓpri⁹ & veri⁹ dici põt: q̃ triangularẽ primã formarũ numeraliũ: a qua oẽs aliæ ꝓcreãtur vt dixim⁹: eẽ diuinã ẽentiã in psonis trinã a q̃ oẽs creaturæ ꝓcesserũt. q̃ nihilomin⁹ trinitatis icreatæ vestigiũ hñt. qa vt aristoteles ex pictagoricis allegat i. 1. lib. de cœlo: cuiuslibʒ rei creatæ pfectio cõsistit i trib⁹. q̃ postea btũs augustin⁹ declarãs dicit q oĩs res cõsistit i mõ spẽ & ordine. & allegat illud sapiẽtis q de⁹ oĩa cõstituit i nũero & põdere & mẽsura. aliæ vero numerorũ formæ tã superficiales q̃ solide qualr̃ singulis creaturis distribuẽdæ sint: q̃a nimis longũ foret enarrare: cõsulto reliquim⁹ ad exercitiũ ingeniosorũ iuuenũ.

[Margin: Scda cõgnitio de fofis nũerorum. — De triãgul. — De q̃drat. — De altera pte lõgiorib⁹. — Tertia cõgnitio de ꝓportionalitatibus. — applicatio formarũ nũmeraliũ ad res huius mundi]

Tractatus secũdus secundi libri de ꝓportionalitatibus numerorũ & earũ proprietatibus. habet capitula quatuor.

Caput primũ de ꝓportionalitate arithmetica & de ꝓprietatib⁹ eius.

CONSEQVENS est ad pdicta oĩa q̃ erãt de ꝓportionib⁹ & formis numerorũ diuersis: ut etiã de ꝓportionalitatib⁹ breuiter trãsigam⁹. ex cõtinuatiõe .n. ꝓportionũ & formarũ nũeraliũ q̃s sepi⁹ dixim⁹ i pcedẽtib⁹: ꝓportionalitates fieri q̃ manifestissimũ erit: si vocabuli diffinitionẽ pmittam⁹ talẽ. Proportionalitas est triũ aut pluriũ numerorũ simul sũptorũ habitudo vt. 1. 2. 4. est vna ꝓportiõalitas silr̃ in istis. 1. 2. 3. 4. & sic de aliis multis. vñ pʒ differẽtia ꝓportionalitatis a ꝓportiõe: quia hæc duorũ tm̃ nũerorũ erat cõpatio: illa vero triũ aut pluriũ. lʒ apud phlõs pariter & theologos ista duo nõia sæpi⁹ cõfundãtur: & alterũ p altero accipiatur. Illa aũt diffinitio cõis ꝓportionalitatis: q est pluriũ ꝓportionũ habitudo vel collectio aut similitudo: nõ oĩ ꝓportionalitati cõuenit vt patebit de arithmetica ꝓportionalitate. Proportionalitatis cõis hanc disiunctã passionẽ aut ꝓprietatẽ assignam⁹. qa oĩs ꝓportionalitas aut cõtinua aut discõtinua esse põt. cõtinua dr̃ ꝓportionalitas q̃n in trib⁹ nũeris accipitur. in quibus necesse ẽ vt medi⁹ terius reppetatur bis: simili cõparatiõe se hñs ad extremos. disiũcta vero est ꝓportionalitas accepta i q̃tuor nũeris ad min⁹: ubi nullus mediorũ bis cõparatur sʒ tm̃ semel. s. vn⁹ medi⁹ ad unum extremũ & alter ad alterũ. nã si cõtingeret ꝓportionalitatẽ facere ex quatuor aut plurib⁹ nũeris i qua q̃libet mediorũ bis cõparetur. s. semel ad extremũ & semel ad alterũ mediũ: illa poti⁹ esset cõtinua ꝓportionalitas q̃ discõtinua lʒ in pluribus q̃ trib⁹ numeris accepta. Proportionalitatis spẽs plurimæ sunt & nõ facile deteriabiles. sʒ apud antiquos phlõs. s. pictagoricos solæ tres hui⁹ gñis spẽs ponebãtur. s. arithmetica. geometrica. & armonica. q̃ ẽtviq ad platonẽ aristotelẽq mãserũt solæ. & vocabãt eas medietates aut mediocritates: q̃a gerũt silitudinẽ moraliũ virtutũ q̃rũ q̃libet ẽ mediocritas iter duo extrẽa alterũ p excessum alterũ p defectũ: sicut in ꝓportionalitate dãtur admin⁹ tres nũeri: un⁹ me

[Margin: Proportionalitas dđ sit. — In quo differt a ꝓportione — Proportionalitatis vnica ꝓprietas. — Proportionalitatis spẽs plures — Proportionalitates q̃ re dicũt mediocritates numerorum.]

di9 & duo extremi quorū alter excedit mediū alter vero deficit ab eo. post istos aūt phōs alii sapiētes q̄ secuti sunt: septē alias spēs hui9 gñis addiderūt p ducētes eas ad nūerū dena riū: q vidébatur eis oīū aliorū pfectissim9 eoq3 sit vltim9 terius nūerorū. nā post denariū oēs nūeri sūt reppetitōes denarii aut suarū partiū. Verūtñ si modū multiplicatōis istarū ꝓportionalitatū subtiliter aduertam9: plures ꝓportionalitatū spēs q̄ decē imaginarii poterim9 quē modū in fine isti9 tractat9 explicabim9. interi aūt circa primas illas tres spēs intendemus diffinitiones & ꝓprietates earū ꝑquirentes. Arithmetica ꝓportionalitas est triū aut pluriū nūerorū talis aggregatio in qua neglecta ꝓportionū equalitate: eadē & similis differentia īter nūeros obseruatur vel attēditur: & hæc manifesta est in naturali numerorū serie: vbi semp duorū ꝓximorū differētia est vnitas. vt. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Simil'r in naturali serie numerorū pariū seorsum: vel īpriū seorsu3: vbi semp differētia est binari9. vt p3 hic Pares. 2. 4. 6. 8. 10. Impares. 1. 3. 5. 7. 9. Eadē ꝓportionalitas hr̄ in naturali serie numerorū pariter īpariū de quib9 superi9 dixim9 q3 quilibet eorū distat a suo ꝓximo p quatuor vnitates. vt. 2. 6. 10. 14. 18. &c. Hāc etiā numerorū seriē in arithmetica practica q̄ dr̄ algorism9 vel abacus ꝓgressionē numerorū vocāt. Dicitur aūt talis numerorū aggregatio ꝓportionalitas arithmetica: nō q3 ipa sola in nūeris cōsistat & aliæ oēs in magnitudinibus: q̄ñq̄dē oēs ꝓportiōalitatū spēs ī numeris oēsq3 ī magnitudinib9 īueniātur: sed dr̄ arithmetica quia solū attēdit nūerū vnitatū excessus īter pricipales nūeros qui cōparātur. In geometrica vero ꝓportionalitate sequēte nō curātes de numero illarū vnitatū p quas pricipales numeri sese excedūt atq3 excedūtur: pricipal'r attēdim9 quota pars sit ille excessus respectu nūeri excedētis vel excessi: & hoc siue excessus ille sit vnitas siue binari9 siue ternari9 &c. vñ nō imerito hæc ꝓportionalitas arithmetica. i. nūeratiua excessus dr̄: sequēs vero geometrica. i. mēsuratiua eiusdē excessus. Arithmeticæ ꝓportionalitatis q̄tuor ꝑcipue sūt ꝓprietates. Prima eadē est cū quarta ꝓprietate nūeri pariter īparis. s. q3 si medi9 terminus fuerit vn9: ille coniunctorū est medietas extremorū. si aūt fuerit duo media illa simul sumpta adequātur duob9 extremis sibi adiūctis tā ī ꝓportiōalitate cōtinua q̄ discōtinua.

Arithmetica ꝓportiōalitas qd sit

Quare dr̄ arithmetica.

Quatuor ei9 ꝓprietates. pma.

2. ꝓprietas

2. 10. Scd̄a ꝓprietas. q3 sicut q̄libet numer9 in hac ꝓportionalitate se h3 vt. 2. 4. 6. & . 2. 4. 6. 8. ad seipm̄: ita se hn̄t dr̄iæ ad differētias. nā vtrobiq3 equalitas reperitur. qd nō est possibile in aliis ꝓportionalitatib9. hoc p3 in p̄dictis exēplis vbi oēs differentiæ sūt dualitates. Tertia ꝓprietas: quā primo nichomac9 īuenit: est. q3 illud qd fit ex medio nūero in seipsum ducto mai9 est eo qd ꝓducitur ex multiplicatiōe extremorū ad inuicē. & excessus ꝑcisse est tātus quāta est multiplicatio vni9 dr̄iæ p aliā. de differētiis loquor medii ad duo extrema. vt hic. 3. 5. 7. ex multiplicatiōe medii ꝓcedit. 25. ex multiplicatiōe aūt extremorū fiūt. 21. excessus aūt illi9 ad istū est quaternari9: quē ꝓducit differentiarum multiplicatio q̄ sunt duo binarii. Et hæc ꝓprietas etiā vera est in q̄tuor numeris siue sit ꝓportiōalitas cōtinua siue discōtinua: dū mō extrema ad vnū tm̄ mediū cōpatētur quodcūq3 illorū ponatur. vt hic. 3. 5. 7. 9. ex multiplicatōe duorū mediorū ꝓuenit. 35. ex multiplicatōe uero extremorū fit. 27. q̄ exceditur a p̄cedēte in. 8. quāta est multiplicatio binarii in q̄ternariū q̄ sūt dr̄iæ extremorū ad vtrūlib3 mediorū. sil'r hic. 5. 7. 8. 10. multiplicatio mediorū est. 56. extremorū. 50. excessus ē senari9 ꝓduct9 ex multiplicatōe binarii in ternariū q̄ sūt dr̄iæ extremorū ad quodlibet mediorū. Quarta ꝓprietas q3 si ī numeris hui9 ꝓportionalitatis nō dr̄ias sed ꝓportiōes eorū attēdam9: in minorib9 nūeris maiorē ꝓportionē: & in maiorib9 minorē īueniemus. vt hic. 1. 2. 3. maior est ꝓportio duorū ad vnū quia dupla: q̄ triū ad duo quæ est sesquialtera. & sic de aliis exemplis.

3. ꝓprietas

4. ꝓprie.

Caput scd̄m de ꝓportionalitate geometrica & suis ꝓprietatibus.

SIcut in arithmetica ꝓportionalitate differētias equales numerorū attēdebam9: sic in geometrica ꝓportionalitate eorūdē nūerorū ꝓportiōes siles & equales obseruamus. vñ diffinitio ꝓportionalitatis quā sup19 reprobauim9. s. ꝓportionū similitudo geometricæ ꝓportionalitati erit aptissima. Est ergo ꝓportionalitas geometrica triū aut pluriū nūerorū simil'sūptorū talis cōpatio ut ī eis l3 dr̄iæ nō sint eq̄les: ꝓportōes tm̄ eorū sūt siles & eq̄lis. ut hic. 4. 6. 9. sunt duæ sesquialteræ. & hic. 3. 6. 12. sunt duæ duplæ: & sic de aliis. Ex qua

diffinitione elicitur prio p geometrica pportiōalitas ex oībus spēb9 pportiorū constitui potest vt ex duplis triplis quadruplis & aliis multiplicibus, similiter ex sesquialteris. sesquitertiis. sesquiquartis & aliis superparticularibus. eodē modo ex supbipartientib9 tertias quītas. septimas. &c. ex suptripartiētib9 quartas quītas. septimas &c. & sic de aliis oīb9 speciebus Secūdo seqtur q nūeri pariter pares seriati sūpti sūt pportiōalitas geometrica. q re & pprietates pariter pariū: geometricæ pportionalitati couenict. facit etiā ad hoc ppositū regula de cōtinuatiōe pportionū supparticulariū i vltimo capite primi libri hui9 supius posita. Quare āt ista pportiōalitas dicatur geometrica vl mēsuratiua diximus i pcedēti capitulo. qa ita bñ ista pportiōalitas sicut & oēs aliæ est ptractāda i sciētia arithmetica quēadmodū & i geometria. vnde hæc adiectiua arithmetica & geometrica i pportiōalitatib9 nō appellāt sciētias i quib9 cōsiderātur: sed cōsideratiōes īter excessus nūerorū quos aliter in vna & aliter i alia pportiōalitate cōsideram9. Hui9 pportiōalitatis qttuor sūt pprietates Pria si accipiātur nūerorū differētiæ seorsū i vna seriæ: easdē hñt pportiōes quas & nūeri quorū sūt differentiæ. vt hic. 1. 2. 4. 8. 16. quorū differētiæ sūt: 1. 2. 4. 8. &c. Secūda pprietas qn pportiōalitas geometrica fit ex mltiplicib9 similib9: differentia mioris ad suū pximū maiorē est æqlis miori: aut multiplex mltiplicitate pxio miori q sit mltiplicitas eorūdē nūerorū. vt si pportiōalitatis fiat ex duplis mior nūer9 differētia sibi æquali exceditur a maiori. si ex triplis differētia sibi dupla. si ex qdruplis differētia tripla & sic de aliis. Tertia pprietas quicqd pducitur ex multiplicatiōe extremorū nūerorū i hac pportiōnalitatæ idē pueniet ex ductu medii vl mediorū nūerorū p se ipos: & hæc fuit qta pprietas i nūeris pariter parib9. Quarta pprietas hui9 spēi est q tā in nūeris maiorib9 q i miorib9 est eadē & similis pportio: hoc expsse hz diffinitio pportiōalitatis geometricæ superi9 posita: possent hic addi qdā aliæ pprietates hui9 mediocritatis geometricæ. s. q in termis ei9 licet arguere cōuersiue pmutari & aliis modis de quib9 in geometria dicem9. Notandū est etiā q inter oēs duos nūeros qdratos pxios semp est dabilis vn9 terti nūer9 medi9 pportionalitatē geometricā in eis faciēs: qa duas similes pportiōes hz ad nūeros extremos: & tale medū facile iuenitur si latera illorū qdratorū adinuicē multiplicētur de quib9 laterib9 i supiore tractatu dixim9 attendētes quot vnitates hz quilz qdrat9 i latere suo. vt īter. 4. & 9. est senari9 pductus ex multiplicatiōe binarii cū ternario q sūt eorū latera. silr inter. 9. & 16. sūt. 12. ex mltiplicatiōe ternarii cū qternario q sūt latera eorū. & sic de aliis. Sed īter qlibz duos cubicos pxios sūt duo media pportionalia. i. siles pportiōes hñtia cū extremis & ad se ipsa. quorū mediorū nūerorū mior pducitur multiplicato latere cubi maioris p qdratū mioris: maior vero mediorū cōsurgit ex mltiplicatiōe lateris cubi mioris p quadratū maioris: quadrata cubicorū vocam9 nūeros quadratos eadē radicē hñtes cū talib9 cubicis. latera āt cubicorū sūt vnitates sue altitudis. vt octonarii qdratū est. 4. lat9 vero est duo. silr vigesimi septimi quadratū est. 9 lat9 vero. 3. ergo īter. 8. & 27. sūt duo media pportionalia s. 12. & 18 quorū primū nascitur ex mltiplicatiōe ternarii cū qternario. alterū vero pducitur ex multiplicatione binarii cum nouenario & sic de aliis.

Quare sr geometrica

Quattuor ei9 pprietates prima.

2. pprietas

3. pprietas

4. pprietas

Nūeros q dr toe cog natos esse geometrice pportionalitati

Idē pbat de nūeris cubis

Caput tertiū de pportionalitate armonica & de eius pprietatibus.

CVM ois pportionalitas cōsistat ad min9 i trib9 nūeris: pter duas eorū cōparationes supradictas potest adhuc tertia assignari: qua nec siles nūerorū differētias nec æqles eorū pportiōes obseruabim9: hāc armonicā medietatē censuert appellādā cui9 diffinitio talis est. Armonica pportionalitas est triū nūerorū talis colligātia vbi qualis est pportio extremi ad extremū talis est & duarū differētiarū īter se: quarū maior ē differētia maioris ad mediū: mior vero earū est differētia vl excessus medii ad miorē vt. 3. 4. 6. vbi extremi maioris ad miorē ē pportio dupla. q etiā ē pportio binarii ad vnitatē differētiæ scz maioris & medii ad differētiā medii & mioris. silr3 hic. 2. 3. 6. extremorū pportio est tripla & eadē est duarū adiuicē differentiarū. eisdē āt nūeris duplatis aut triplatis aut aliter mltiplicatis semp eadē pportionalitas apparebit. Huius pportionalitatis armonicæ silr quattuor repperim9 pprietates. pria q i maioribus nūeris ei9 est maior pportio & in miorib9 minor. p cōtrariū ad proportiōnalitatē arithmeticā. vt pz in exēplis superiorib9. Secūda pprie

Armonica pportionalitas quid sit.

Armonicæ pprietates quattuor. Prima.

2. pprietas

2.pprietas tas φ medi9 terminus tota mioris pte miorē supat quota maioris a maiore supatur vt hic 2.3.6.medius supat miorē medietate mioris .s.vnitate: & supatur a maiore medietate maioris.s.ternario.hui9 cōtrariū habebat pportiōnalitas arithmetica vbi medi9 termin9 tota sui pte miorē supabat quota etiā sui a maiore supabatur.nulla facta relatiōe differentiarū ad nūeros extremos.sed i armonica medietate differētiæ cōparātur ad extrēos & non ad nūerū mediū.i geometrica āt pportiōalitate mediocris fit cōpatio.qa vna differentiarū refertur ad miorē numerū alia vero ad mediū. nā ibi medi9 numer9 quota pte mioris miorē supat:tota sui pte exceditur a maiore.

3.pprietas Tertia pprietas φ in numeris pportionalitatis armonicæ sūma q̄ pducitur ex multiplicatiōe duorū extremorū adiuicē medietas est nūeri pducti ex mltiplicatiōe medii cū cōposito ex extremis vt hic.3.4.6.ex mltiplicatione extremorū pducitur.18.sed ductis q̄ttuor i.9.q est aggregat9 ex extrēis fiūt.36.nūer9 dupl9 ad.18.& sic de aliis exēplis.

4.pprietas Quarta pprietas φ armonica mediocritas i nūeris suis musicā pīter & geometricā exhibet armonicā:vū nō imerito armōica vocata ē.

Musica armonia qd est. Dicitur āt musica armonia cōsonātia vocū acute & grauis i certa rōne nūerali.hæc āt nō ē nisi quicūplex (de pfectis cōsonātiis loquor) videlz dupla.tripla.q̄drupla i multiplicib9.& sesqaltera.sesqtertia.i supparticularib9.nā i aliis spēbus pportionū tā horū generū q̄ sequētiū:voces cōparate nō hn̄t pfectā cōsonātiā sed mancā & ipfectā.

Armonicæ cōsonantie musicales quinqz. Diapason. Diapason cū diapēte bis diapasō Dia pente. Diateserō. has āt vocū proportiōes supradictas musici (vt alias videri hz) suis vocabulis mixte cognotātib9 vocāt.duplā:diapason vel octauā.triplā:diapason cū diapēte vl̄ duodecimā.q̄druplā bis diapasō vel quīdecimaz.sesq̄alterā vocāt diapēte aut quartā:sesq̄tertiā:diateseron vel tertiā vocē supra vel īfra aliā q̄ oēs proportiōes cōsonātiarū musicaliū reperiūtur in nūeris hui9 pportiōalitatis armonicæ si etiā differentiæ eorū cōnuerentur vt hic.3.4.6.nā.6.ad.4 ē proportio sesq̄altera .4.ad.3.sesq̄tertia.6.ad.3.ē dupla.ternari9 āt differētia extrēorū ad vnitatē q̄ ē differētia medii & mioris triplā hz pportiōez.sed.12.resultās ex aggregatiōe maioris & medii cum eorū differētia:quadrupl9 est ad miorē q̄ ē ternari9.silr hic.2.3.6.medi9 ad miorē ē sesquialter.maior ad mediū dupl9.& differētia iter maiorē & mediū est tripla ad differētiā iter mediū & miorē: ad quā etiā differētia duorū extrēorū ē q̄drupla:& eadē extrēorū differētia ē sesq̄tertia ad mediū.

Armonia geometrica Armonia vero geometrica .i. pfectissi corpis laterati dispositio est figura cubica q̄ vt superi9 dixim9 hz.6.supficies.8.āgulos &.12.lineas laterales.hi aūt tres nūeri.6.8.12.cū sint dupli ad nūeros primi exēpli suprapositi eadē cū eis hn̄t proportiōalitatē.s.armonicā.ergo nō imerito talis nūerorū aggregatio armonica vocatur ppter duas ratiōes supradictas.

De inuētiōe harū pportionalitatū Hacten9 igitur de tribus primis pportionalitatib9 q̄ sunt valde auctēticæ & magni pcii apud grauissimos philosophorū. vn̄ ad earū facilē iuētiōez op9 ē. rl̄az hui9 artis adaptare.Nā ppositis duob9 nūeris ieqlib9 siue sit pes siue ipares notabilit tn̄ a se ipsis distātes:p diuersā medii nūeri iuētiōez:harū triū spērū pportionalitates variabim9:ita φ iidē nūeri extremi cū vno medio sit proportiōnalitas arithmetica:cū alio geometrica:& cū alio armonica medietas.p quib9 mediis iueniēdis ponūtur tres regulæ.

1.regula Prima φ mediū arithmeticū ē dimidiū numeri cōpositi ex extremis.vl̄ est numer9 addēs sup miorē medietatē differētiæ extremorū.

2.regula Secunda rl̄a φ mediū geometricū semp est radix quadrata numeri pducti ex mltiplicatiōe extremorū.vel ē nūer9 proportiōez extremorū p mediū diuidēs.

3.regula. Tertia rl̄a φ mediū armonicū iuenitur si mior numerus p differētiā extremorū multiplicietur: & pducto diuiso p cōpositū ex extremis:nūer9 quotiēs eidē miori numero addatur.vt datis his duob9 nūeris pibus p extremis.10.&.40.mediū arithmeticū iter eos ē.25.geometricū est.20.armonicū vero.16.vt pz ex reglis.silr positis his duobus nūeris iparibus.5.&45.mediū arithmeticum inter eos est.25: geometricuz est.15. armonicum autem.9.& sic de aliis exemplis suo modo.

Caput quartum de aliis septem proportionalitatum speciebus breuissime

Nō oēs pportionalitates imaginabiles sūt possibiles. Pertractatis diffusius tribus primis pportionalitatū spēb9 aliarū potissimis: opus est vt septē alias imo & oēs alias huius generis spēs disseramus:supposito prius ordine mltiplicādi hmōi spēs quotquot fuerīt imaginabiles. vt postea reiectis ipossibilibus certū numerū spērū possibiliū colligamus.Quēadmodū fecisse legitur aristoteles i sc̄do libro

de gn̄atiōe ad iquirēdū certū nūerū elemētorū dicēs: ꝙ q̄ttuor priarū qualitatū cōbinatio nes sex sunt imaginabiles: sed ex eis duæ sūt ipossibiles: restāt ergo q̄ttuor tātū possibiles & totidē sūt elemēta.i.simplicia corpora pria. Similia fere dicūt comētatores iquirēdo cer tū nūerū p̄dicamētorū i priꝰ itētiōibus tū siplicibus tū etiā mixtis siue cognotationis mix te.nā recte calculādo quīgēta p̄dicamēta & eo plura sunt imaginabilia: sed nō tot sūt possi bilia :aut saltē nō tot reppersibilia i vocabulis sciētiarū & artiū cōit visitatis vt alias videri h3. Nūc āt ad ꝓpositū nr̄3 dimissa arithmetica ꝓportionalitate (i qua differētiarū tātū silitudo & nō ꝓportionū æqualitas attēdebatur) aliarū spērū oium trib9 quaternariis imagi nabimur modos: vt oēs ꝓportionalitatū spēs sint tredeci: quot etiā moraliū virtutū spēs notabiles iuenerīt peritissimi philosophorū.s.prudētiā i intellectu & duodeci alias virtu tes i affectu.ad silitudinē sacratissimi collegii xp̄i & suorū ap̄lorū. Quaternarii āt supradi cti tria hnt hæc pricipia cōparationū iter tres nūeros alicui9 ꝓportionalitatis. pria cōpara tio est sicut medi9 nūerus ad miorē. scd̄a sicut maior ad mediū. tertia sicut maior ad miorē Quel3 iterū istarū cōparationū i q̄ttuor alias subdiuiditur variādo p differētias illorū triū nūerorū. vt sic dicēdo. sicut se h3 medi9 nūerus ad miorē: sic se h3 differētia maioris & me dii ad differētiā medii & mioris. vel sicut medi9 ad imorē: sic eorū differētia ad differētiā maioris & medii. vel sicut medi9 ad miorē: sic differētia extromorū ad differētiā duorum maiorū. vl' sicut medi9 ad miorē: sic differētia extremorū ad differētiā duorū miorū. Et itelligitur p hoc ꝙ dicim9 se habere hoc ad illud: ꝓportio maioris ineq̄litatis vni9 nūeri ad alterū. vt sit sensus qualis est ꝓportio medii nūeri ad miorē: talis est ꝓportio differētiæ hu ius ad illā. &c. Silr̄ dicēdo sicut maior nūer9 se h3 ad mediū: q̄ttuor iuenim9 cōparationes addēdo: sic se h3 differētia maioris & medii ad differētiā medii & mioris. vel sic se h3 differentia miorū ad differētiā maiorū. vel sic se habet differētia extrēorū ad differētiā duorū maiorū. vel sic se h3 differētia extremorū ad differētiā duorū miorū. Eodē mō dicēdo sicut maior nūer9 se h3 ad miorē q̄drifaria est cōpatio: si addatur: sic se habet differētia duorū maiorū ad differētiā duorū miorū. vel sic se habet differētia miorū ad differētiā maiorū. vl' sic se habet differētia extremorū ad differētiā duorū maiorū. vel sic se habet differētia extremorū ad differētiā duorū miorū. He oēs sunt iā duodeci cōpatiōes. p̄ter q̄s sunt adhuc imiginabiles aliæ sex. s. dādo oppositas cōpatiōes duab9 vltimis in quolibet quaternario. vt sic se habet differētia miorū ad differentiā extremorū. vel sic se h3 differētia maiorū ad differētiā extrēorū. & hoc ꝑplicit variādo scd̄m tria pricipia sup̄dicta. q̄ tñ oēs sūt iposibiles i nūeris. & etiā vna duodeci p̄cedētiū ē ipossibil' vt ondem9. restāt ergo vndeci possibiles: q̄rū tñ q̄ttuor reducūtur ad duas q̄a coicidūt & ꝑ eisdē nūeris supponūt. & sic restāt decem spēs ꝓportiōalitatū possibiles & ꝑ distictis nūeris supponētes etiā cōnūerata arithmetica ꝓportionalitate: q̄ ab hmōi cōparationibus erat aliena: sed aliarū oium fundamentalis & pria. cui9 diffinitiōe supposita: alie oēs ex p̄dictis sic sunt diffiniēde. Secūda ergo ꝓportio nalitas est tres nūeri taliter cōparati ꝙ sicut se habet medi9 ad miorē: sic se habet differen tia duorū maiorū ad differentiā duorū miorū. vt. i. 2. 4. & hæc est geometrica. Tertia pro portionalitas est in qua sicut medi9 ad miorē: sic differentia miorū se habet ad differentiā maiorū vt. 2. 4. 5. & est cōtraria geometricæ. Quarta ꝓportiōalitas est sicut medi9 ad mi norē sic differētiā extrēorū ad differētiā maiorū. vt. 3. 5. 8. Quīta ꝓportiōalitas sicut medi us ad miorē sic differētia extrēorū ad differētiā miorū vt. 4. 6. 7. Sexta ꝓportiōalitas ē tres nūeri i qb9 sicut maior ad mediū: sic differētia maiorū ad differentiā miorum. vt. 2. 4. 8. & hæc iterū est geometrica. Septia est sicut maior ad mediū: sic differentia miorū ad differē tiā maiorū vt. i. 4. 6. & hæc iterū est cōtraria geometricæ. Octaua ē sicut maior ad mediū sic differentia extremorū ad differentiā maiorū vt. 3. 4. 6. q̄ coicidit cū armonica. Nona ꝓ portionalitas sicut maior ad mediū: sic differentia extremorū ad differentiā miorū. et hæc est ippssibilis in nūeris. Decima ꝓportionalitas est tres termini i quib9 sicut maior ad mi norē sic differentia maiorū ad differentiā minorū. vt. 3. 4. 6. & hæc est armonica. Vndecia sicut maior ad miorē: sic differētia miorū ad differētiā maiorū. vt. 3. 5. 6. & hæc est cōtraria

Exēplū in phi ca de elementis. Exēplū lo gica de p̄e dicamentis

Tres q̄ter narii cōm parationū.

Tria p̄nci pia q̄terna riorum.

Primus q̄ ternarius.

Secūd9 q̄ ternarius.

Tertius q̄ ternarius

Alie sex cō parationes

1 ꝓportiōa litas arith metica. 2 geōetrica

3. cōtraria geometrice

Quarta. Quinta. 6. iterum geometrica 7. p̄dicte contraria. 8. est armo nica. 9 ipossibil' 10. est iterū armonica. 11. cōtraria armonice.

Duodecia

Tertiadecima

Alie sex impossibiles.

armonicæ.Duodecima sicut maior ad miorē sic differentia eorū ad differentiā duorū maiorū vt.6.7.9..Tertia decia sicut maior ad miorē sic differentia eorū ad differētiā duorū minorū.vt.6.8.9.Post has sequūtur aliæ sex īpossibiles de quib9 pri9 diximus.& ex supra dictis nona īpossibili existente:atqʒ secunda & sexta ad vnā reductis.silr octaua & decima p eadā cōputatis:restāt vt dixim9 decē notabiles pportionalitatū spēs differētes vt pʒ hic

Arithmetica prima	.1.2.3.	Quinta .4.6.7.		Nona impossibilis.	
Geometrica secūda	.1.2:4	Sexta geometrica		Decima Armonica.	.3.4.6.
Contraria tertia	.2.4.5	Septima .1.4.6.		Vndecia cōtraria	.3.5.6.
Quarta	.3.5.8	Octaua armonica		Duodecia	.6.7.9.
Vbi sole decem hñt nūeros exp̄ssos qa ille sole				Tridecia	.6.8.9.

sunt possibiles& aliis nō coīcidētes vt patet ex dictis.Restat nūc p cōclusiōe hui9 nr̄æ arithmeticæ itroductiōis vt de maxīa pfectaqʒ armonia differam9:q̄ trib9 nūerorū interuallis teste boetio cōstituta magnā vī optinet ī musici modulamīs tēperamētis:& ī speculatione naturaliū q̄stionū p̄sertī apud platonē & pictagoricos .hæc āt armonia q̄tuor numeris solidis cōficitur q̄ sunt.6.8.9.12.ī quib9 tres laudatissime pportionalitates prime. atqʒ oēs cōsonāciæ musicales disertissime ānotātur.Quod āt hi oēs sint nūeri solidi: hic pbatur. q̄ mltiplicatiōe replicata triū nūerorū qlibet eorū explicari potest.vt semel duo ter sunt.6. bis duo bis.sunt.8.semel tria ter sūt.9.& bis duo ter sunt.12.q̄ āt in eis sit pportionalitas arithmetica clarū est cōparatis duobus extremis ad vnū mediū.s.9.geometrica vero:si eadē extrema ad duo media sic referātur:q̄ sicut prim9 nūerus se habet ad tertiū:sic secund9 ad q̄rtū vtrobiqʒ.n.est sesq̄altera pportio.armonica āt:si extrema ad vnū mediū.s.8.adaptentur.vñ & pprietates harū pportionalitatū supradicte his nūeris sic cōparatis manifestissime cōueniēt p̄sertī ille q̄ de multiplicatiōe vel additione nūerorū mediorū & extrēorū loq̄bantur.De cōsonātiis musicalib9 facilis est pbatio nā.12.ad 9.vel.8.ad.6 est diatesseron.sed.12.ad.8.vel.9.ad.6.est diapente.harū duarū cōsonātiarū differētia est sesqoctaua pportio q̄ & dicitur epocdus inter.9.&.8.deide.12.ad.6.est diapason cōsonātia.sed differentia maximi ad primū mediū cōparata ad differentiā duorū mediorū ad inuicē est diapason cū diapente.tandē differentia maximi ad secūdū mediū se habet ad eandē differentiā duorū mediorū ī q̄drupla pportiōe q̄ est bis diapason cōsonātia. Nouissime vero sicut pportionalitates supradictas virtutibus moralib9 cōparauimus:(q̄ ī regimie rei publicæ maxie sunt necessariæ) sic earū tres prime spēs:trib9 valde differentibus rei publicæ spēbus coaptari possunt.ponit etiā aristoteles in tītio suorū politicorū libro:sex rerū publicarū spēs tres primas rectas & studiosas q̄ sunt regnū.optimatus.& res publica:& totidē trāsgressas & viciosas.s.tyrānidē.paucorū potentiā.& popularitatē.bonarū āt & malarū potissima hæc est differentia:q̄ in bona re publica q maiores sunt virtute merito & prudentia: pl9 accipiūt de honorib9 & bonis rei publice:q̄ʒ miores in talibus pfectionib9. sed ī mala & tirānica re publica accidit cōtrariū.qa miores virtute & merito:fiunt maiores in honore & pticipatione bonorū rei publice.Quia igitur ī arithmetica pportiōalitate ī miorib9 termis est maior pportio & e cōtra:paucorū potentiæ tippū gerit.Armonica vero pportionalitas cōtrariā hñs cōditionē optiorū gubernationi assimilatur.Sed geometrica proportionalitas q̄ ī vtrisqʒ nūeris pportionū seruat æqualitatē:recte popularitas dici potest. hæc et alia multa nobis pfecto in accessibilia arithmeticæ introductiones cōmoda adducere possunt.In his tamen quæ rudi nostra minerua cōpegimus arithmetica p̄gustamēta:laus omnis & honor sit summo deo scientiarum largitorii:& maioribus nostris quorum opinioaibus communicauimus.

Maxia ac pfecta armonia.

Quatuor nūeri solidi qb9 sunt tres pportionalitates.

In eisdem nūeris oēs cōsonantie musicales

Res publica est pportionalitas.

Spēs politiarum sex precipue

Arithmetica pp. paucorū potē.

Armonica propor. optimats.

Geometrica propor. pp laritas.

Arithmeticæ introductionis finis

Petri Cirueli Darocensis. preuia in geometriam quæstiuncula de realitate punctorum. linearum. superficierum: & figurarum.

AD VERAM intelligentiam geometriæ breuis Thomæ Bra-
uardini (cui etiã nõnulla quæ deerant necessaria addidimus)
videtur prælibanda hæc breuis quæstiuncula. Nũquid geome
trica principia & cõclusiones possint æque bene intelligi & sal
uari ab his qui negant indiuisibilia: puncta. s. lineas & sup̃ficies
in corporibus naturalibꝰ accidentia terminantia & cõtinuãtia
magnitudines rerũ: sicut intelliguntur & saluãtur ab aliis qui
talia indiuisibilia defendũt atq; cõcedũt. Ad hanc dubitationẽ
sine argumẽtis breuiter respõdendo dicimꝰ ꝙ olim Aristoteles
cõtra platonẽ agens in. 2. phisicorũ. in. 1. de aĩa. & in. 3. metha-
phisicorũ. improperabat ei ꝙ nõ valeret theoremata geometrica intelligere nec saluare:
nisi fingeret quædã entia mathematica. i. lineas superficies & corpora quædã separata rea-
liter ab his entibus naturalibꝰ quæ sunt apud nos: nõ tamen adeo separata sicut ideas me-
thaphisicas. Dicebat enim Plato (referente Aristotele) ꝙ entia mathematica erant media
inter ideas & has res sensibiles naturales: de quibꝰ intermediis solũmodo erant vera theo-
remata geometrica. non enim inquit Plato in rebus naturalibus verificatur illa diffinitio
puncti cuius pars non est. vel illa conclusio ꝙ circulus lineam rectam vel sphera superficiẽ
planã tangat in pũcto præcise. & sic de aliis multis. cũ ergo illa omnia sint vere supposita
& demonstrata in geometria: oportet dare aliquas veras res præter istas sensibiles & natu-
rales in quibus verificentur ea quæ supra dicta sunt. Quo cõtra aristo. vbiq; probat talia en-
tia intermedia esse ficticia & nulla & absq; necessitate posita: cũ alioquin oĩa geometrica
possint saluari & recte intelligi de istis rebus naturalibꝰ sensibilibꝰ. ait enĩ in. 2. phisicorũ:
ꝙ mathematicus de phisica linea intendit: sed non inquantũ est phisica. i. nõ ratione phi-
sica (quæ est mentis conceptus motum materiam & qualitates sensibiles cognotans) sed
ratione abstracta a talibus cognotationibus. vnde subdit ꝙ abstrahentium non est men-
datium. quia intellectus noster rem vnã alteri naturaliter coniũctam potest seorsum & se-
parate cognoscere vł contemplari: & in hoc non fallitur aliquo errore vel mendatio. qua-
re arguens platonẽ de ignorantia dicit. latent autem hæc facientes & ponentes ideas & ma-
thematica separata. Supposita ergo veritate doctrinæ Aristotelis in hac materia: sequaces
sui peripatetici diuisi sunt in duas sectas. quibusdã eorum dicentibus: aliis vero negantibꝰ
ꝙ in rebus naturalibus sunt quædã vera accidentia quæ dicuntur entia mathematica simł
coniuncta qualitatibus naturalibus quæ sunt res phisice. quæ quidẽ mathematica accidẽ-
tia: licet a phisicalibus realiter sint inseparabilia: imaginabiliter tamen hæc ab illis cogi-
tatione nostra separari possunt. Dicunt igitur taliter opinantes ꝙ geometria nostra est ve-
ra precise in suis principiis & conclusionibus de illis accidentibus mathematicis sic abstra-
ctæ consideratis: & non de substantiis aut qualitatibus rerum naturalium. principale mo-
tiuum istius opinionis fuit vt saluarent distinctionem mathematicæ scientiæ a phisica per
diuersas res: de quibus vtraq; considerat. Alii vero peripatetici opinantur hoc motiuũ nõ

Plato.

Aristoteles

Reales.

Noiales.

cogere ad ponendum tales entitates. quia distinctio scientiarũ sufficienter defendi potest si de eisdem rebus diuersis rationibus considerent. vnde & notãter dixit Aristoteles ꝙ mathematicus de phisica linea intendit: sed non inquantum est phisica. idest non eadem ratione cum phisica scientia. ideo concludunt ꝙ in rebus naturalibus non oportet ponere alia accidentia præter qualitates phisicas. Vnde concedunt easdẽ res esse naturales & mathematicas: aliter tamen & aliter consideratas. omnis enim res longa (vt inquiunt) est linea: siue sit substãtia siue accidens siue materia siue forma. & omnis res longa & lata est superficies. deniq; omne longũ latum & profundũ est corpus quæcunq; res illa fuerit. Nec admittunt distinctionem de rebus extensis vel partibilibus per se aut per accidens. sed dicũt ꝙ omnis res extensa & partibilis habet hoc ex natura sua & nõ per aliud. nam si aliqua res vt anima rationalis suapte natura est impartibilis & inextensa: quatuncunq; vniatur corpori extenso & diuisibili nunq̃ per ipsum fiet diuisibilis & extensa. ideo nihil est continuum aut diuisibile per aliud. nec Aristoteles in prædicamento quantitatis sensit contrarium distinguens quantitates per se a quantitatibus per accidesn: quia ibi de vocabulis loquebatur non de rebus externis: de quibus modo agimus. Igitur secundum istam viam geometria verificat sua principia & conclusiones: suas diffinitiones & diuisiones de omnibus istis rebus naturalibus siue quantum ad substantias siue quantum ad accidentia corporalia: qa in omnibus est eadem & similis ratio. Nec argumẽtũ præcedentis opinionis cogit: quia ex quo accidentia illa mathematica & phisicalia sunt simul & realiter coniuncta: quicquid ad diuisibilitatem & extensionem pertinens affirmatur de matheamticis: erit etiam veruʒ de phisicis accidentibus. imo & de substantiis corporum naturalium: cum omnia illa siml' sint: simul tangant & tangantur: simulq; diuidantur. Hactenus de punctis lineis superficiebus & corporibus mathematicis. Sed de figuris geometricis iterum est diuersitas inter peripateticos. dicunt enim quidam ꝙ sunt qualitates fundatæ in quautitate continua. persuasi ex eo ꝙ Aristoteles posuit quartam speciem qualitatis esse figuram. Alii putant figuram esse relationem quandam vl' respectum extrinsecum de predicamento situs: dicentes ꝙ Aristoteles non idstinxit veras species qualitatis: sed quosdam modos accidentales eius vnde figura licet sit modus qualitatis: essentialiter tamen est situs vel positio partium quãtitatis. Alii demũ opinati sunt figuram esse penitus idem realiter cum quantitate cõtinua. vnde iuxta duas opiniones supradictas de magnitudine mathematica differunt isti circa figuram. quibusdam dicentibus figuram esse accidens realiter distinctum a substantia naturali: & ab accidentibus phisicis. Aliis contradicentibus vt figuram sustineant esse quamcunq; rem prius dixerant esse magnitudinem: siue illa sit substantia siue accidens. sed de his non est modo dicendum per singula. Nos itaq; quibuscunq; doctrinis philosophoruʒ geometriam cõmunem facientes: dicimus eam esse æque peruiam & facilem ad intelligẽdum a quibuscunq; & qualitercunq; opinari volentibus de rebus mathematicis magnitudinibus & figuris. quia diffinitiones. diuisiones. principia. & conclusiones geometriæ: ꝑ rationes abstractas considerandi res illas saluare intendimus: non multum curãtes de cõditione rerum ipsarum: quæ inter tot opiniones dubia est: geometria vero est certissima in suis principiis & conclusionibus.

De figura q̃ res sit.

Thomas.

Scotus.

Iacobus faber.

Moiales.

Breue cōpendium geometrie theorice

a Thoma brauardino primū ex libris Euclidis Cāpani Archimedis & aliorū cōpilatū: deinde nōnullis additionib9. P.C.D. aliquātisper dilatatū. Habet quattuor libros partiales. Quib9 tale premittitur exordium.

GEometria scientia de magnitudine est arithmeticæ cōsecutiua: queadmodū rhetorica dialecticæ. vt inquit Aristoteles. Cui9 ordinis duplex est ratio. Prima quia arithmetica est ex simplicioribus q̄ geometria: ideo est & certior & prior scientia. Altera ratio est quia plurimæ passiones numerorū in arithmetica demōstratæ: postea magnitudinibus adaptant̄ in geometria. propter quod euclides geometriæ arithmetica3 interposuit. Sed nos seorsum in alio tractatu de arithmetica expediuim9: licet modo tantū introductorio. In hoc aūt cōpendio geometrica principia & cōclusiones tradere intendim9: permixtis tn̄ nōnūq̄ vbi opus erit arithmeticis cōclusionibus. Est aūt duxplex geometria theorica. s. & practica. Geometria theorica siue speculatiua (de qua hic intendimus) passiones magnitudinis & suarū specierū inuestigat sillogismo & rōne demōstratiua. vt cū ꝓbauerim9 trianguli oēs angulos intrinsecos æquales esse duobus rectis angulis. & sic de aliis multis. Verūtamē huiusmodi passiones: quas de magnitudinib9 demōstrare volum9: sunt pene oēs relatiue. vt æqualitas vel inæqualitas. regularitas vel irregularitas. cōmensurabilitas vl' incōmensurabilitas &c. licet nōnūq̄ & raro passiones absolutas inducamus. De his etiā geometricis passionibus solēt apud phl'os fieri altercationes an. s. sint res distīctæ a magnitudinib9 q̄ sunt taliū passionū subiecta vl' nō: Sed hec discutere ad aliā ptinet facultatē: ideo nihil aliud de talibus inpresentiarū dicemus: preter idquod in quæstiūcula præuia insinuauim9. Practica geometria mēsuras rerū corporaliū puestigat arte & īstrumētis. q̄ triplex subdistinguit̄. Altimetria de mēsuratione altitudinū: vt turriū & puteorum. Planimetria q̄ planities mēsurat vt latitudinē cāpi aut fluminis aut etiā maris. vt pt3 in arte nauali. Et solimetria q̄ spissitudines corpoꝝ mēsurat. & hac vtitur astrologia circa moles orbium celestium & stellarum dimetiendas. Instrumenta autem ad huiusmodi mensurationes aptissima sunt. astrolabiū. quadrās. chilindrū. armilla. torquetū. nauicula. & q̄dā alia: sed de his nihil ad præsens vbi solam theoricam geometriæ inquirimus.

Quid est geometria.

Duplex geometria.

Speculatiua geometria.

Practica geometria.

Liber primus nostri cópendij geometrie

de principiis huius artis: & de quibusdā cōclusionib9 q̄ ꝓximæ accedunt ad principia. Habet capita quinq̄.

Caput primū de principiis incōplexis q̄ sunt diffinitiones & diuisiones quorūdā terminorū cōmuniū in geometria.

Triplicia principia.
Diffinitiones.

SVPPONAMVS igitur in primis principia demonstrationũ. q̃ triplicia distinxit Aristoteles in posteriorib9. quædã enĩ sunt incõplexa. i. q̃ nõ sunt ꝓpões affirmãtes aut negãtes aliquid: sed potius sunt extrema ꝓpõnũ predicata: vt diffinitiones vel etiã diuisiones terminoꝝ. nõ quidẽ oẽs: sed auctentice & ab oĩbus approbatæ atq; ab antiquis acceptæ. Alia sunt principia cõplexa siue ꝓpões affirmatiuæ aut negatiuæ: & hmõi principiorum duo sunt genera.

Dignitates.

Quædã enĩ sunt ꝓpões per se notæ q̃ alias dicũtur dignitates vel maximæ ꝓpões: ab aliis aũt vocãtur cõmunes scientiæ vł animi cõceptiones: vt ꝙ oẽ totũ est maius sua parte & aliæ huiusmodi. de quibus etiã Aristoteles dicit ꝙ sunt pricipia cõmunia oĩbus sciẽtiis scđm analogiã. i. ꝓportionẽ: vel similem formã ꝓpõnũ: nõ aũt scđm eandẽ materiã terminorũ. Alia deniq; sunt principia scientiarũ ꝓpria: & sunt quædã ꝓpões imediatæ. i. quæ licet nõ sint per se notæ: nõ tñ habent mediũ siue antecedẽs per quod ꝓbentur demõstratiue. ideo supponũtur & non probantur in scientiis. vnde & suppositiones dicuntur. vel etiam petitiones: quia demonstrare volentes petunt sibi concedi talia principia. vt ꝙ a puncto ad punctũ sit protrahibilis linea recta in qualibet superficie plana. & sic de aliis multis in geometria. A diffinitionib9 igiẽ et diuisionibus exordium sumemus quæ significationes terminorũ exprimunt: & præcognitiones quid nominis dici solent in scientiis quæ supponũtur & non probantur. Primũ omnium terminorum geometriæ est magnitudo subiectum attributionis eius cui priuatiue opponitur punctus vel pũctũ.

Suppões.

Magnitudo quid sit.
Punctus qd.

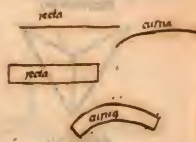
Est igitur magnitudo rei naturalis extensio. vel est res habens partem extra partem localiter situatam. Punctus vero sic diffinitur ab euclide. Punctus est cuius pars non est. i. res naturalis nõ habens partem extra partem situaliter: sed hæc quidem negatio priuans est non infinitans. neq; etiam negat talem dispositionem a re significata: sed potius negat talem cognotationem a termino significante. quod dicimus propter eos qui negant indiuisibilia in cõtinuo. nã alii simpliciter vt sonant verba accipiũt diffinitionẽ Euclidis pro rebus. posset tñ clarius dici ꝙ punctus est res inextensa vel inextensæ cõsiderata: sicut etiã vnitas dicta est rei discretio in arithmetica. Magnitudinis tres solæ sunt spẽs in ꝑdicamẽto quãtitatis linea. superficies. corpus. Linea est magnitudo vnã habens extensionẽ siue dimensionẽ: q̃ etiã longitudo appellatur. Superficies est magnitudo duas habens extensiones situales. i. longitudinem & latitudinẽ. Corpus vero est magnitudo tripliciter extensa: triplexq; habens interuallum: longitudinem videlicet latitudineꝫ & profunditatem. & hæc est magnitudinum perfectissima: quia post trinam non est quarta dimensio: vt Boetius probat ægregie in scđo libro suæ arithmeticæ ex differẽtiis positionum loci naturalis. quæ non possunt esse nisi sex: & earum quælibet duæ oppositæ vna dimensione implentur. siquidem dimensio omnis ad replendum locum facta est. & posuimus harum specierum diffinitiones affirmatiuas. idest sine negatione: ad euitandas cauillationes arguentiũ circa difficilem quæstionem de indiuisibilibus in continuo. Tres etiam possent

Alia diffinicio puncti.
Magnitudinis species tres.
Linea.
Superficies.
Corpus.

[handwritten margin note, partly cut off:] ...positiones naturalis sunt sex ... et sinistrum ... et deorsum ... ante ... retro ... dextrum et sinistrum ... vnam dimensionem et sursum et deorsum ... aliam ante et retro faciunt aliam

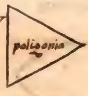
Puncti species tres.

dari species puncti priuatiue opposite supradictis specieb9 magnitudinis: sꝫ quia nō sunt in vsu reliquā tur. Et q̄uis linea superficies & corpus coiter ponātur. spēs specialissimæ in predicamēto quātitatis: solēt tñ diuidi in spēs accidentales q̄ dicūtur partes in modo. nā linearū alia est recta alia curua: & superficierū quædā est plana: alia cōcaua: &alia cōuexa. corporū etiā quædā terminātur ad superficies planas & q̄dā ad superficies rotūdas vel curuas vnam vel plures &c. Sed quia rectū & curuū cōcauū & cōuexū planū & rotundum sunt noīa figurarū de prædicamēto qualitatis: ideo ad declarationē istarum diuisionū dicendū erit de figura & de suis speciebus. nā figura & species eius sunt ꝓpriæ passiones magnitudinis & suarū specierū. Figurā ergo voco magnitudinē terminatā lineis aut superficieb9. ex qua diffinitione duo sequunt̄ clarissime. Primū est ꝙlicet oīs magnitudo sit figura: hæc tñ prædicatio non est ꝑ se: linea est figura: ideo cōmuniter negatur nō quia falsa sed quia nō est scientifica. hoc patet quia linea solū terminatur ad pūcta. vnde patet ꝙ figura & magnitudo terminata vel nō infinita nō cōuertibilr̄ se habent neq̄ vnū est diffinitio alterius vt aliq voluerūt. nā magnitudo finita lineā cōprehēdit. Secūdo sequit̄ ex diffinitione figuræ ꝙ duæ sunt imediate species figuræ. altera q̄ cōuertitur cū superficie lineis terminata: & dicitur figura plana aut superficialis. altera est cōuertibilis cū corpore terminato ad supficies: & vocat̄ figura solida aut corporalis. Plana figura est supficies linea aut lineis teriata. quare sequit̄ ꝙ duæ sint species eius. s. plana rotunda q̄ ad vnā lineā terminat̄. & plana angularis q̄ alias dicit̄ laterata aut poligonia: &hæc ad plures lineas terminatur q̄ cū sint rectæ: figura rectilinea appellatur. posset dari tertia species vt figura plana mixta. i. partim rectilinea & partim curuilinea: de qua nusq̄ est sermo apud geometras. Rotūdarū planaꝝ quædā est regularis & ꝓprie dicitur circulus. alia irregularis q̄ multiplr̄ variari solet multisq̄ noībus appellari. Circul9 itaq̄ est figura plana vnica linea terminata q̄ circūferētia noīatur in cui9 medio est pūctus a quo oēs lineæ rectæ vsq̄ ad circunferētiā ductæ sunt æquales. & pūctus ille centrū circuli dicitur. superficies vero intra circūferentiam cōtenta area circuli nūcupatur. & hoc etiā est obseruādū in oībus aliis figuris planis: quia nomē figuræ cuiuslibet includit circūferentiā & areā. Circunferentia autē est sola linea vel lineæ terminales. Area vero est superficies intra lineas posita. Rotūda irregularis est figura plana vnica linea curua terminata in qua non est dabile centrū a quo omnes lineæ rectæ vsq̄ ad circunferentiā sint æquals. & huius generis (vt diximus) indeterminatæ sunt species. Planarū angularium figurarū infinitæ sunt species iuxta numerum laterum & angulorum incipiendo tñ a ternario. s. triangulus. quadrangul9. pētagonus. exagonus &c. Triangul9 est figura poligonia triū tantum linearū rectarū & totidem angulorū. quadrangulus quattuor. pentagon9 quinq̄. & sic de aliis. Et in quolibet istorū generū est adhuc diuisio regularium & irregularium figurarum. nā triangulorū ille est regularis cuius omnes lineæ ad inuicem sunt æquales: similiter & anguli ad seipsos. Irregularis per oppositum diffinitur: quia neq̄ omnes lineas neq̄ omnes angulos habet æquales.



Circulus.

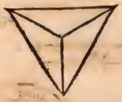
Triangulus.



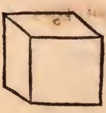
Quadratum.

Figura egredientiū angulorum.

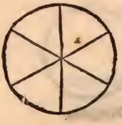
Tetracedron.



Exacedron.

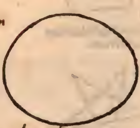


Sphera.



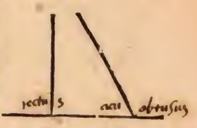
Corpus ouale.

Corpus lenticulare.



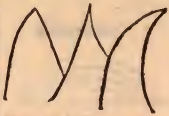
eodē modo diceretur de quadrāgulo regulari & irregulari. & de pētagono: & de aliis. Est preterea hui9 generis alia diuisio: nā figurarū poligoniarꝶ q̄dā sunt simplices: alie egredientiū angulorū q̄ cōpositē dici possunt. Figura simplex ex primo cōcursu linearū solos angulos intrinsecos habet. Cōposita vero ex duplici aut multiplici earūdē linearū cōcurrentia duos aut plures ordines angulorū habet: de quib9 figuris postea peculiaris fiet sermo. Solida aut corporea figura est illa q̄ superficie vel superficiebus terminatur. vnde patet duas esse ei9 species: sicut in figura plana dicebatur. s. solidā rotundā & solidā lateratā vel angularē. Rotundū corpus est quod vnica superficie curua continetur & terminatur; cuius prima species est figura rotūda regularis q̄ ꝓprio nomine sphera dicit̄: & diffinit̄ ad similitudinē circuli. Sphera est corp9 vnica superficie contentū: in cuius medio est pūctus a quo oēs lineæ rectæ vsqꝫ ad superficiē terminalē sunt æquales: & ille punctus centrū spheræ dicitur. Rotunda irregularis figura solida est: in qua nō pōt dari talis punct9 vel centrum: cuius etiā indeterminatæ sunt species. duas tñ earū specialr̄ noiat Euclides: figurā oualē & lēticularē. In ouali axis est linea lōgissima: in lēticulari vero breuissima omniū aliarū. & dicitur axis in corporibus linea super quā fit motus corporis ad similitudinē illius ligni quod dicitur axis in curru. sꝫ hoc nomen axis iā nō est geometricū; sed potius astrologicū. Sphera licet sit species specialissima sicut & quodlꝫ aliud nomē figuræ regularis: tamen diuidi solet accidentalr̄ in spherā solidā & concauā. Solida sphera vnicā tantū supficiem habꝫ cōuexā. s. ad quā terminatur. Concaua sphera duabus terminatur superficiebus: altera cōuexa exteriore: & altera cōcaua interiore. Lateratum aut angulare corpus: est quod ad plures terminatur superficies planas: cuius generis similiter ꝓcedit diuisio per figuras regulares & irregulares. Regulares sunt figuræ solidæ quarū oēs superficies pariter & anguli sunt æquales: & ponitur ab euclide solū quinqꝫ græcis nominib9 sic dictæ: tetracedrō: exacedron: octocedrō: duodecedrō & icocedrō. Irregulares figuræ solidæ p inequalitatē superficierū & āgulorū diffiniūtur & p infinitas species diuidūt̄: q̄ oēs significāt corpora serratilia vt pyramides: colūnas: asseres: lateres: cuneos &c. Pōt dari tertia spēs figuræ solidæ sicut & figuræ planæ. s. figura solida mixta q̄ partim est plana & partim rotūda: vt colūna vl̄ pyramis rotūda. de qua specie geometrici parū curant. Sed quia in diffinitionib9 figurarū sepius ponebatur angulus. de huius noīs diffinitiōe & diuisione dicam9 oportet. Angulus est duarū magnitudinū contactus nō directus vt duarū linearū aut duarū superficierū. vel clarius sic. Angulus est magnitudo ex altera parte terminata & cōtenta a duab9 lineis vel duab9 superficieb9 nō directe sese cōtingētib9. Cōtactus directus lineæ ad lineā: est quando ex eis duabus fit vna linea recta. alias vero semper est indirectus cōtactus. similis ratio est de cōtactu directo aut indirecto duarū supficierū. Angulorū alius est plan9: ali9 vero dicitur angulus solidus. Angulus planus est superficies terminata ad contactū duarū linearū nō directū. Solidus vero angulus est corpus terminatū ad contactum nō directū duarū superficierū. Anguli plani tres sunt species subalternæ: scꝫ

Anguli rectilinei.

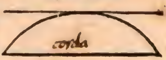


angulus rectilineus. curuilineus. & mixtus. Rectilineus angulus planus est ille quē continent duæ rectæ lineæ nō directæ cōcurrentes. Curuilineus ex cōcursu duarū linearū circulariū. Mixtus vero ex linea recta & curua sese cōtigentibus ꝓcedit. Rectilinei anguli plani tres sunt species. angulus rectus. obtusus. & acutus. Angulus rectus est quē cōstituit linea recta cadens sup lineam rectā perpendiculariter. i. directe ad modū perpendiculi: itaq; faciat cū ea perfectā crucē. vnde & a græcis linea orthogonaliter cadēs dicitur. Angul9 obtusus est rectilineus maior recto. Acutus vero minor recto. & cōstituuntur ex lineis rectis nō perpēdiculariter se secantibus: sed oblique ad modū crucis sancti andreæ. Curuilineus angulus tres habet species. s. angulū cōcauū: conuexum: & medium. Angulus concau9 est quē cōtinent duæ lineæ arcuales ex parte interiore se tangentes. Cōuexus angulus ab eisdē lineis ex parte exteriore cōcurrentib9 cōtinetur. Medium angulū duæ lineæ circulares faciunt quarum altera ex parte interiore: altera ex parte exteriore ad idē punctum cōcurrunt. Mixtus deniq; angulus simil'r in tres species diuiditur. Prima est angulus cōtingentiæ: qui causatur ex cōtactu lineæ rectæ ad curuā exterius. Secunda est angul9 semicirculi: quem facit diameter circuli cum circunferētia eius ex parte interiore. Tertia species est angulus portionis circuli: hunc constituit corda cōcurrēs circunferentiæ intra circulum. Dicitur autē diameter circuli linea recta transiens per centrum circuli: quia ipsum diuidit in duas partes oīno æquales: q̄ sunt semicirculi. s. medietates circuli. Corda vero dicitur linea recta intra circulum: q̄ tamen nō tangit centrum circuli: eoq; ibi fit q̄dam figura ad modū arcus sagittarii: cui9 arcus linea illa recta apparet eē corda. Et quia talis linea diuidit circulū in duas partes inæquales: hic est q angulus portionis circuli iterū diuiditur in duas species. q̄ sunt: angulus portionis maioris. & angulus portionis minoris: quarū diffinitiones claræ sunt. hæc de angulis planis. Angulus aūt solidus qualiter sit diuidēdus in species dicem9 infra in principio quarti libri hui9: ne amplius extendamus hoc primum caput: in quo prelibatæ sunt diffinitiones quid nominis omnium principalium vocabulorum totius geometriæ.

Anguli curuilinei.



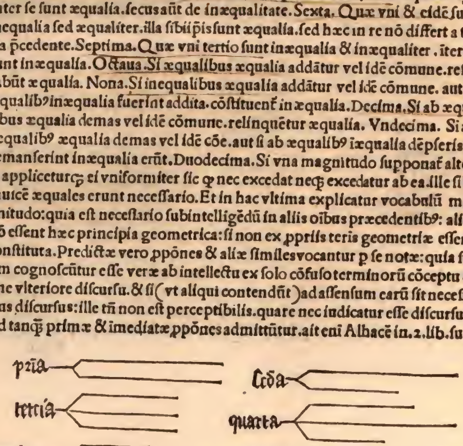
Anguli mixti.



Caput scđm de cōplexis principiis cōmunib9 geometriæ: q̄ dicūtur dignitates vel ꝓpōnes p se notæ: vel cōmunes animi cōceptiones: aut cōmunes scientiæ.

PRETER incōplexa geometriæ pricipia p̄missa: sunt alia q̄dā cōplexa tū coīa tū ꝓpria demōstrationū geometricarū elemēta: q̄ dicuntur ꝓpōnes imediate. i. indemōstrabiles: sed ad eas fit vltima resolutio cuiuslibet demōstratiōis geometricæ. Inter quæ principia duce Aristotele in ꝓhæmio phisicorū magis coīa preordinare cōueniet. deinde in sequēte cap. veniemus ad principia ꝓpria. Hæc tñ distinctio principiorū cōmuniū & ꝓpriorū geometriæ nō est sic accipienda. vt credam9 aliquā ꝓpōnē esse in geometria principiū q̄ eadē sit etiā principium in alia scientia. & ꝓpterea dicatur principiū cōmune. alia vero ꝓpō q̄ in sola geometria pōt esse principiū & nō in alia scientia sit principiū ꝓpriū

geometriæ.hoc enī falsum esse nō solum opinamur:sed ꝑ certitudinē doctri næ posterioristicæ tenemus.quādoquidē nulla ꝓpō ex terminis geometriæ constituta esset apta ad aliqd ꝓbandū in arithmetica vel aliqua alia scientia. sed vt recte docet Aristoteles q̄libet scientia sicut habet ꝓprios terminos:ita habet ꝓprias ꝓpōnes siue principia siue cōclusiones. Dicuntur ergo aliqua principia esse cōmunia vel ꝓpria in geometria rōne formæ nō rōne materiæ: nā si de materia ꝓpōnis loq̄mur q sunt termini. oē pricipiū geometriæ est ꝓpriū geometriæ: Si vero ad formā ꝓpōis attēdam⁹:ē aliqđ pricipiū geometriæ cui alia ꝓpō silis fore est pricipiū arithmeticæ vel alteri⁹ sciētiæ: & tale dicitur pricipiū cōmune ad plures scientias nō quidē simplr sed scđm analogiam vel ꝓportionē vt prius dicebam⁹.i.scđm similitudinē formæ ꝓpōnis. est & aliud principiū geometriæ cui nullu₃ aliud simile neq₃ in materia neq₃ in forma pōt esse principiū arithmeticæ vel alteri⁹ scientiæ: & ꝓpterea dicitur principiū ꝓpriū geometriæ. In hoc ergo caplo trademus principia cōmunia geometriæ: insequēte principia ꝓpria ad sensum datū. Cōmunes itaq₃ scientiæ.i.cōmunia principia scientiarū inumera sunt: sed ea q̄ magis in geometria requirūtur hæc pauca erūt. Prima cōmunis scientia. Omne totū est equū oībus suis partibus simul sumptis.& ecōuerso.imo quidā dicūt ꝙ totū nil aliud est ꝙ̄ oēs suæ partes simul collectæ. Secūda. Omne totū est mai⁹ sua parte.& accipitur hic totū cathegoreumatice nō sincathegoreumatice sicut in arte sophistica. Tertia. Omnes partes eiusdē denominationis in eodē toto vel in totis equalibus sunt sibi inuicē æquales. Quarta. Partes alterius diuersæq₃ denoīationis in eodē toto.aut partes eiusdē denoīationis in totis inequalibus.necessario sunt sibiipsis inequales.quia maioris totius pars eade₃ maior est & minoris minor. Quinta. Quæcūq₃ vni & eide₃ sunt æqualia. ipa inter se sunt æqualia.secus aūt de inæqualitate. Sexta. Quæ vni & eidē sunt inequalia sed æqualiter.illa sibiipis sunt æqualia.sed hæc in re nō differt a tertia p̄cedente. Septima. Quæ vni tertio sunt inæqualia & inæqualiter. īter se sunt inæqualia. Octaua. Si æqualibus æqualia addātur vel idē cōmune.resultabūt æqualia. Nona. Si inequalibus æqualia addātur vel idē cōmune. aut si æqualib⁹ inæqualia fuerint addita.cōstituent̄ inæqualia. Decima. Si ab æqualibus æqualia demas vel idē cōmune.relinquētur æqualia. Vndecima. Si ab īæqualib⁹ æqualia demas vel idē cōe.aut si ab æqualib⁹ īæqualia dēpseris.q̄ remanserint inæqualia erūt. Duodecima. Si vna magnitudo supponat̄ alteri applicetur q₃ ei vniformiter sic ꝙ nec excedat neq₃ excedatur ab ea.ille sibi inuicē æquales erunt necessario. Et in hac vltima explicatur vocabulū magnitudo:quia est necessario subintelligēdū in aliis oībus præcedentib⁹: alias nō essent hæc principia geometrica:si non ex ꝓpriis teris geometriæ essent constituta. Predictæ vero ꝓpōnes & aliæ similes vocantur ꝑ se notæ: quia statim cognoscūtur esse veræ ab intellectu ex solo cōfuso terminorū cōceptu & sine vlteriore discursu.& si (vt aliqui contendūt) ad assensum earū sit necessarius discursus:ille tñ non est perceptibilis.quare nec indicatur esse discursus: sed tanq̄ primæ & imediatæ ꝓpōnes admittūtur.ait enī Alhacē in.2.lib.suæ



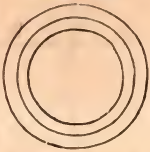
perspectiuæ. q hæc ppō omne totū est maius sua parte: nō cōprehendit solo intellectu q est habitus principiorū: sed apprehensio eius est p sillogismū cōpositū ex intentionibus terminorū: quia tñ intellectus hoīs in tali discursu velocitatē argumentationis facit in tēpore breuissimo & insensibili: ideo putat q hæc ppō cōprehēdatur solo intellectu. hæc ille. Et nō solū hoc verū esse putant pspectiui in ppōnib9 valde cōfusis & generalib9: sed etiā in multis distinctis & particularib9. Dicūt enī q multæ sunt intētiones visibiles q̄ non cōprehendunt solo intellectu vel sensu: vt distantia. magnitudo. figura. sit9. mot9. &c. s3 ad eaꝝ distinctā noticiā necesse est cōcurrere fantasiā & rōnē discursiuā de quib9 infra lati9 dicem9 iuxta finē primi libri nostræ breuis pspectiue.

Caput tertiū de principiis ppriis geometriæ q̄ dicūtur suppōnes aut petitiones. vel assumptæ ppōnes imediate.

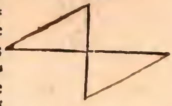
VLTIMO prælibanda sunt ppria geometriæ principia: q̄ magn9 Euclides posuit q paucissima. talia enī in qualibet scientia nō sensuali rara sunt & notatu dignissima. Petitiones itaq geometricæ quinq sunt numero. primæ duæ de lineis. tertia de angulis. reliquæ duæ de superficieb9. Prima petitio de recta linea est hæc. a quolibet puncto ad quēlibet punctū in superficie qualibet rectā lineā ducere. Ponit enī euclides oēs has petitiōes sub modo infinitiuo cōfusas nō sub indicatiuo determinatas: quia nō sunt ppōnes ab eo pbatæ: sed supposita quædā dicta modalium ppōnū de possibili. Posset tñ addi huic primæ petitioni ei9 alia collateralis. q inter q̄libet duo pūcta data linea recta est oīm cōterminabiliū breuissima. Secūda petitio de linea curua est. super centrū quodlibet qtūlibet occupando spaciū in qualibet superficie circulū describere. & accipit hic circulu3 improprie p linea curua q̄ est circūferentia & termin9 circuli: sepe enī auctores abutūtur vocabulis & noīa figurarū adaptāt terminis earū & vice versa. Tertia petitio est de angulis. Oēs angulos rectos sibiinuicē esse æquales. Forma enī recti consistit in indiuisibili & ideo variari nō pōt. Mensurant aūt anguli quanti sint ad seipsos scdm æquales longitudines suarū linearū: & per lineam tertiā q̄ triangulū perficit. nā scdm pportionē tertiæ lineæ in vno angulo ad tertiā in alio erit pportio anguli ad angulū. Quarta petitio est iā de superficie sed affirmatiua talis. Si recta linea sup duas rectas venerit: fueritq duo anguli interiores ex eadē parte lineæ cadentis minores duob9 rectis angulis: illas duas lineas priores ex eadē parte longius ptractas cōcursum petere & tandē cōcurrere. quare sequitur tales tres lineas superficiē claudere & figurā perfectā cōtinere. Quinta petitio etiā de superficie sed negatiua est hæc Solas duas rectas lineas superficiē claudere nullā. quia duæ lineæ recte ex vna parte cōcurrentes: ex alia quanto plus plongātur tanto plus distāt a seipsis vsq in infinitū. Sequitur ex his manifeste triangulū esse primā figurarū planarū & rectilinearū: nā simplr circul9 est pria oi3 figurarū. Predictæ aūt ppōnes l3 nō sint p se notæ. qa egēt aliquali declaratiōe pter cōcept9 teriorū: tñ dicūtur imediate quia nō habēt mediū vel antecedēs quo demōstrari possint. ideo suppōnes & petitiones vocātur: quia in geometria supponūtur & nō pbant

Prima petitio.

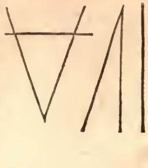
Secunda petitio.



Tertia petitio.



Quarta Quinta petitio.

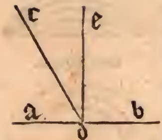


eſſe veræ: ſed potius volētes demōſtrare petūt eas ſibi cōcedi eē veras.

Caput quartū de primis cōcluſionibus geometriæ ꝗ pertinēt ad lineas & angulos figurarū ſimpliciū rectilinearū.

MAGNITVDINIS paſſiones quas geometrici cōſiderant in genere quidē pauciſſimæ ſunt: vt diſtenſio. diuiſibilitas. repletio occupatio &c. ſed in ſpeciebus plurimas inueſtigant. hoc eſt de lineis. ſuperficiebus. & corporibꝰ ꝗ ſolū tres ſunt magnitudinis ſpecies in genere quātitatis. Immo nec de lineis aliquas demōſtrant paſſiones niſi in ordine ad ſuperficies & corpora ꝗ ſolæ figuræ ſunt: de quibus ipſi maxime curant. Incipiemus igitur dicere de lineis ad angulū cōcurrentibus in hoc caplo. deinde veniemꝰ ad ſuperficies lineis terminatas: & tandē ad corpora ꝗ ſuperficiebꝰ claudūtur. ſic eni ſeruabimꝰ ordinē rectū ex minis p media ad maxima deueniendo. Sit igitur oīm cōcluſionū geometricarum hæc prima: licet euclides ab ea non inceperit.

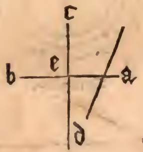
Prima concluſio.



Si recta linea ſuper aliā rectā lineam ſteterit: duo anguli in quolibet latere aut ſunt recti aut duobus rectis æquales. Ex quo patet. Totum ſpacium ꝙ circumſtat aliquem punctum in plano quattuor angulis rectis eſſe æquale.

Nam ſi ſuper lineā a b incidat linea c d vel eſt ſuper eā ꝑpendiculariter cadēs vel non: ſi ſic habent duo anguli recti in forma ꝑ diffinitionē anguli recti: ſi nō ſit perpendiculariter cadens. dico ꝙ erunt anguli equales duobus rectis: licet nō ſint in forma recti. quod oſtendo ſic: ſit alia linea e d ꝑpendiculariter ſuper a b lineā: eruntq duo anguli a d e & e d b recti per diffinitionē anguli recti vt priꝰ: ſed duo anguli a d c & c d e adequantur angulo a d e per primā animi cōceptionē: ergo idē duo anguli cū angulo e d b erūt equales duobus rectis per tertiā animi conceptionē. quare oēs illi tres anguli ſunt equales duobꝰ rectis. Sed angulus c d b obtuſus eſt equalis duobus ex illis: qꝛ ſunt oēs eius partes: ergo per quintā animi conceptionē angulus c d b obtuſus cū angulo a d c qui eſt accutus eſt equalis duobus rectis. & hoc eſt quod volumus. Correlariū ptꝫ qꝛ ex quo medietas ſpacij ꝗ eſt ſuꝑ punctū d valet duos rectos: alia medietas ſimiliter inferior valet duos rectos: ergo totū ſpaciū valet quattuor rectos. et ꝙtūcūq illud ſpaciū diuidatur in multos angulos cū oēs illi anguli ſint partes illius ſpacij totius: oēs preciſe valent quattuor rectos: vt ptꝫ per primā cōmunē ſcientiam.

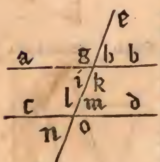
Secunda concluſio.



Oīm duarū linearū ſe inuicē ſecantiū oēs anguli cōtra ſe poſiti ſunt æq̄les.

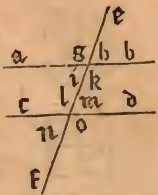
Iſta patet per premiſſam: nā duo anguli a e c & c e b cōiunctim ſunt equales duobus rectis. ſimiliter duo anguli c e b & b e d ſimul iuncti ſunt equales duobus rectis. ergo duo anguli primi ſimul ſunt equales duobus poſtremis. dēpto ergo angulo cōmuni puta c e b reſidua erunt equalia. ſ. a e c & d e b per ſextam cōmunem ſcientiam: & iſti ſunt anguli cōtra ſe poſiti: ergo anguli contra ſe poſiti ſunt equales quod erat demonſtrandū. & ſimili modo probat̃ de reliquis duobꝰ angulis cōtra ſe poſitis.

Tertia concluſio.



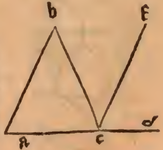
Si duabus lineis equediſtantibus tertia linea ſuperuenerit: quales quantoſq ſuꝑ vnā illarū fecerit angulos: tales tantoſq faciet ſuper reliquā. Ex quo manifeſtū eſt ꝙ omnis angulus extrinſecus angulo intrinſeco ſibi oppoſito eſt equalis. & ꝙ quilibet anguli coalterni ſibi inuicē ſunt æquales. & ꝙ quilꝫ duo anguli intrinſeci & ex eadē parte cōſtituti duobꝰ rectis ſuut æquales.

Supponamus hic diffinitionē linearū equediſtantiū quas greci paralellas vocant. ſunt eni linee tātum a ſeipſis diſtantes in principio ſicut in medio & fine earum. Sint ḡ due linee equediſtātes a b & c d quibꝰ linea e f ſuperueniat dico ꝙ quales & quātos angulos cōſtituit linea e f ſuper lineā a b tales & tātos cōſtituit ſuper lineā c d & eodē ordine: ita ꝙ anguli ſuperiores linee a b equantur angulis ſuperioribus linee c d & inferiores inferioribus ex eadē parte linee e f ſumptis. Verbigratia angulus g adequatur angulo l & angulus h ſimiliter angulo m & ita de alijs. ¶ Probatur. nā ſi angulus l non ſit equalis angulo g. ergo alter illoꝝ erit maior: ſit angulus l maior: ſed angulus g & angulus h



sunt equales quia sunt cōtra se positi per premissaȝ: ergo angulus l est maior angulo k: sed duo anguli l ꝛ m sunt equales duob⁹ rectis per primā cōclusionem: ergo duo anguli k ꝛ m sunt minores duobus rectis per septimā cōmunē scientiam. ergo per quartā petitionē due linee a b ꝛ c d si ꝓtrahantur in partes b d cōcurrunt: ꝛ ꝑ consequēs nō sunt eque distantes qđ est contra ipotesim: erunt igitur duo ānguli g ꝛ l equales qđ erat ꝓbandū: eodē modo arguitur de h ꝛ m. similiter de i ꝛ n k ꝛ o qui sunt inferiores sub lineis equedistantibus ꝑdictis. ¶ Patet igitur pima pars correlarij solū exponēdo terminos: nā quorūlȝ duorū angulorū quos equivalere ostendimus. alter vocatur itrinsecus q.s. est inter equedistantes lineas: ꝛ alter extrinsecus qui. s. est exterius vel sub vel supra. Secūda pars patet modicū transeundo ꝛ terminos exponēdo: dicūtur igitur anguli coalterni qui habent alternatū situ; q̄ꝫtū ad superius ꝛ inferius: dextrū ꝛ sinistrū linee cadentis: cuiusmodi sunt k ꝛ l: ꝙ sint equales ꝓbo. q: anguli g ꝛ l sunt equales per primā partē correlarij. sed angulus k est equalis angulo g qui contra se ponitur per premissam: ergo angulus k est equalis angulo l per tertiā cōmunē scientiaȝ: ꝛ eodē modo arguitur de i ꝛ m qui sibi sunt anguli coalterni. Tertia pars statim ptȝ. s. qđ duo anguli intrinseci ex eadem parte sunt equales duobus rectis puta k ꝛ m nā l ꝛ m: per primā sunt equales duobus rectis: sed k est equalis l per secundā partē correlarij: ergo etiā k ꝛ m valent duos rectos.

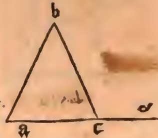
Quarta conclusio.



Cuiuslibet triāguli oīs āgul⁹ extrinsec⁹ duob⁹ itrinsecis sibi oppositis ē eq̄lis.

Vocatur aūt angulus extrinsecus q̄ cōstituitur ex ꝓtractione alicuius lateris incontinuū ꝛ directū. vt si in triangulo a b c ꝓtrahatur latus a c vsqꝫ ad d. tūc angulus d c b dicitur extrinsecus: ꝛ duobus sibi oppositis intrinsecis equalis. s. a ꝛ b. Quod ꝓbo sic: a puncto c ꝓtrahatur linea in f equedistā ter lateri a b: eritqꝫ angulus f c b equalis b angulo intrinseco: q: sunt coalterni ꝓpter lineā b c incidentē super eisdē duabus lineis equedistantib⁹. Et angulus f c d est equalis a angulo intrinseco. q. s. angulus f c d est extrinsecus ad eū ꝛ oppositus ei ꝓpter lineā a d incidentē super eisdem duabus lineis equedistantibus vt ptȝ per premissaȝ: quare totus angulus b c d est equalis duobus angulis intrinsecis. s. a ꝛ b ꝑ primā cōem scientiā. Eodē mō ꝓbaret de aliis āgulis extrinsecis i quolȝ triāgulo.

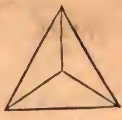
Quinta conclusio.



Omnis triangulus habet tres angulos equales duobus rectis.

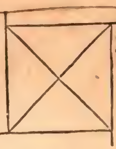
Nam totus angulus b c d extrinsecus est equalis duob⁹ intrinsecis scȝ a b sibi oppositis ꝑ premissaȝ. sed si addas toti angulo illi extrinseco angulū c intrinsecū cōiūctū sibi totū erit equale duob⁹ rectis ꝑ primā: ergo duo anguli a ꝛ b cū angulo c intrinseco sunt eq̄les duob⁹ rectis ꝑ quintā cōem scientiā.

Sexta conclusio.



Omnis figuræ poligoniæ oēs anguli pariter accepti tot rectis sunt æquales quot sunt ipi duplicati dēptis quattuor. Ex quo ptȝ ꝙ q̄libet sequēs in ordīe figurarū poligoniarū addit supra præcedentē duos rectos in valore.

Hec ꝓpositio ptȝ per precedentē cū resolueris quālibet talē figurā in tot triangulos quot sunt anguli eius. hoc aūt fit ducendo a quolibet angulo eius ad punctū in medio signatū lineā rectā. qm̄ omnes illi anguli illorū triangulorū sunt partes angulorū talis figure poligonie: exceptis hijs q̄ sunt circa punctū mediū. ꝛ illi per correlariū prime sunt precise quattuor rectis equales. ptȝ igitur ꝓpositum. Verbi gratia. sit pentagonus a b c d e: dico ꝙ eius anguli quinqꝫ sunt equales decem rectis exceptis quattuor: hoc est sex rectis sunt equales. signando igitur signū aliquod in medio ꝛ sit f. ducatur a singulis angulis linea recta: eruntqꝫ quinqꝫ trianguli iuxta numerū angulorū pentagoni: quorū anguli valent decem rectos per premissam: demptis igitur hijs qui ad f sunt q̄ valent quattuor rectos reliqui valent sex rectos. Patet correlarium inductiue.



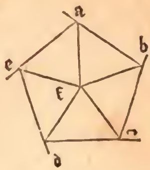
Huic cōclusioni addit̄ alia de valore angulorū extrinsecorū taliū figurarum Qm̄ oīs figuræ poligoniæ omnes anguli extrīseci q̄ttuor. rectis sunt equales.

Sunt eni extrinseci ꝛ intrinseci simul bis tot rectis equales q̄t fuerint anguli figure principalis per primā conclusionē. intrinseci aūt tot rectis sunt equales quot sunt anguli duplicati exceptis. 4. vt nūc ostendim⁹: ergo extrinseci tantū. 4. superaddūt. Huius exemplum habes: si ducas lineam b a in cōtinuū ꝛ directū ex parte a: ꝛ lineā c b in partem b. ꝛ sic de aliis. vt patet in figura. Et intelligitur cōclusio de angulis extrinsecis simpliciter ꝛ non dupliciter acceptis: itaqꝫ super quolibet angulo intrinseco accipiatur vnus tantum extrinsecus et non duo.

Septima conclusio.

Tres figuræ regulares scilicet triangulus quadrangulus & exagonus replēt locum et nullæ aliæ.

Dicitur aūt figura regularis q̄ est equiangula ꝛ equilatera: replere aūt locū dicitur hic occupare totū spaciū qđ circūstat aliquē punctū in plano. Pars affirmatiua ꝓbanda est de triangulo ꝛ exagono: de



quadrato eni planũ est: q2 cũ habeat omnes angulos suos in forma rectos. igitur si .4. simul ponãtur totũ spaciũ occupabunt: ꝛ per ↄ̃ns totũ locum replebunt. De exagono aũt ꝓbatur: q2 cũ .6. anguli eiusdẽ sint equales .8. rectis per premissaꝫ tres eius anguli valebunt. 4. rectos. igitur si tres exagoni ponantur simul circa punctũ in plano replebunt locũ. De triangulo similr̃ p3. qm̃ angul⁹ exagoni est duplus ad angulũ trigoni si fuerit regularis: qđ p3. q2 tres anguli exagoni valent duplum ei⁹ ꝙ sunt 3. ãguli trigoni: q2 valẽt 4. rectos. ẽ in duplo plures trigoni reqrũtur ad repletionẽ loci ꝙ̃ exagoni: sed tres exagoni replent: ergo sex trigoni replebũt. Cõfirmatur. q2 tres anguli trigoni valent duos rectos. ẽ .6. valebunt. 4. ꝛ sic replebunt locũ. locũ ergo replere dicitur. 3. exagoni. 4. tetragoni ꝛ .6. trigoni equilateri. Negatiua pars ꝓbatur. s. ꝙ nulla alia figura regularis sit apta replere locũ: supposito ꝙ quelꝫ sequens figura habet maiores angulos ꝙ̃ prior precedens: qđ p3 ex correlario premisse: nã quelꝫ posterior addu (per correlariũ p̄cedentis) supra precedentẽ in valore duos rectos ꝛ vnũ tantũ in numero. sed nullus angulus vn⁹ põt valere duos rectos ꝑ diffinitionẽ anguli plani: q2 ad valorẽ duorũ rectorũ requiritur cõtactus linearũ directus: cũ sit medietas spacij plani. ẽ transmittitur aliqđ ad reliquos. sed nõ nisi ad oẽs: q2 oẽs anguli sunt equales in figuris regularib⁹: de quib⁹ hic loquimur: quare oĩs angulus figure posterioris maior est quolꝫ angulo prioris figure. Ex quo p3 ꝙ nulla figura post exagonũ nata est replere locũ: q2 si accipiantur tres anguli regularis figure post exagonũ illi superabũdant. nulli etiã duo anguli replent locũ: sicut nec due linee claudũt superficiẽ: q2 eni nullus angulus ꝙ̃tumcunq3 magnus valet duos rectos: ergo nec duo anguli valent quattuor rectos per diffinitionẽ anguli plani. Pentagonus etiã nõ replet. q2 .3. anguli eius nõ valẽt quattuor rectos: alioqui haberet angulos ita magnos sicut exagonus: ꝛ quattuor eius anguli plus quattuor rectis valent. q2 sequitur tetragonũ in ordine figurarũ. ¶ Hec .7. cõclusiones sint de isto capi͠o: quarũ nulla est q̃ nõ dependeat a p̄cedẽti ꝛ ad sequẽtẽ nõ assumatur: excepta prima q̃ ex imediatis ꝓpõnib⁹ infertur. ꝛ vltima q̃ nõ assumit ad aliã qm̃ postrema est. Et scđm hũc modũ augetur demõstrationes in post assumẽdo scđꝫ phm̃ in posteriorib⁹. Oẽs quoq3 in phi͠a nobis deseruiũt.

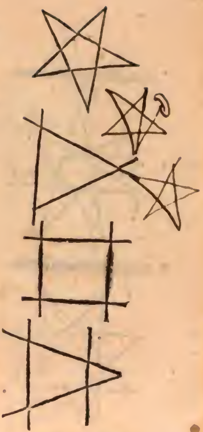
Caput quintũ de angulis figurarum regredientium angulorũ quæ sunt compositæ.

N FIGVRIS planis duo posuimus genera. s. figuras simplices quæ solos intrinsecos habent angulos: & figuras cõpositas q̃ multplices angulos ostendũt tã intra q̃ extra figuras Has peculiari vocabulo figuras egredientiũ angulorũ vocant. de quib⁹ rarus est sermo apud priscos geometricos: nã primus eorũ qui de hac materia locuti sunt: fuit Campanus cõmentator Euclidis qui sup .15. cõclusione primi libri de solo pentagono egredientiũ angulorũ parũ tetegit & hoc nõ nisi satis casualiter: hac de causa de talib⁹ figuris pauca trademus & valde generaliter: q vestigia antiquorum insequi statuimus in his nostris introductionib⁹. Dicit ergo figura egrediẽtiũ angulorũ illa plana & poligonia aut rectilinea cui⁹ prima latera in vtranq3 partẽ sunt protracta extra figurã donec iterũ cõcurrãt bina & bina. Et cum dictarũ figurarũ possint q̃dã esse regulares aliæ irregulares: in præsentiarũ de solis regularib⁹ agere intendim⁹. premittentes modũ generalẽ descriptiõis figurarũ regulariũ. Cũ eni circul⁹ sit oĩm figurarũ prima ac pinde regularissima: si descripto circulo occulto. i. nõ colorato in papiro: circunferentiã ei⁹ in tot partes æquales diuiserim⁹ quot angulorum figuram facere voluerimus: & a quolibet illius sectionis pũcto ad alterũ lineã coloratã duxerimus: habebimus figurã rectilineã regularẽ. hac tñ obseruata differentia: ꝙ in descriptiõe figuræ simplicis linea q̃libet ꝓcedat a puncto ꝓximo p̄cedente ad ꝓximuꝫ sequentem. & sic deinceps nullo pũcto sectionis medio dimisso. Sed in figuris egredientũ angulorũ linea q̃libet nõ ad proximũ punctũ sed ad tertium vel quartũ aut ad aliquẽ aliũ pũctũ teriari debet mediis interscalariter dimissis. Aduertendũ etiã ꝙ figuræ regulares egredientium angulorum multiplices sunt & per varios ordines distribuũtur. In primo eniꝫ ordine sunt illæ q̃ post

alias sup. 3

diffinitio figure ingredientis

angulos intrinsecos figurae simplicis habēt singulos aegredientes angulos: idest super vnum angulū intrinsecum vnicū angulū aegredientē: in secndo ordine figure habent duplices angulos aegredientes: itaq super vnū angulum intrinsecū figure simplicis habent duos angulos aegredientes: in tertio ordine tres: in quarto quattuor: & sic per infinitos ordines procedēdo. Ergo qui super circulo occulto & in plures partes equales diuiso voluerit describere figuram aegrediētium angulorū primi ordinis: lineas laterales protrahere debet a puncto adpunctū vno tantum pūcto sectionis medio interscalariter dimisso: in figuris secundi ordinis duobus punctis mediis relictis: in tertiotribus: in quarto quattuor: & sic deinceps. His praelibatis ponamus paucas conclusiones.

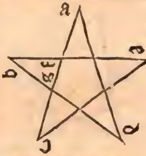


Prima conclusio.

Figurarum egredientium angulorum pentagonus est prima simpliciter.

Ista probat̃ ex principijs immediatis: qm̃ ante penthagonū simplicē nō sunt nisi due figurarū species triangulus & quadrangulus ex correlario q̄nte petitioni adiuncto: sȝ neqȝ triangulus neqȝ quadrangulus pōt fieri egredientium angulorū figura de qua hic loquimur: ḡ pentagonus est p̄ma huiusmodi figuraꝝ. Iuxta trigonū eñ nō fit aliqua figura egredientiū angulorū: qm̃ in eo vnūquodqȝ latus a duob' reliqs lateribus intersecat̃: quapropter impossibile est vnū illorū iterato cū reliquo cōcurrere p q̄ntā petitionē: alias due recte linee supficiem clauderent. De tetragono idē probat̃: nam si sit regularis figura simplex: latera ei' opposita sunt linee paralelle quas impossibile est cōcurrere p tertiā precedētis capl'i: alia vero iā semel cōcurrerūt nec possunt iterū cōcurrere. Si vero sit figura irregularis maxime ex indebita laterū positione: latera opposita cōcurrent q̄dē exterius in altera pte tantū p quartā petitionē: nā duo anguli interiores ex sola vna parte erūt minores duobus rectis: ex altera vero maiores eis: quare nō fiet sic figura integra egredientiū angulorū. De pentagono autem p eandē q̄rtā petitionē deducit̃ q possit esse figura vndiquaqȝ pfecta egredientiū angulorū: qr ex sexta precedētis capl'i: eius anguli intrinseci oēs sunt obtusi: ḡ latera exterius iterum cōcurrunt bina & bina ad omnē partē figure. est ergo pentagonus prima oim̃ figurarum egredientium angulorum.

Pentagonus primi ordinis.

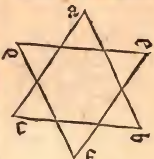


Secunda conclusio.

In quolibet ordine figurarum egredientium angulorum: prima ordinis sequentis sumitur ex tertia ordinis praecedentis.

Declaratur hoc p̄mo inductiue: nā sicut triangul' prīa figurarū simpliciū poligoniaꝝ ex tertia linea recta cōsurgit p vltimā petitionē: & pētagon' prīa figuraꝝ egrediētiū angulorū orit̃ ex pētagono simplici tertia figura iordine simpliciū: ita prīa figura scd̄i ordinis egredientiū angulorū sumit̃ ab eptagono q̄ erat terti' i prīo ordine: & p̄ma tertij ordinis fūdat̃ in nonagono q̄ erat tertia figura scd̄i: & sic ꝯīr in alijs ordinibus sine fine. Scd̄o eadē cōclusio demonstrat̃ resumpta demōstratione precedētis: nā probatio de triangulo aptissima erit p̄ine figure ordinis precedētis: q illa nō possit fieri figura ordinis sequētis: eo q vnūquodqȝ lat' eius iam tetegit quolibet aliud aut cōcurrēdo aut secādo: ideo impossibile est aliqd̄ illorū iterū cū alio cōcurrere p quintā petitionē. Ratio vero de quadrangulo concludet etiā de secunda figura ordinis precedētis q nō possit esse pfecta figura ordinis sequētis: qr si sit regularis habet latera equidistātia que nō possunt cōcurrere: si irregularis ex vna tantū parte concurrent & nō ex alia. Sed demōstrato de pentagono ex angulis precedētib' obtusis: cōcludet de tertia figura angulos sequētis ordinis eē in ea possibiles: nihil ḡ obstat veritati nr̄e huius cōclusionis.

Exagonus primi ordinis.

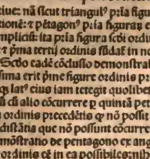


Tertia conclusio.

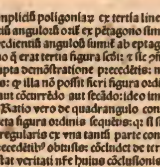
Pentagoni quinqȝ anguli aegredientes sunt praecisae equales duobus rectis.

Sit pentagonus.a.b.c.d.e.in quo latus.a.c.secetur a linea.b.e.in puncto.f.& a linea.b.d.in puncto g.erit ergo angulus.f.equalis duobus angulis.e.&.c.cum sit extrinsecus ad eos in triangulo.f.e.c. per quartam precedentis capl'i. Eandem ratione angulus.g.erit equalis duobus angulis.d.&.a.cū sit extrinsecus ad eos in triangulo.g.d.a. sed duo predicti anguli.f.&.g.cum angulo.b.sunt precise equales duobus rectis ex q̄nta precedentis capl'i: ergo similiter illi quattuor anguli.a.c.d.e.equales duobus.f.&.g.iuncti simul cum angulo.b.valebunt duos rectos per octauā cōem scientiam: quia equalibus quantitatibus additur idem commune: scilicet angulus.b.ergo theorema propositum est verum. Ex quo sequitur q sicut ordo simplicium figurarum incepit a duobus rectis in valore: vt probauit quinta conclusio precedentis capl'i: sic etiam primus ordo figurarum egredientium an=

Octogonus primi ordinis.



Eptagonus primi ordinis.



gulorum incipit a valore duorum rectorum vt modo probauimus. Jmmo ⁊ quilibet ordinum sequentium incipit a figura cuius om̄es anguli egredientes in tali ordine valent precise duos rectos. quod adhuc probandum est.

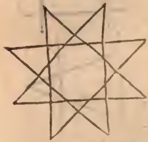
Eptagonus secundi ordinis.

Quarta conclusio.

In eodē ordine figurarū egredientiū engulorū quælibet sequēs addit supra suam proximo precedentem duos rectos in valore.

Jstud licet sit verū ⁊ demōstrabile: nūc sic persuadem⁹. supposito eni ꝙ prima figura primi ordinis. sc; penthagon⁹ valeat duos rectos: cū illa habeat numerū imparē angulorū: sequens habebit angulos suos oēs in numero pari. s. exagonus. sed ille describitur ex duob⁹ triangulis sibi mutuo inuexis qui valent quattuor rectos: eadem ratio est de octogono qui describitur ex duobus quadratis valentibus octo rectos p sextā pcedentis capli: ergo eptagonus in medio relict⁹ valebit sex rectos: cū maiores sint ei⁹ anguli q̄ exagoni ⁊ minores q̄ octogoni. similiter ꝓcederetur ad decagonū q̄ valet duodecim rectos cōstans ex duobus pentagonis simplicib⁹: ergo nonagon⁹ valebit decē rectos rōne pdicta. ⁊ sic de alijs oībus figuris primi ordinis egredientiū angulorū. Jdē credēdū est esse verū in alijs ordinibus sequentibus. s. ꝙ prima cuiuslibet ordinis figura valet duos rectos p̄cise. ⁊ ꝙ quelibet sequens addit supra suam proximo precedentē duos rectos in valore. quēadmodū supra dicebam⁹ de figuris simplicibus. Sed quia aristoteles in ethicis par viciū esse putat ab oratore demōstrationē exigere: ⁊ a mathematico persuasionē recipere: nō cōtēti predicta psuasione addemus aliam cōclusionē in qua omnia que in hoc caplo diximus valeant demonstratione probari.

Octagonus secundi ordinis.



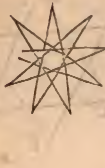
Quinta conclusio.

Cuiuslibet figuræ ægredientium angulorum omnes anguli sequentes pariter accepti valent tot rectos: quot valebant omnes anguli præcedentes pariter accepti: demptis quattuor.

Uocantur hic anguli sequentes anguli egrediētes ordinis sequētis: anguli p̄cedentes sunt anguli figure simplicis vel anguli egredientes ordinis precedentis. Uerbi causa. eptagonus simplex per sextam precedentis capli valet decē rectos: sed eptagonus egredientiū angulorum primi ordinis valebit sex rectos. eptagonus vero egredientiū angulorū secūdi ordinis valebit duos rectos: vbi descēdit per quaternarios decrescendo. ⁊ sic de alijs figuris ⁊ ordinibus suo modo. hec est ergo ꝓpositū hui⁹ cōclusionis valde generalis que cōprehendit totā scientiā huius capli: ⁊ cui⁹ demonstratio pendet ex quarta ⁊ sexta cōclusionibus precedētis. s. ꝙ cuiuslibet trianguli angulus extrinsicus equalis est duobus intrinsecis sibi oppositis. ⁊ ꝙ oēs anguli extrinseci cuiuslibet figure simplicis valent p̄cise quattuor rectos. Et sic arguitur. quilibet angul⁹ precedēs in hmōi figuris est extrinsecus in quodā triangulo ad angulū sequentem ⁊ ad vnū angulū extrinsecū figure simplicis: ergo equiualet estq; equalis illis duobus. quare omnes anguli precedentes simul accepti sunt precise equales angulis sequētib⁹ pariter acceptis: ⁊ omnibus extrinsecis figure simplicis. ergo anguli sequentes valent minus q̄ precedentes precise quattuor rectos. quod pretēdit nostra conclusio. Nā in penthagono egredientiū angulorum de quo egit superior tertia cōclusio huius capli: angulus intrinsec⁹ figure simplicis qui est super punctū f equalis est angulis b ⁊ g. quorū vnus est egrediens primi ordinis: ⁊ alter extrinsec⁹ figure simplicis: equalis inquā: q: est extrinsecus ad eos in triangulo f g b. Eadē ratione quilibet aliorum angulorum eiusdē pentagoni simplicis equiualet vni egredienti primi ordinis ⁊ vni extrinseco figure simplicis: ergo omnes quinq; anguli figure simplicis simul accepti sunt equales omnibus q̄nq; egredientibus primi ordinis ⁊ quinq; extrinsecis pentagoni simplicis. dempto ergo valore illorum quinq; extrinsecorum: qui sunt quattuor per sextam capituli precedētis: remanet valor q̄nq; egredientium primi ordinis scilicet duo recti. nam quinq; anguli pentagoni simplicis valebant sex rectos. a quibus demptis quattuor rectis relinquuntur duo recti. Eadem probatio currit de exagono egredientium angulorum primi ordinis. s. ꝙ valeat quattuor rectos. nam exagonus simplex valebat octo rectos: similiter eptagonus simplex valebat decem rectos: a quibus demptis quattuor remanent sex recti valor septem angulorum egredientium primi ordinis: ⁊ sic d̄ alijs. Ergo vere sunt omnes predicte propositiones in figuris egredientium angulorum primi ordinis scilicet ꝙ prima earum valet duos rectos: ⁊ ꝙ quelibet sequens addit supra suam proximo precedentem in eodem ordine duos rectos in valore. De alijs ordinibus eadem est probatio. nā quilibet angulus egrediens primi ordinis equalis est angulo egredienti secundi ordinis sibi superposito ⁊ vni angulo extrinseco figure simplicis: quia est extrinsecus ad eos in quodam triangulo facile signabili: ergo omnes anguli eptagoni primi ordinis simul sunt equales oīb⁹ angulis eptagoni secūdi ordinis ⁊ septē angulis extrīsecis eptagoni simplicis q̄ valēt quattuor rectos. q̄b⁹ dēptis a valore eptagoni p̄mi ordinis. s. a sex rectis: remanēt duo recti q̄ est valor eptagoni scdi ordinis. secūd⁹ ergo ordo egredientium angulorum incipit a duobus rectis: vt superius ꝓponebatur. Jtē octogonus egredientium angulorum primi ordinis valebat octo rectos: a quibus demptis quattuor ratione iā dicta: remanent quattuor recti ꝓ valore octogoni secūdi ordinis. Similiter nonagon⁹ primi ordinis valebat decē rectos p

Nonagonus secundi ordinis.

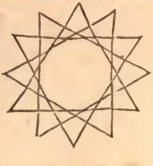
Nonagonus tertij ordinis.



Decagonus tertij ordinis.

Undecagonus tertij ordinis.

Duodecagonus tertij ordinis.

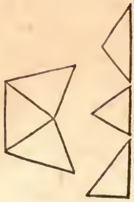


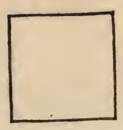
ſubtractionẽ quattuoꝛ rectoꝝ a quattuoꝛdecĩ nonagoni ſimplicis: ergo nonagonꝰ ſcđi oꝛdinis valebi ſex rectos. ⁊ ſic de alijs in eodẽ oꝛdine: vbi clariſſime cõſtat ꝙ ꝗlibet figura ſequens addit ſupra ſuaꝫ ꝓximo precedentẽ duos rectos in valoꝛe: qđ ſuperius nõdũ erat demonſtratũ ſed ſolum perſuaſum ¶Pro tertio oꝛdine figurarũ egredientiũ angulorũ haud aliter ꝓbamus ꝓpõnes prius dictas. nã deꝑtis quattuoꝛ rectis a valoꝛe nonagoni ſecũdi oꝛdinis qui erant ſex recti: remanẽt duo recti valoꝛ nonagoni tertij oꝛdinis a quo ille oꝛdo incipit. quilibꝫ eñi angulus egrediẽs ſcđi oꝛdinis eſt equalis angulo egredienti tertij oꝛdinis ſibi ſuperpoſito ⁊ vni angulo extrinſeco nonagoni ſimplicis: qꝛ eſt extrinſecus ad eos in quodã triangulo facile reperibili. Deinde eadẽ via probari poſſet ꝙ decagonus tertij oꝛdinis valet quattuoꝛ rectos. vndecagonꝰ ſex rectos ⁊ ſic de alijs per continuã additionẽ duoꝝ rectorũ. Hactenus ergo de hoc primo libro qui erat de cõſiderationibꝰ geometrie cõmunibꝰ. ¶Si tñ hec ad moꝛes aptare liceat: dicemꝰ ꝙ geometrie principia incõplexa coꝛreſpondent primis puerorũ noticijs de bono ⁊ malo quas habent iꝑfectas vſqꝫ ad ſeptẽniũ. Cõmunes ſciẽte: prima denotãt iuris naturalis principia per ſe nota: vt declina a malo ⁊ fac bonũ ⁊c. Cõcluſiones ſeptẽ cõnexe de ãgulis figurarũ ſimpliciũ: virtutes oſtendũt lumine rõnis naturalis acquiſitas: ꝗ in ſua cõnexione ꝑfecti oꝛes euadũt: dicente beato ambroſio ſuper lucã cõnexe ſibi ſunt cõcatenateqꝫ virtutes vt qui vnã habeat plures habere videatur. conſonat ei gregoꝛius in moꝛalibus. Uirtutes inquit ſi ſint diſiuncte nõ poſſunt eſſe perfecte. nec prudẽtia vera eſt que iuſta. tẽperans. ⁊ foꝛtis nõ eſt. ⁊ idẽ ſubdit de alijs. Unde notãter dicitur ꝙ quelibet taliũ figurarũ addit ſuper precedentẽ duos rectos. i. duplicẽ iuſticie rectitudine ꝗ eſt ad ſe ⁊ ad aliũ. Poꝛro figure egredientiũ angulorũ: ad virtutes infuſas: ad dona ſpiritusſancti. ad beatitudines euangelicas: ⁊ ad fructꝰ charitatis ꝑtinere vidẽtur ſcđm diuerſos earum oꝛdines. nã in eis oꝛdo ſequens nõ auget ſed diminuit a precedente: qꝛ humilitatẽ affert. Unde dñs apłis in ſupmo ꝑfectionis ſtatu collocatis dicebat. ꝗ maioꝛ eſt veſtrũ ſit alioꝝ miniſter: ⁊ ſũmꝰ põtifex ſeruũ ſeruoꝝ dei ſe noiat. ⁊ ꝑ hũc modũ his alia ſupaddere cuilibꝫ ingenioſo erit valde facile.

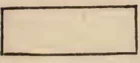
Liber ſecũdus noſtri cõpendij geometriæ de figuris planis correſpõdẽs quattuor primis libris euclidis. Habet ſimilr capita quinqꝫ ſicut præcedens.

Caput primum eſt de diffinitionibus terminorũ ad hãc geometriæ partem pertinentium.

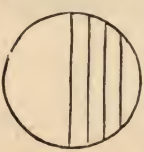
CONSEQVENS ERIT poſt lineas & angulos ad figuras planas tranſigere. vt dicamus de eis ſecundum conſiderationem ſpecialem: faciendo propria capitula de triangulis: quadrangulis: & circulis ſecundũ ordinem quem obſeruauit euclides: addemuſqꝫ aliquid de figuris iſoperimetris quas ille prætermiſit. ſed habebimus compendioſum ſermonem dimiſſa antiquorum vaſtitate: quia introductiones tantum mathematicas in hoc opere nos tradituros eſſe promiſimus: non ipſas ſcientias integras. Et more ſolito ante demonſtrationes præmittemus diffinitiones & diuiſiones vocabuloruꝫ: ſpecialiores tamen illis quas in principio libri prioris prelibauimus. Repetitis igitur diffinitionibus trianguli. quadranguli, & circuli. diuidemuꝰ hæc genera in ſuas vel ſpecies vel partes: & ſingularum partium diffinitiones ſubnectemus quæ erunt media in demonſtrationibus paſſionum quas inquiremus. Triangulus eſt figura plana tribus rectis lineis contenta. Triangulorum. alius omnium triũ laterum æqualium: & vocatur yſoplerꝰ græce: æquilaterus latine. Alius autem duorum æqualium laterum: & vocatur yſocheles græce: equitibiarum latine. Alius trium laterum inequalium & vocatur anſocheles vel ſcalenon græce: latine vero gradatus: & iſta diuiſio ſumitur ex pte lateꝝ. Ex parte aũt angulorũ diuiditur in orthogoniũ qui habꝫ vnuꝫ angulum rectum: & in ampligonium qui habet vnũ angulum obtuſuꝫ & duos acutos. & in exigoniũ qui habet omnes angulos acutos. Dicitur etiã

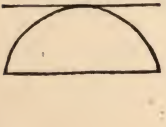


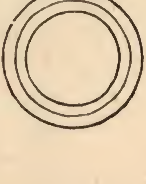




quadrangulus ortogoni⁹ cū oēs eius anguli sunt recti. & quadrāgul⁹ dicitur ysoplerus cum omnia eius latera sint æqualia: & omnis figura equilatera inuenitur ab auctoribus isoplerus dicta. Quadrangulus est figura plana quatuor rectis lineis contenta. Quadrangulorum alius paralellogramus.i.æque distantiū laterum. alius disparalellogramus.i.inequedistantium laterū. Paralellogramorū. alius est haben somnia latera æqualia: & vocatur quadratus vel quadratū. alius tantū oppositorū laterū æqualium: & vocatur altera parte longior. Quadratorum alius ortognius: & vocatur proprie quadratus. Alius inequalium angulorū: & vocatur helimalim quia habet semper oppositos angulos æquales sicut demonstrabitur. Altera parte longiorum alius orthogonius qui ab aliquibus tetragonismus appellatur. alius inequalium angulorum & vocatur similis helimalim: & dicitur similis helimalim: quia habet opposita latera & oppositos angulos æquales. Omnes vero quadranguli non æquedistantium laterū sunt helimalim.i.irregulares figuræ: & istæ irregulares nominantur non ꝙ aliæ omnes sint regulares: quoniam sol⁹ quadratus est regularis in genere quadrangulorum. sed qm̄ istæ figuræ plus irregularitatis habent ꝙ̄ alii quadranguli equedistantium laterum. Circuli vero diffinitio data est prius: resumēdo tamen breuiter diffinitionē circuli. dico ꝙ circulus est figura plana ex medio æqualis: sicut sphera est figura solida ex medio æqualis. vt dicit Aristoteles.7.methaphisice. quia habet omnes lineas a medio ductas æquales: &.5.methaphisice dicit ꝙ circulus est figura agona.i.sine angulo: qui circulus quia figurarum vniformissima & specialissima diuisionē nō recipit in species: sicut neq; aliqua regularis figura: sed diuiditur solum quantitatiua diuisione in portiones. Omnis aūt portio circuli aut est semicirculus aut portio maior semicirculo aut eo minor. Semicirculus est figura plana diametro & medietate circunferentiæ contenta. Portio vero circuli vt distinguitur contra semicirculū est figura plana vna linea recta extra centrum cadente & parte circūferentiæ contenta: & hæc quidem linea recta corda dicitur. pars vero circūferentiæ arcus nominatur. cum igitur circulus sic diuisus fuerit per cordā in portiones duas: portio in qua cadit centrum dicitur maior semicirculo. portio autem in qua non est centrum minor semicirculo appellatur. Est etiā alia diuisio circuli in sectiones. sectio circuli est figura quæ sub duabus a centro ductis lineis rectis & sub arcu qui ab eis comprehenditur continetur. angulus enim qui ab eis lineis ambitur supra centrum consistere dicitur. Angulus semicirculi dicitur quem diameter cum circunferentia constituit. Angulus portionis dicitur quem corda cū arcu constituit. Angulus contingentiæ dicitur quem linea circulum contingens constituit. Circulum autem linea contingere dicitur quæ circulum tangit: & in vtramq; partē protracta non secat circulū. hæc sunt quid noīs de partibus circuli: modo de ipsis circulis dicendū est. Circuli se cōtingere dicuntur qui se cōtingentes seinuicē non secant. Cōcentrici circuli dicūtur qui super idē centrū describūtur. Eccentrici vero dicūtur quorū centra distant cū sic sit ꝙ sit circul⁹ intra circulū. & hæ diffinitiones nobis sufficiant.



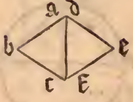




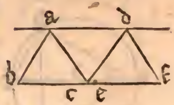
Caput secundũ de passionibus triangulorum excerpens paucula ex primo libro geometriæ Euclidis.

EQVENDO ordinẽ naturalẽ figurarũ prius fuisset agendũ de circulo ꝗ̃ de aliis speciebus: tũ quia circulus vnica linea cõtinetur: aliæ vero figuræ sicut sunt poligoniæ ita & polilineæ .i. pluriũ linearũ: vnũ aũt prius est multitudine. tũ quia circulus est figurarũ perfectissima. simplicissima. regularissima. pulcherrima. capacissima. & si vis addere: quod proprie ad phisicũ pertinet: ipsa est ad motũ aptissima: aliæ vero figuræ in p̃dictis oĩbus valde a circulo deficiunt. sed quia multa sunt q̃ de circulo demõstrari nõ possunt nisi ex demõstratis circa figuras rectilineas: quarũ prima est triangulus: ideo necessariũ fuit ꝙ permutarem⁹ ordinẽ: queadmodũ fecisse inuenitur euclides. De triangulis igitur sit hæc prima Conclusio.

Si vnus angul⁹ vni⁹ triãguli æqualis fuerit vni angulo alteri⁹ triãguli: fuerit ꝗ duo latera dictũ angulũ cõtinentia æqualia duob⁹ laterib⁹ alteri⁹ similẽ angulũ cõtinẽtibus: residui anguli vni⁹ residuis ãgulis alteri⁹ equales erũt: basis vni⁹ basi alteri⁹ æqualis erit: totusq; triãgul⁹ toti triangulo æqualis.



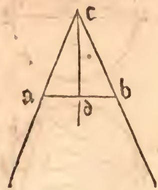
Istam conclusionẽ primã pono: q2 nõ dependet nisi ex vltima cõmuni sciẽtia. ponã enĩ vnũ triãgulum super alterũ: quorũ vnus sit a b c. alius d e f. ꝛ applicabo angulũ d angulo a q̃ per ipotesim sunt equales in diuersis triangulis: ergo latus d f erit super latus a c. ꝛ latus d e sup latus a b. si aũt nõ: erit angulus d maior aut minor angulo a vel ecõuerso qđ est cõtra ipotesim. cũ ergo latera laterib⁹ sint eq̃lia: erit necessario basis e f super basim b c. ꝛ per ꝯñs totus vnus triãgulus erit super totũ aliũ triangulum nec excedens nec excessus: alioquin due recte linee superficiem clauderẽt ille. s. quas nõ tangeret basis trianguli. vel forte loquitur de illa superficie q̃ remaneret inter duas bases triangulorũ: q2 vel vnus illorũ triangulorũ cõstaret ex duabus tãtũ lineis separata ab eo sua basi: vel inter duas bases illorũ triangulorũ: q̃ sunt linee recte cõterminẽ inter eadẽ duo puncta. remaneret supficies vndiq; clausa. qđ est incõueniens cõtra quintã petitionẽ. ꝛ ita illi duo triãguli erũt equales sibinuicẽ scđz totũ ꝛ secũdũ partes per vltimã cõmunẽ sciẽtiã. Ex ista ꝓcedam vlterius ad ostendendũ equalitatẽ inter angulos eiusdẽ trianguli per equalitatẽ laterũ. ꝛ sit hec secũda cõclusio.



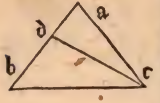
Secunda conclusio.

Omnis trianguli duum æqualium laterũ angulos qui super basim sunt equales esse necesse est: & similiter angulos qui sub basi constituuntur: si ei⁹ prima latera directe protrahantur.

Hec est quĩta cõclusio p̃mi euclidis. ꝛ vocatur admirãtibus eleufuga. i. fuga miserorũ: q̃m miseri ingenio cum ad eandem perueniunt: fugam capiunt. sed ne detur fuge occasio ostendam eam breuiter et ostensione leui que sufficit adiscenti: ꝛ erit medium demonstrationis ꝙ talis triangulus diuiditur: vel diuidi potest in duos triangulos equales. Sit ergo linea a b basis cui insistat linea c d secans eã orthogonaliter. idest ad angulos rectos: ꝛ per equalia in puncto d. ꝛ ducantur latera c b ꝛ c a que sunt equalia: eritq; triangulus duum equalium laterum a b c. ꝛ anguli super basim sunt angulus b. ꝛ angulus a quos dico esse equales. Triangulum enim totalem diuidam per equalia per lineam c d perpendicularem in duos triangulos partiales qui sunt triangulus d c b ꝛ c d a. eritq; angulus c d b in primo triangulo equalis angulo c d a in secundo triangulo: quia vterq; eorum est rectus ꝛ latera istos angulos continentia sunt equalia ex ipotesi: ꝛ latus b d est equale d a. ꝛ latus c d est commune: quare per premissam conclusionem residui anguli vnius residuis angulis alterius erunt eq̃les: puta angulus a c d et b c d. ꝛ iterum anguli a ꝛ b quod fuit propositum. Patet etiam ꝙ anguli sub basi. similiter sint equales: quoniam duo anguli qui sunt apud a. sunt equales duobus rectis per primam de lineis rectis: similiter duo anguli qui sunt apud b sunt equales duobus rectis: ergo dẽptis superioribus qui sunt equales. vt probatum est. relinquitur equales esse qui sunt inferius per sextam communem scientiam. Ex ista demonstratione patet ꝙ triangulus equilaterus est equiangulus ꝛ econuerso: quia equalitas quorumlibet duorum laterum concludit equalitatem angulorũ sibi correspondentium: ꝛ ex ista, sequitur conclusio tertia. scilicet quod ex habitudine angulorum accipitur habitudo laterum inter se.



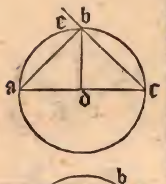
Tertia conclusio.



Omnis trianguli lõgius latus maiori angulo oppositum est: & econuerso.

Uerbi gratia: si in triangulo a b c angulus a sit maior angulo c ⁊ angulo b: erit latus c b maius latere c a b. Quod si nõ: aut igitur erit minus aut equale. si equale ergo per precedentem angulus a erit equalis angulo c. qð est contra ipotesim. Si aũt latꝰ b c est minꝰ ⁊ a b maiꝰ: resecet ad equalitatẽ eiꝰ scʒ c b in puncto d. sitq; latus d b equale c b: ergo ꝑ premissam erit angulus b c d equalis angulo b d c. sed angulus b d c est maior angulo d a c. qꝛ est extrinsecus ad eũ in triangulo d a c. ergo angulꝰ d c b qui est equalis ei erit maior eodẽ b a c. sed a ponebatur maior toto c. ergo angulus b c d. est maior toto c. quare maior est pars suo toto scilicʒ c qð est impossibile. Et sequitur econuerso hoc latus est maius: ergo angulꝰ ei oppositꝰ est maior: qð facile ostendit ex ꝓpori cõuersa. Iste tres cõclusiones sunt de triangulo scðʒ se cõsiderato: nũc ponã aliquas cõclusiones de triangulo ꝓut est pars aliarũ figurarũ: ⁊ primo ꝓut describitur in circulo ⁊ est pars circuli. ⁊ sit hec prima conclusio.

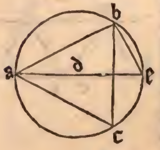
Quarta conclusio.



Omnis trianguli in semicirculo super diametrum collocati angulus apud circuferentiam existens rectus est.

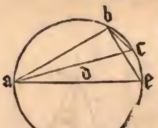
Qð ꝓbo sic: sit triangulus a b c super diametrũ a c cõstitutus: dicoq; angulus b est rectus in quacũq; parte circũferentie ponatur: ꝓtrahã eni ab ipõ angulo in centrũ lineã b d: ⁊ erunt duo trianguli quilibet duũ equaliũ laterũ per diffinitionẽ circuli: eruntq; in vno illorũ duo anguli equales inter se. scʒ a ⁊ b per secundã huꝰ capituli. similr ⁊ in altero triangulo b ⁊ c erunt equales per eandẽ. sed angulꝰ b d c est equalis duobus primis scʒ a ⁊ b: qꝛ est extrinsecus ad eos in triangulo a d b. ⁊ angulus a d b est equalis duobus secundis scʒ b ⁊ c. qꝛ extrinsecus est ad eos in triangulo c d b. quare duo anguli qui sunt apud d sunt dupli ad duos angulos qui sunt apud b. qꝛ valent eos ⁊ angulos a ⁊ c q̃ sunt eis equales: sed duo anguli apud d sunt equales duobus rectis per primã capituli de lineis. ergo angulus b totalis est rectus: qm̃ est medietas illoꝝ quattuor qui valent duos rectos. Aliter ostendit idẽ ⁊ breviꝰ habita eadẽ dispositione figure: ꝓtrahatur c b vsq; ad e exterius. eritq; angulus a b e. equalis duobus angulis a ⁊ c. sed duo anguli intrinseci apud b sunt equales duobus angulis a ⁊ c. vt deductũ est. ergo angulus a b e extrinsecus est equalis duobus angulis intrinsecis apud b. hoc est totali angulo b. ergo vterq; eorũ est rectus per diffinitionem anguli recti. scʒ. tam e ꝙ b.

Quinta conclusio.

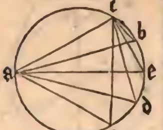


Omnis trianguli in portione circuli super cordam locati: si sit portio circuli semicirculo maior: erit angulus apud circũferentiã existens recto minor: & si sit portio semicirculo minor: erit angulꝰ apud circũferẽtiã recto maior: & vniuersaliter q̃to portio maior tanto angulꝰ minor. & econuerso.

Qð ꝓbo sic. sit portio semicirculo maior a b c corda a c. dico ꝙ angulus b trianguli a b c colocati sup cordã qui est apud circũferentiam: est recto minor. Ducatur eni diameter a d e super centrũ d ⁊ linea e b ducatur: ⁊ qꝛ per premissam angulus b totalis est rectus: quare angulꝰ a b c est minor per secũdã cõmunẽ scientiã cũ sit eius pars. sicut ptʒ sensu. Secundã partẽ ostendo sic: sit portio semicirculo minor a b c corda a c. dico ꝙ angulus b trianguli locati super hanc cordã: est recto maior. ducatur eni per centrũ d diameter a d e. ducaturq; linea b e. eritq; per premissam angulus a b e rectus quare angulus a b c. erit maior recto. cũ angulus a b e rectus sit eius pars per secundã cõmunẽ scientiaʒ. Tertia pars ptʒ accipiẽdo portiones maiores ⁊ minores semicirculo: ⁊ sit portio a c d maior portiõe a c b dico ꝙ angulus a c d minor est angulo a c b. qꝛ est pars eius. similr se habet de alijs portionibꝰ minoribꝰ. Si velis aduertere in hijs duabꝰ ꝓpõibꝰ habes differẽtias triãguloꝝ. s. orthogonij. ãplig onij. ⁊ exigonij. sʒ de alijs differẽtijs triãguloꝝ nũc dicemꝰ. s. ysopleri. ysochelis ⁊ ansochelis.



Sexta conclusio.

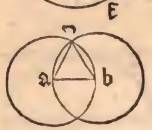


Omnis triangulꝰ cuius vnũ latus est semidiameter duorũ circulorũ: & angulus oppositus est apud sectionẽ eorũdẽ est equilaterus.

Accipiamus a b lineã ⁊ super a punctũ describamꝰ circulũ occupando totã lineã a b. Itẽ super punctũ b describatur alter circulus equalis: ita ꝙ linea a b sit semidiameter duorũ circulorũ: ⁊ a communi sectione illorum circulorum que sit c ducantur due linee scilʒ c b. ⁊ c a. dico tunc ꝙ triangulus iste a b c est triangulus equilaterus. Nam per diffinitionem circuli linee a b ⁊ c a sunt equales: quia veniunt a communi centro ad circunferentiam. item c b et b a sunt equales pari ratione. ergo omnes erunt inter se equales per tertiam communem scientiam.

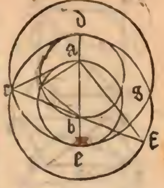
Septima conclusio.

Omnis triangulus cuius vnũ latus est minus semidiametro duorum circulorũ terminatũ ad eorũ centra: & cuiꝰ oppositus angulꝰ est in sectione eorũdẽ:



est triangul9 duorũ tantũ equaliũ laterũ: & cuius oppositus angulus est extra sectionẽ eorundem est oim inæqualium laterum.

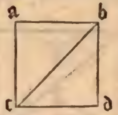
Ut sit linea d a b c. ⁊ describatur sup a punctũ circulus secundum quantitatẽ linee a b c. item super b punctũ describatur alter circulus equalis scdm quantitatẽ linee b a d. ⁊ inter secent se in pũcto c. dico q̃ linee a c ⁊ b c sunt equales: qm̃ sunt semidiametri circulorũ equaliũ: ⁊ q̃ a b linea sit minor eis: pꝫ qꝛ cũ veniat a centro non attingit circũferentiã: sicut a c ⁊ b c. ergo est minor eis. pꝫ ergo q̃ triãgulus a b c est duorũ tantũ equaliũ laterũ. ⁊ sic erit ysocheles. ℂ Rursus sit alius triangul9 a b f. et sit punct9 f extra sectionẽ: dico q̃ oia latera sunt inequalia: nã latus b f cũ sit equalis b d. qꝛ semidiameter eiusdẽ circuli: erit maius latere a b. ⁊ latus a f. cũ sit pl9 q̃ semidiameter equalis circuli est mai9 latere b f. nã a g est b f equale. qꝛ semidiametri duorũ circulorũ equaliũ: quare oia latera sunt inequalia. ℂ Nunc ponam conclusiones de triangulo. prout est pars quadranguli.



Octaua conclusio.

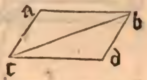
Quilibet duo trianguli in superficie equedistantium laterum iuxta lineam diagonalem accepti sunt æquales.

Est eni linea diagonalis que ducitur ab angulo ad angulũ: ⁊ si est in quadrato: vocatur diameter. istõ ostẽdã in quadrãgulis q̃ sunt altera pte lõgiores ĩequaliũ laterũ l quib9 min9 vꝫ. sit ğ hmõi figura a b c d. ducat ab ãgulo ad ãgulũ linea. c. b. dicoq̃ triãguli a b c ⁊ c d b sunt eq̃les. nã ãgul9 b superior ⁊ angul9 c inferior sunt equales. qꝛ coalterni inter equedistãtes lineas a b ⁊ c d. ⁊ latera cõtinentia istos duos angulos sunt equalia: qꝛ linea c d equalis est b a. ⁊ linea b c est cõmunis: quare residui anguli sunt equales: ⁊ tot9 triãgulus toti triãgulo equalis est p primã cõclusionẽ hui9 capli.

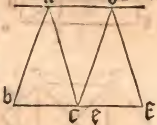


Nona conclusio.

Si duo trianguli super bases æquales atq̃ inter duas lineas æquedistantes ceciderint: æquales erunt necessario.

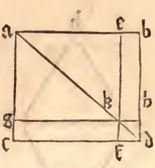


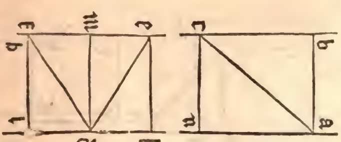
Sint duo trianguli a b c ⁊ d e f inter lineas equedistantes. dico eos esse equales. Et siqdẽ similiter cadat linea d e inter equedistantes sicut cadit linea a b nõ est difficile arguere ex prima huius capituli: qm̃ anguli equales erũt a b c ⁊ d e f ⁊ latera tales angulos cõtinentiã sunt equales: qm̃ bases sunt equales ex ipotesi: ⁊ similiter linee que inter lineas equedistantes veniũt sunt equales. ⁊ sic sequit̃ ppositũ ex prima huius capituli. Sed si in triangulo a b c. angulus b sit rectus: ⁊ in triangulo alio d e f angulus e nõ sit rectus: dico q̃ tunc similiter sequitur q̃ triãguli sunt eq̃les si sint ĩter equedistãtes lineas ⁊ supra bases equales: diuidã eni superficiẽ d e f i duo media p lineã d m. ⁊ ducã equedistãtes lineas equaliter e k ⁊ f l. ⁊ ducã c n equedistantẽ a b. habebo itaq̃ duas superficies paralelogramas a b c n ⁊ k e l f quas suppono esse equales. qꝛ oia latera sunt equalia: erit igitur superficies k e l f diuisa in q̃tuor triguãlos eq̃les p pmissa: ⁊ a b c n tm̃ i duos eq̃les: ğ duo de illis valẽt vnũ de istis sed triangulus d e f cõtinet duos de illis: igitur est eq̃lis triãgulo a b c q̃ est medietas alteri9 superficiei paralellograme: ⁊ hoc est q̃d volui ostendere. ℂ Iste nouẽ cõclusiones ad p̃sens de triãgulo sufficiant: quarũ noticia necessaria est in methaphisica ⁊ logica ⁊ naturali sciẽtia apud Aristotelẽ.

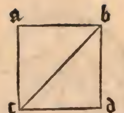


Caput tertium de quadrangulis: correspõdens. 2. libro Euclidis: in quo primo ponitur vna propositio.

NVNC dicendũ est de quadrangulis de quibus paucas ponã cõclusiones: quib9 premitto vnã descriptionẽ q̃ & premittit euclides libro. 2. de gnomone & de suplementis: vt præsciatur qd significat̃ per terminos: & est talis. Omnis paralellogrami spacii ea quidem que diameter secat per mediũ paralellograma circa eandẽ diametrũ cõsistere dicũtur. Eorum vero paralellogramorũ quæ circa eandẽ diametrũ consistũt: quodlibet vnũ cũ duobus supplementis gnomõ noĩatur. Diuidatur ergo. a. b c. d. paralellogramũ per diametrũ a d & in puncto. K. in diametro: secent se ortogonaliter duæ lineæ. e. f. & g. h. æquedistantes a duob9 lateribus paralellogrami scꝫ. b. d. c. d. eritq̃ totũ paralellogramũ diuisũ in quattuor paralellograma: quorũ duo dicũtur cõsistere circa eandẽ diametrũ. a. d. q̃ diameter diuidit ĩ triãgulos. reliqua dicũtur supplemẽta scꝫ. g. K. c. f. & e. K. b. h. tria aũt paralelograma. s. duo iã dicta supplemẽta cũ alterutro eorũ q̃ secant̃ p diametrũ gnomonẽ pficiũt. igit̃ hoc supposito cũ diffõnib9 & diuisiõib9 pmi capli. hui9







libri accedo ad cōclusiones in hoc caplo demōstrādas. & sit hæc pria cōclusio.

Prima conclusio.

Omne paralellogramū vnaquæq3 diameter diuidit p mediū & per æqualia.

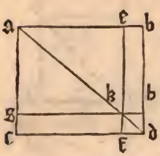
Ista p3 stati ex penultima p̄cedētis capli. nec o3 plꝰ insistere. sim̄ nō plac3 reducere eādē ad reliquas: tūc poss3 reduci i vltimā cōe3 sciētiā sic reducta ē pma capli de triāgulis. ⁊ silr pma de circulis reducet.

Secunda conclusio.

Omne paralellogramū angulos ex aduerso collocatos habet æquales.

Si sit ortogoniū p3. q2 tūc oēs āguli sunt eq̄les p tertiā petitionē. Si aūt sit leq̄liū āgulorū: ⁊ sint a b. ⁊ c d. latera equedistātia: ducat linea diagonaliter a d. ⁊ erūt anguli d superior ⁊ a iferior equales: q2 coalterni. item d inferior ⁊ a superior equales erunt similiter: q2 coalterni p cōparationē tū ad lineas equedistantes: ergo a totalis est equalis d totali: ⁊ sunt ex aduerso collocati. igitur ⁊c. ¶ Ex quo vlterius sequitur q b ⁊ c sunt equales. nā q2 duo anguli supioris triāguli sunt equales duobꝰ angulis trianguli inferioris: sequitur q residuus sit equalis residuo p sextā cōem scientiam.

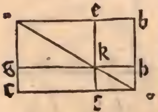
Tertia conclusio.



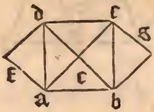
Omnis paralellogrami spacii eorum: q̄ circa diametrum sunt: paralellogramorū supplementa æqualia sibi inuicem necesse est esse.

Disponatur paralellogramū a b c d diuisum in. 4. paralellograma. ⁊ p oia resumatur sicut prius. dico q duo paralellograma q̄ dicūtur supplementa per oia sunt equalia inter se. sunt enī duo trianguli a d b ⁊ a d c equales p primā capituli huiꝰ. ex istis auferā equalia. s. triangulos k d h ⁊ k d f qui sunt equales per primam huius capituli. similiter auferā ab eisdem: puta a k e ⁊ a k g. qui similiter sunt equales per eandē. ergo per sextā cōceptionē que remanent sunt equalia. s. duo supplementa. ¶ Iste tres conclusiones concludunt de omnibus superficiebus equedistantiū laterū: siue sint recti anguli siue non ⁊c. sed sequentes specialiter erunt de quadratis ⁊ de rectis angulis.

Quarta conclusio.

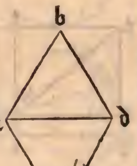


Quadratum quod a latere triāguli recti anguli eius recto angulo opposito describitur in se ducto: equum est duobus reliquis quadratis. qui ex duobus reliquis lateribus conscribuntur. Ex quo sequitur q quadratum diametri ad quadratum coste est duplum.



Istam cōclusionē ostendo de lateribus quadrati ⁊ diametri q̄ faciunt ysochelem: q2 ad hoc tēdit ipect aliter ꝓpositio vt p3 per applicationē correlarij factā. sit igitur hmōi ysocheles a b c. ⁊ sint a c ⁊ b c latera equalia ⁊ a b sit latus maximū: q2 maiori angulo oppositū: dico ergo q quadratū huiꝰ maximi lateris sc3 a b est equale duobus quadratis reliquorū laterū: sc3 quadrato a c d f q est quadratu3 lateris a c ⁊ quadrato b c g e quod est quadratū lateris b c. Est enī quadratū a b d e diuisu3 in quattuor triangulos equales per duas diametros a e ⁊ b d quorū duo sunt medietates aliorū duorū quadratorum scil3 triangulus a c d ⁊ triangulus b c e sicut vides: sed triangulus principalis a c b ⁊ triāgulus ei oppositus puta c d e sunt equales alijs duabus medietatibus quadratorum minorum que sunt extra quadratum maius. q2 oēs isti in sex triangulos diuisi sunt equales vt p3. ergo quadratu3 magni lateris a b equale est duobus quadratis residuorū laterum. vt dicit prima pars theorematis. ⁊ p ɔñs idē quadratū est duplum ad quadratū alterius lateris: ad qđ se hab3 sicut diameter ad costā: ⁊ ita quadratū diametri est duplū ad quadratum coste vt dicit correlarium.

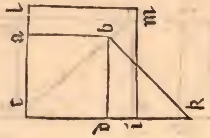
Quinta conclusio.

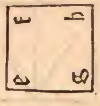


Propositis duobus quadratis siue æqualibus siue inæqualibus alterum illorū reliquo gnomonice circūscribere contingit.

Accipiam duo quadrata equalia ⁊ in illis ostendā intentū. sit primū quadratū a b c d. secundū sit e f g h: ⁊ sint equalia: volo circūscribere secundū primo gnomonice: ꝓtrahatur ergo c d vltra d vsq3 ad k scdm quantitatē g h sitq3 linea protacta d k equalis g h. cū igitur angulus d exterior sit rectus sicut ⁊ interior d. ergo p premissa3 quadratū ex b k erit equale duobꝰ quadratis sc3 linea3 b d ⁊ d k. ergo facto hoc rescindā de linea c d k ad quantitatē b k: sitq3 c i ad equalitatē b k. deinde a pūcto i erigā perpēdiculariter equalē lineā c i. vsq3 ad m. ⁊ erit secundū latus quadrati qđ querimus: ⁊ tunc ducā tertiū latus m l. ⁊ post coniugā l cum a c. ⁊ habebo quadratū c i l m. ⁊ hoc est quadratū linee b k. ⁊ est equale quadrato linee b d: ⁊ quadrato linee d k per premissam. Tunc arguā sic. hoc productū quadratu3 est duplum ad duo predicta: sed primū remanet in sua propria forma: ergo illud quod est additū est equalis quantitatis quadrati secundi. sed non est additum nisi gnomonice: ergo quadratum secundū quadrato primo est gnomonice circūscriptū. Et si circuli quadratura scita esset: possent duo circuli ad seipsos addi: ⁊ alter alteri circūscribi. de modo aūt in fine huiꝰ geometrie dicemus.

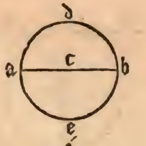
Et si non sit scita circu̅scribi poterit circulus circulo.

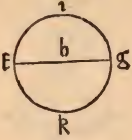




Caput quartum de circulis: correſpõdẽs. 3. libro euclidis.

TANGAM in hoc capitulo pauca de circulis. nam proſequi naturã illius quantũ ad omnes eius conditiones magnũ requirit tractatum. ſed propter formam ſaltem nũc numerandæ ſunt laudabiles proprietates & paſſiones circuli. Ipſa aũt figurarũ ꝑma eſt vt diximꝰ & pfectiſſima. ſimpliciſſima. regulariſſima capaciſſima: & pulcherrima & ſi vis adde quod proprie ad philoſophũ pertinet: ipſa eſt ad motum aptiſſima: propter quod videbatur mihi ꝙ prius de circulo ꝙ̃ de figuris rectilineis eſſet agendum. ſed inueni ꝙ de eo multa oſtẽdi non poſſunt niſi ex concluſionibus figurarum rectilinearum: ideo neceſſariũ fuit pmutare ordinẽ queadmodũ feciſſe inuenitur euclides.





Prima concluſio.

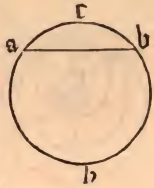
Circuli quorum diametri ſunt æqules: ipſi quoqꝫ æquales erunt.

Iſta nõ dependet niſi ex cõmuni ſcientia nona: vt prima de triangulis ⁊ prima de quadrangulis. applicetur enim circulus circulo: diametri ſunt equales per ipoteſim: ⁊ quia centrum eſt ſupra centrũ. circunferentia ſupra circunferentiam: ⁊ totum ſupra totum. ⁊ ita nullus circulus excedit reliquum quare inter ſe erunt equales per vltimam communem ſcientiam.

Secunda concluſio.

In circulis equalibꝰ portiones ſunt æquales: quarum cordæ æquales ſunt.

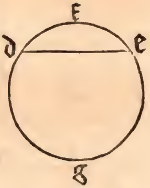
Patꝫ hoc: nã circũſcripto circulo vno ſuper aliũ modo pdicto applicet vna corda alteri: ⁊ ſint vna corda vel ſint ſimul ambe quare manifeſtum eſt ꝙ eandẽ ⁊ equalẽ portionem de vtroqꝫ ſcindunt. nam portiones iſte non ſe excedunt ex parte corde: quia ad eandem cordam terminantur: nec ex parte circũferentie: quia ille ſunt ſimul per ipoteſim. ergo non aliquo modo ſe excedunt.



Tertia concluſio.

In circulis inæqualibus æqualis corda vel eadem: plus accipit de minori ꝙ̃ de maiori circulo.

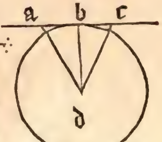
Sit maior circulus a b c circulo a d c. ſitqꝫ a c corda. dico ꝙ corda a c abſcindit maiorẽ portionẽ de circulo a d c ꝙ̃ a circulo a b c ꝓbatur. applicetur enim circulus minor ad maiorẽ ⁊ ſecet eũ in duobꝰ pũctis a ⁊ c: corda. ergo a c abſcindit a maiori circulo arcũ a b c. a minori vero tantũ ⁊ amplius: q: ſuperficiem a d c que eſt maior ꝙ̃ eſt ſuperficies a b c. igitur ⁊ portio minoris maior eſt portione maioris: per ſcdam cõmunẽ ſcientiã. Iſta ꝓpoſitio ſumitur in naturalibus ad ꝓbandũ rotunditatẽ elementi aque: nã dicunt phĩ ꝙ idẽ vas in numero plus capit in celario ꝙ̃ in ſolario: ⁊ generaliter plus inferius ꝙ̃ ſuperius: qđ nõ eſt verũ niſi de aqua que rotũda ſupereminet vaſi. Sunt aũt iſte cõcluſiones de portionibus circulorum: nunc accedam ad angulos eorum: ⁊ primum ad angulum contingentie: prem intendo duas concluſiones de linea contingentie. ⁊ ſit prima iſta.



Quarta concluſio.

Si circulum linea recta contingat in puncto tantum contingere neceſſe eſt.

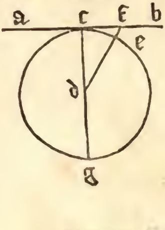
Quia ſi eum in linea contingat ducã ad terminos linee quã contingit ſcꝫ a c ⁊ a centro circuli qđ ſit d lineas a d ⁊ c d. ⁊ ducã b d in mediũ: ⁊ erunt duo trianguli a d b ⁊ d b c. tunc arguitur. aut linea b d incidit ſuper a c lineam ortogonaliter. aut nõ. ſi ſic: ergo in vtroqꝫ triangulo angulꝰ apud b rectus eſt: ⁊ per ꝯñs in illis triangulis latera a d ⁊ c d ſunt maiora b d. q: maiori angulo opponitur per tertiaꝫ capituli de triangulis. Si non incidat ortogonaliter vnus angulus quẽ facit b d. obtuſus eſt: ⁊ ei obtuſo in ſuo triangulo maius latus opponitur ꝑ eandẽ tertiã de triangulis: ex quo ſequitur ꝙ tres linee veniẽtes a centro d vſqꝫ ad puncta b c a. nõ ſunt equales: ſed tamen illa puncta ſunt pñcta circunferentie. igitur linee venientes a centro ad circunferentiam non ſunt equales: quod eſt incõueniẽs: et cõtra diffinitionẽ circuli: ergo concluditur qđ contingit in puncto ⁊ non in linea.

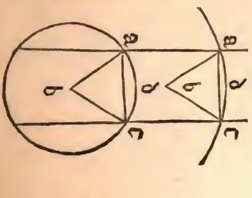


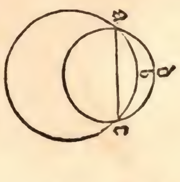
Quinta concluſio.

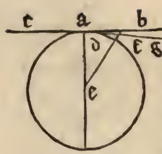
Diameter circuli perpendiculariter cadit ſuper lineam cõtingentẽ circulum ſi ſuper punctum contactus tranſierit.

Sit linea a b contingens circulũ c e g. cuius centrũ ſit d ⁊ contingat in puncto c qui eſt terminus diametri c d g: dico hanc diametrũ eſſe perpendiculariter ſuper lineã contingentẽ a b. nã ſi non eſt ꝑpẽdicülariter ad ipſaꝫ ſit d f ꝑpẽdiculariter ſuꝑ eã q̃ ſecet circũferentiã in pũcto e. erit vterqꝫ angulorꝫ q̃ ſunt





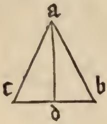




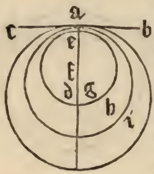
apud f rectus per diffinitionẽ anguli recti: quare per tertiã de triangulis linea c d est maior linea d f cũ sit opposita maiori angulo in triãgulo c d f. ergo q̃libet linea eq̃lis linee d c erit maior d f. sed d e linea est equalis d c ꝑ diffinitionẽ circuli. ergo d e est maior d f. quare ⁊ ps toto maior est: qd est ĩpossibile.

Sexta conclusio.

Angulus contingẽtie est omni angulo rectilineo minor: tñ est diuisibilis in infinitũ. Ex quo manifestũ est ꝙ tanto angulus cõtingentie est maior: q̃to circulus minor & tanto minor q̃to circulus maior.

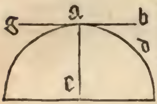


Prima pars ostenditur sic: sit linea b c contingens circulũ a d in puncto a qui est terminus diametri a e. dico ꝙ ille angulus quẽ facit illa linea contingens circulũ q̃ dicitur angulus cõtingẽtie est minor omni angulo rectilineo: hoc est omni angulo a duabus rectis lineis cõtento. Probatur hec ꝑ hunc modũ: quia inter lineas continẽtes angulũ acutũ rectilineũ q̃tũcũq; paruũ põt capi linea recta diuidens talẽ angulũ ꝑ mediũ: ⁊ inter lineã contingentẽ ⁊ circũferentiã impossibile est capi rectã lineam. Primũ presuppositũ ꝓbatur ex prima petitione ⁊ vltima: nã sint due linee angulũ cõtinentes a b ⁊ a c. deinde duco lineã a d diuidentẽ angulũ a per primã petitionẽ. dico ꝙ a d diuidens a. aut est tertia linea distincta a lineis a b ⁊ a c. aut est alteri earũ eadẽ. si sit linea tertia distincta ab illis: ⁊ cũ sit applicata vtriq; earũ super superficiẽ nõ directe cõstituet cũ eis duos angulos per diffinitionẽ anguli plani qd est ꝓpositũ. Si alteri illarũ ponatur eadẽ scꝫ a c. ergo tunc due linee recte scꝫ d a ⁊ d c superficiem clauderent qd est oppositũ petitionis vltime. Secũdũ ptꝫ qm̃ si inter lineã contingentẽ ⁊ circũferẽtiã possit capi linea recta: sit a g ad quã ducatur perpendiculariter e f faciẽs cũ a g duos rectos: nõ enim põt e a ꝑpẽdiculriter esse sup a g. q2 sup a b cadit e a ꝑpẽdiculr: ⁊ ꝑ ꝯñs angulus g a e est acut9: sit igit̃ e f perpendiculariter super a g. eritq; angulus e f a rectus per diffinitionẽ anguli recti: quare per conclusionẽ tertiã capituli de triangulis in triangulo a e f. erit a e latus maximũ. ergo e f erit minor a e. ⁊ per ꝯñs erit minor e d que est equalis a e. sicut argutũ est in premissa: qd est impossibile: constat igitur ꝙ linea a g secat circulũ ⁊ perpendiculariter linea e f cadit super partẽ linee a g directe. Pars secũda ptꝫ scꝫ ꝙ angulus contingentie est diuisibilis in infinitũ. licet enĩ nõ possit diuidi per lineã rectã. põt tñ diuidi per lineã curuã qualis est linea circũferentie. ⁊ hoc ptꝫ protrahendo a e diametrũ in cõtinuũ ⁊ directũ ⁊ super diuersa centra in eo sita describendo diuersos circulos oẽs se cõtingẽtes in puncto a. Nã angulum cõtingẽtie g b diuidit circũferentia a h super centrũ f descripta: ⁊ angulũ cõtingentie h a b diuidit circũferẽtia a i super centrũ d et sic in infinitũ descendẽdo in diametro a d ⁊ describẽdo circulos se cõtingentes in puncto a. Et ꝓpter hoc dicit campan9. li. 3. co. 15. ꝙ quilibꝫ angul9 rectilineus in infinitũ quolibꝫ angulo cõtingentie est maior. Correlariũ ptꝫ. q2 linea cõtingens a b cũ minori circũferentia constituit angulum a g b maximũ: ⁊ cum maiori a i b minimum.

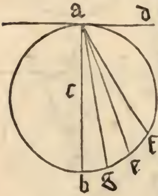


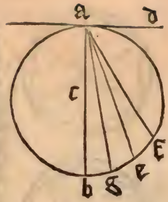
Septima conclusio.

Angulus semicirculi est omni angulo rectilineo acuto maior & omni ãgulo recto vel obtuso minor: & tamen est augmentabilis in infinitũ. Ex quo manifestum est ꝙ angulus semicirculi est angulo recto rectilineo minor & acuto rectilineo maior: sed equalis nũq̃ poterit esse.



Prima pars ptꝫ per primã partẽ premisse. figura enĩ hic disposita sit sicut prius eodẽ modo: dico ꝙ angulus e a d qui est angulus intrinsecus ex diametro ⁊ circũferentia cõtentus: vocatur angul9 semicirculi: ⁊ est oĩm acutorũ maximus. qm̃ angulus b a e est rectus per quintã huius: ⁊ ꝑ ꝯñs angul9 semicirculi nõ differt a recto nisi in angulo cõtingentie qui est minor omni angulo acuto rectilineo: per primã partẽ premisse: sed oĩs rectilineus acutus differt a recto in plusq̃ sit angulus cõtingentie. igit̃ angulus semicirculi est maior omni angulo rectilineo acuto: ⁊ est minor recto. vt cõstat. ⁊ ꝑ ꝯñs minor est obtuso: ⁊ sic ptꝫ prima pars. Scd̃a pars ptꝫ per scd̃am partẽ premisse eodẽ modo disposita figura sicut prius. ptꝫ ꝙ extendẽdo centrũ semper est angulus cõtingentie minor: ⁊ ita ꝑ ꝯñs erit angulus semicirculi semper maior. nã maior est d a i q̃ d a h. ⁊ hic maior d a g. tñ si crescit in infinitũ nũq̃ ꝑueniet ad equalitatẽ anguli recti. Correlariũ ptꝫ. sit circulus a b super centrũ c cuius diameter a b c sit super a d ortogonaliter cõtingens circulũ: dico tũc ꝙ q̃uis angulus maior angulo semicirculi detur qui est rectilineus: puta angulus d a b ⁊ angulus minor: puta g a b. nõ tñ est dare equalẽ. si enĩ sit ei equalis sit angulus e a b. ⁊ cũ angulus semicirculi sit amplissim9 oĩm acutorũ per primã hui9: erit angulus e a b amplissim9 oĩm acutorũ: sed angulus f a b est amplior e a b: sicut totũ sua parte. ergo aliquid est amplius amplissimo qd est impossibile: similiter sequeretur ꝙ angulus cõtingentie esset equalis ⁊ maior rectilineo. q2 si angulus e a b est equalis angulo semicirculi: ⁊ angulus semicirculi cũ angulo contingentie est equalis vni recto angulo. tũc sequeretur ꝙ e a d sit equalis angulo cõtingentie. ⁊ per ꝯñs angulus cõtingentie est maior angulo rectilineo: q2 angulus e a d est maior angulo f a d. Ex isto inducit campan9 tales argumentationes nõ valere. cõtingit reperire maius ⁊ minus hoc eodẽ demõstrato: ergo cõtingit reperire equale. Itẽ hoc transit de minori ad maius ⁊ scd̃m oĩa

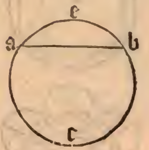




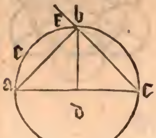
media ergo per equale. tales eni cõsequentie nõ valent. prima nõ valet p hmõi correlariũ. secũda etiã nõ valet qd sic patet imaginemur lineã a g moueri super pũcto a per circunferentia arcus b e a. ita q punctus g mutet oĩa puncta arcus b e a. quousq veniat ad lineã a d ⁊ cooperiat ipsam: ⁊ qr angulus b a d est rectus: sequit q trãscurrẽdo p minores angulos veniat ad maiorẽ in puncto d nullo angulo equali accepto angulo semicirculi. Ille g regle solũ sũt vere in quantitatib9 eiusdẽ rationis nõ solũ de genere quantitatis: sed etiã de genere qualitatis. nã in alijs nõ est cõparatio ꝓprie dicta: vt debet cõparari linea ad lineã: supficies ad superficiẽ: corpus ad corpus. nõ linea ad superficiẽ: vel superficies ad corpus. Itẽ debet cõparari linea recta ad lineã rectã: ⁊ curua ad curuã: nõ recta ad curuã: ⁊ supficies plana ad planã. cõcaua ad cõcauã: nõ plana ad cõcauã. Ergo similiter debet cõparari angul9 rectiline9 ad rectilineũ: curuilineus ad curuilineũ: mixtus ad mixtũ. nõ aũt rectiline9 ad curuilineũ vel mixtũ qualis est angulus cõtingentie: angul9 semicirculi: ⁊ angul9 portionis circuli: ni mirũ g si null9 istorũ possit adequari alicui rectilineo imo ꝓprie loquẽdo neq maior neq minor eo dici deberet.

Octaua conclusio.

Omnis portionis angulus semicirculo maioris recto est maior: minoris vero minor recto.



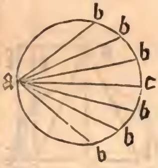
Ista pz per quartã capituli de triangulis. diuidendo eni circulũ a b c per cordã b a in duas portiões circuli. quarũ minor sit a e b superius: maior sit a b c inferius: cũ igitur eadẽ corda cõstituat angulos portionis maioris ⁊ minoris. dico q angulus a b e superior est minor recto: ⁊ angulus a b c inferior maior recto. ducã eni diametrũ a d c ⁊ lineã c b ad f. eritq per quartã de triangulis angulus a b c rectus: quare per primã de lineis angulus a b f est rectus: sed angulus portionis minoris scz angulus e b a est pars huius recti: ergo est minor recto. Itẽ angulus a b c rectus est pars anguli portionis semicirculo maioris que est a b c. g angul9 portionis scz a b c est recto maior. Ex hoc pz istantia clarior cõtra argumẽtationes ꝓus factas q non valẽt trãsit: eũ de minori ad maius scz de angulo portionis minoris q est minor recto ad angulũ portiõis semicirculo maioris q ẽ maior recto nõ transcurrẽdo tñ per equale. hoc pz si in circulo a b c. cuius sit diameter a c ⁊ moueatur a b abscidens portionẽ semicirculo maiorẽ per oĩa puncta arcus b c in oĩ puncto citra c faciet cũ arcu inferiori angulũ maiorẽ recto: ⁊ cũ arcu superiore minorẽ recto. ⁊ in omni pũcto vltra c faciet cũ arcu inferiori angulũ minorẽ recto: ⁊ cũ superiore maiorẽ recto. vt pz per hanc. sed inipso c in parte superiori ⁊ inferiori faciet ãgulos minores recto: transitur eni a minori ad maius per oĩa media: sed nõ per equale. ⁊ sic in rectilineis est reperiri maiorẽ angulũ ãgulo semicirculi ⁊ minorẽ: nõ tñ equalẽ vt ex ista pz. Nũc ergo post passiones angulorũ descendã super consideratiõnẽ centrorũ tangendo breuiter de figuris circularib9 cõcentricis: ⁊ sit hec prima conclusio de ista sed nona de materia circulorum.



Nona conclusio.

Circulorum se inuicem secantium centra diuersa erunt necessario.

Sint eni duo circuli a b c ⁊ a b d. secantes se super duo pũcta a ⁊ b. dico q eorum centra sũt diuersa: si enim habuerint idẽ centrũ necessariũ erit diuidi in portionẽ cõmunẽ vtriq circulo. sitq illud d e ⁊ ducãtur linee a e ⁊ d e: eruntq per diffinitionem circuli due linee a e ⁊ c d equales: ⁊ per eandẽ diffinitionem linee a e ⁊ c e erunt equales: quare e d equalis erit e c. ⁊ sic pars suo toti: cum vtraq earũ sit equalis linee e a per tertiam cõmunem scientiam: quod est impossibile.



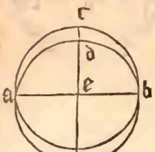
Decima conclusio.

Circulos se contingentes eccentricos esse necesse est.

De circulis cõtingentib9 quorũ vnus est extra aliũ nõ est dubiũ cũ nihil cõmune habeant nisi pũctũ cõtactus. De circulis cõtingentib9: quorũ vnus est intra aliũ ꝓbatur: sint duo circuli a b ⁊ a d contingentes se in puncto a qui si habuerint idẽ centrũ: nõ poterit esse nisi intra minorẽ eorũ p diffinitionẽ circuli. sitq ipz centrũ minoris c ⁊ ducãtur linee c a ⁊ c d ⁊ c b. eritq p diffinitionẽ circuli vtraq linearũ ductarũ b c ⁊ c d equalis linee a c. ⁊ p ꝯñs c b ⁊ c d erũt eq̃les: ⁊ pars toti qd est ipossibile. Postremo addãtur tres cõclusiones attestãtes pfectionẽ circuli: ⁊ prima quidẽ est de cẽtro inueniendo.

Vndecima conclusio.

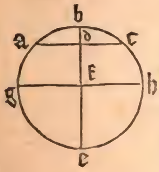
Centrũ circuli p duas sectiones differẽtes iuenitur: sed est apud euclidẽ pma

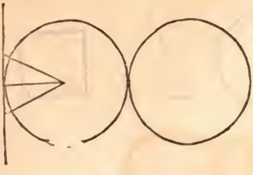


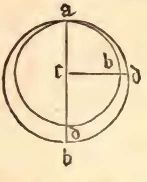
Exempli gratia sit circulus ꝓpositus a b c. cui9 volumus centrũ inuenire. in ipo circulo duco lineã a c qualitercũq diuidat circulũ: q̃ diuido p eq̃lia in pũcto d: ⁊ a pũcto b extrahã ppendiculariter lineã sup a c quã applico circũferẽtie ex alia pte: sitq linea b d e quã diuido p equalia in pũcto f p lineã g h: hunc igitur pũctũ: puta f. dicã centrũ circuli: ab eo eni oẽs linee ducte ad circunferentiã sunt equales. Scda cõclusio erit de semidiametro ⁊ circunferẽtia q est mẽsura distãtie ad circunferentiã.

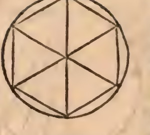
Duodecima conclusio.

Sex semidiametri abscindentes totam circunferentiam: exagonum regularem intra circulum constituunt.

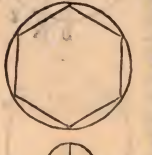








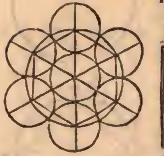
Ista ptz ex vltima capl̄i q̄rti libri p̄mi: nā p illā sex trigoni replēt locū circa pūctū: etiā cōstat qd̄ tales sex linee faciūt exagonū regularē cui⁹ anguli eq̄liter recedūt ab illo pūcto: igit̄ si describat̄ circul⁹ sup illū trāsiens p angulos exagoni: erūt vtiq̄ȝ sex abscisiones in circūferentia per sex cordas eq̄les semi diametro: ⁊ erit exagonus inscript⁹ circulo. Ex hoc ptz qd̄ sex trigoni regulares contingūt circulū intrinsece. Tertia cōclusio est de numero circulorum contingentium circulum extra.



Decimatertia conclusio.

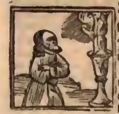
Sex circuli equales contingunt circulum exterius.

Ista ptz q̄ꝛ si a centro scd̄m q̄titatē dati circuli extēdant̄ sex linee scd̄m q̄titatē totius diametri: q̄ sunt latera triangulorū replentiū locū circa idē centrū facientiū extra circulū exagonū continentē ipsum scȝ circulū: tunc circino posito sup extremitatē cuiuslibet illarū sex linearū descriptis circulis equalib⁹ primo circulo: cōstat qd̄ oēs tangūt ipsum p̄mū q̄ precise obtinet medietatē illarū linearū ascendētiū: ⁊ siliter vnusq̄ȝ tāgit duos proximos circūpositos: nullus etiā aliū secat nec ab alio secat̄. Ptz etiā qd̄ sex circuli tangūt vnū circulū precisione vltima. Ex istis trib⁹ ꝯclusionibus senarius attestat̄ pfectionē circuli: nā in p̄ma habem⁹ senariū pūctorū q̄ sūt extremitates lineaꝝ: in scd̄a senariū lineaꝝ: in tertia senariū circulorū. Iste aūt vltime cōclusiones posite sunt iuxta quartū librū euclidis qui ē de circūscriptiōe figurarū regulariū: ne videamur ip̄m vl̄ ignorasse vel despexisse. Nūc ysoperimetroꝝ q̄ euclides pretermisit cōsideratio post triangulos ⁊ quadrāgulos recte locū habet: nā ysoperimetroꝝ passiones in ipsis sunt ⁊ alijs figurarū specieb⁹ inter se mutuo cōparatis: vn̄ ⁊ hec cōsideratio cōparatiua dicitur figurarum inter se: nā nulla vna figura ysoperimetra dicitur non existente alia cui⁹ ysoperimetra dici possit: est enim ad aliud ⁊ non ad se.



Capitulum quintum de figuris ysoperimetris.

Prima conclusio.



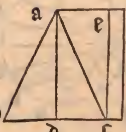
SOPERIMETRAE sunt figure vna alteri quarū perimetri sunt equales.

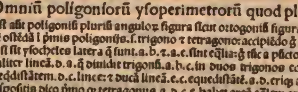
Ista statim ptz terios exponēdo: perimeter enim figure est terius vltimus vel teri sub quo vel sub q̄bus figura cōtinet̄ quēadmodū periferia. i. circūferentia in circulo vna: ⁊ tres linee in trigono. Et supficies q̄ hmōi terio vel teris cōtinet̄: dicit̄ area latine vel embodū vel embipodū in greco: ⁊ perimeter est dictio cōposita sicut diameter: ⁊ d̄: aperi q̄ est circū ⁊ metros mensura quasi mēsurās figurā circū circa: cōponitur autē perimeter cū yso v̄bo greco q̄ sonat idem q̄ equale: ⁊ d̄: ysoperimeter. a. um. adiectiue qd̄ interpretat̄ equalis mensurationis: nā yso equale perimeter circūmēsuratio d̄. Et ex hoc ptz ꝓpositio sine discussu q̄ꝛ ysoperimetre sūt figure quarū perimetri sunt equales: vn̄ triangulus est ysoperimeter quadrangulo q̄n equalibus ambiunt̄ perimetris: ⁊ circulus trigono ⁊ tetragono ⁊ sic de alijs.

Secunda conclusio.

Omniū poligoniorū ysoperimetrorū quod pluriū est angulorū maius est.

Est aūt poligoniū pluriū angulorꝫ figura sicut ortogoniū figura rectorū vl̄ recti anguli. Hāc cōclusionē ostēdā i p̄mis poligonijs. s. trigono ⁊ tetragono: accipiēdo ḡ trigonū ysoplex vl̄ ysochelē. a. b. c. ita q̄ si sit ysocheles latera q̄ sunt. a. b. ⁊. a. c. sint eq̄lia: ḡ tūc a pūcto d q̄ est in medio basis ducā ortogonaliter lineā. d. a. q̄ diuidit trigonū. a. b. c. in duos trigonos equales: deinde ducā lineā. e. a. equalē ⁊ eq̄distātem. d. c. linee: ⁊ ducā lineā. e. c. equedistātē. a. d. eritq̄ȝ altera pte logior figura. a. d. c. e. His dispositis dico p̄mo q̄ tetragonus. a. d. c. e. habet areā eq̄lem aree trigoni. a. b. c. secūdo dico qd̄ tetragonus hȝ pimetrū minorē trigono: tertio ex hoc cōcludā q̄ si addat̄ aliq̄d perimetro tetragoni ⁊ fiat equalis perimetro trigoni: maior erit area tetragoni q̄ sit trigoni sibi ysoperimetri. Quod aree sint equales qd̄ est primū ptz q̄ꝛ. a. c. linea diuidit tetragonū in duos trigonos eq̄les p primā capl̄i de q̄drāgulis ⁊. a. d. linea diuidit. a. b. c. trigonū i duos trigonos equales p secūdā capl̄i de triāgulis: igit̄ sunt ibi tres triāguli ꝑciales equales inter se quorū primus ⁊ vltimus sunt eq̄les: ḡ si ipsis equalibus idē cōe addideris puta trigonū mediū erit equale qd̄ vtrobiq̄ȝ resultat p q̄ntā cōceptionē: ex hoc ḡ cōstat q̄ aree sunt equales q̄ erat primū ꝓpositū. Scd̄m ptz q̄ꝛ duo tetragoni latera scȝ. d. c. ⁊. a. e. sūt equalia toti linee. b. c. ȝ linea. b. a: est maior linea. a. d. q̄ꝛ in trigono maiori opponit̄ angulo: ⁊ eadē ratione linea. a. c. maior est. e. c. quare tria latera trigoni sunt maiora q̄tuor laterib⁹ tetragoni: igit̄ tetragonus hȝ perimetrū minus q̄ trigon⁹. Ex istis duob⁹ sequit̄ tertiū quod si addat̄ aliq̄d perimetro tetragoni vt fiat equale perimetro trigoni: maior erit area tetragoni q̄ area trigoni: p illud principium verum: si minus continet equale maius continet amplius: addantur ergo portiones quibus superhabundant linee. a. b. ⁊. a. c. super. a. d. lineā ⁊. e. c. ⁊ sint. e. f. ⁊. c. g. ⁊ ducat̄ g. f. equalis. e. c. eritq̄ȝ tetragonus. a. f. d. g. ysoperimeter trigono. a. b. c. eritq̄ȝ eius area maior area trigoni scd̄m q̄titatē supficiei. e f. c. g. ptz ḡ ꝓpō q̄tū ad trigonū ⁊ quadrāgulū. Et veritatem habet in oībus vl̄r. quia pluralitas angulorū fert dilatationē in figura que in partib⁹ angulorū magis recedit a cētro: ⁊ ideo maior pluralitas angulorum maiorem extensionem fert in figura ceteris paribus scȝ perimetris.

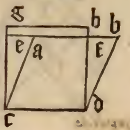




Tertia conclusio.

Omnium poligoniorũ ysoperimetrorum & æqualis multitudinis angulorum maius est æquiangulum.

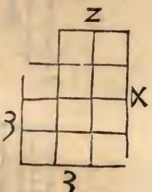
Cum ita sit qd poligonium qd est pluriũ angulorum maius sit: nũc speculandũ est de poligonijs totidẽ angulorũ sed inequaliũ: cuiusmodi sunt duo tetragoni quorum vnus est equi angulus alius nõ: dico q de oĩbus talib⁹ poligonijs ysoperimetris q maius est qd est equiangulũ: qd ostendã in tetragonis memoratis: describat enim .a.b c.d. paralellogramũ inequalium angulorũ: deinde a pũcto .d erigat .d.f. linea perpendiculariter ad .a.b. ꝛ a pũcto .c. erigatur .c.e. ꝑpendiculariter: ꝛ ducat linea .e.a. in continuũ ꝛ directũ cũ .a.b. dico tunc quod duo trianguli .d.f.b. ꝛ .c e.a. sunt equ ales: vt pꝫ ex nona propositione capĩ de triangulis: est autem angulus .f. rectus ꝛ per cõsequẽs maximus in suo triangulo ergo .b.d. est maximũ latus in illo triangulo: siliter in alio .e. angulus est rectus ꝛ ꝑ consequens latus .c.a. est maximũ in illo: vt pꝫ per tertiam capĩ de triangulis: ꝓtraham igitur .d.f. vsq ad .h. ad equalitatẽ .d.b. item ex alia parte ꝓtraham .c.e. vsq ad .g. ad equalitatẽ .c.a. ꝛ ducam lineã .g.h. ꝛ habebo .c.d.g.h. eqangulũ ysoperimetrũ ꝑmo: est enĩ .d.h. eqle .d.b. ꝛ .c.g. equale .c.a. itẽ .g.h. est equale .a.b. cum sit equale .e.f. que est equalis .a.b. sicut pꝫ quia equales sunt partes .e.a. ꝛ .f.b. igitur si eisdẽ addat idẽ cõmune puta .a.f. adhuc erunt equales ꝑ quintã cõceptionẽ: sunt igit sibi ysoperimetra tetragonũ .g.h.c.d. ꝛ tetragonũ .a.b.c.d. sed planũ est rectãgulum .g.h.c.d. maius esse secundũ eream q sit superficies .a.b.c.d. qm cõtinet ipsam totã scꝫ .a.b.c.d. preter triangulũ .f.d.b. loco cuius habet triangulũ .e.c.a. equalẽ sumptũ exterius: ergo continet equale ꝛ vltra hoc continet quadrangulũ rectangulum .g.h.e.f. ergo poligonium equiangulum maius est non equiangulo sibi ysoperimetro quod erat ostendendum.



Quarta conclusio.

Omnium poligoniorũ ysoperimetrorũ æque multitudinis laterũ & equalium angulorum maius est æquilaterum.

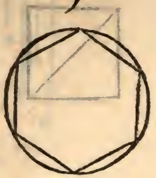
Hec propositio ꝓponitur cõsequẽter ad precedẽtem: ꝛ habet euidẽtiam statim ꝑ multiplicationẽ ꝛ ꝑ operationẽ algoristicã: sit enĩ supficies altera parte longior contẽta sub .4. lineis quarũ due sunt bipedales ꝛ alie due .4. pedũ: constat quod eius .4. latera sunt .12. pedum: igitur si vnũ duorũ laterũ sub quib⁹ cõtinetur ducatur in aliud habes qtitatem octo pedum quadratorũ: sed si facias de perimetro .12. pedũ quadratũ equale: cõstat q ipsum in quolibet latere habebit .3. pedes ꝛ tunc area erit .9. pedum quadratoꝝ. Cum ergo illud equilaterũ sit ysoperimetrum illi altera parte longiori: sequitur quod equilateꝝ nõ equilatero sibi ysoperimetro sit maius: ꝛ sic in qualibet specie figurarũ regularis figura erit capacissima equalitate perimetrorum supposita. Et qꝛ iam deuentũ est ad figuras regulares procedendo ab irregularibus etiã scdm eandẽ speciem in poligonijs: nũc ꝓponamus vnã cõclusionẽ circuli q est oĩm figurarũ regularissima: ꝛ vniformissima oĩm figurarũ ysoperimetrarum.



Quinta conclusio.

Omnium figurarum ysoperimetrarũ circulus ē maximus. Ex quo sequitur equalium superficierum aminima linea vel perimetro contineri circulum.

Ista conclusio pꝫ ex tribus precedentib⁹: si enim qd plurium angulorũ maius est: vt dicit prima istarũ: circulus aũt per totũ est angulus: vt secundo celi ꝛ mundi dicitur: est enim perimeter circuli curuatus in oĩb⁹ pũctis: ꝛ vbiq expanditur scdm applicationẽ partium nõ directã: nec ē aliqd ineo rectũ vt pꝫ per quartã capĩ de circulis: sequitur q qtũ ad hoc circulus sit capacissimus: nõ enĩ qd pluriũ est angulorum est maius nisi eo q perimeter eius in pluribus locis recedit a medio: nũc aũt perimeter circuli vbiq recedit a medio qtum possibile est in oĩbus partib⁹ suis siue locis. Itẽ si qd est equiangulum maius est vt dicit scda: circulus aũt est equalissimus incuruaturis suis qꝛ vniformiter incuruatur eius perimeter: sequitur quod qtum ad hoc circulus est maximus. Preterea si quod est equilaterum est maius vt dicit tertia: circul⁹ aũt est equalissimus in suis lateribus: quod patet si describatur poligonium equilaterũ intra circulum: tunc enĩ quodlibet latus poligonij abscindit equã portionẽ de perimetro circuli: que quidem portiones sunt quasi latera circuli: sequitur q qtum ad hoc circulus est capacissimus: qtum igitur ad oẽs cõditiones capacitatis circulus maior est in planis figuris: ꝛ consimiliter spera in solidis. Correlarium pꝫ de se. Et sic est finis huius secundi libri.

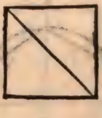


Liber tertius nostri cõpendij geometrie

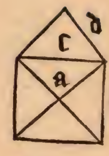
de ꝓportionib⁹ magnitudinũ & numeroꝝ: correspõdẽs sex libris Euclidis q sũt a ꝑncipio qnti vsq ad finẽ .10. lib. habet capita septẽ.

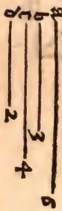
Caput primum de ꝓportionibus in cõmuni: genus ipsum primo diffiniendo: de inde inspecies diuidendo: atq mẽbra declarando.

POST CONSIDERAtionē linearū & sup̄ficierū: tertiū locū sibi iure vendicasset i geometria nr̄a speculatio corpoꝝ: cū illa sit tertia sp̄es magnitudis: nisi ēt ꝓportionū materia ad p̄missoꝝ & sequētiū rectā intelligētiā fuisset necessario intermiscēda: q̄ de causa ēt pr̄iceps nr̄ Euclides: quē seq̄mur: hāc doctrinā & totā arithmeticā sup̄ficieb⁹ & corporib⁹ interposuit. Tertia ergo cōsideratio nr̄a erit de ꝓportiōib⁹ magnitudinū: vbi imp̄mis ē aduertēdū ꝙ interest geometræ totaliter tractare de ꝓportionib⁹: nā arithmetic⁹ nō inuenit i numeris oīm ꝓportionū modos: qm̄ infinite sūt proportiones quas numerorū natura nō patit̄ sicut alias in primo libro nr̄æ arithmeticæ testati sumus. Qm̄ aūt vocabulū ꝓportionis est diffusū & latū & applicat̄ oībus fere adinuicē cōparabilibus secūdū magis & minus: ideo secūdū hunc cōceptū cōem sic pōt diffiniri. Proportio est aliquorū ad inuicē cōparabiliū vnius ad alterū certa habitudo: verbigr̄a: vt numeri ad numerum: magnitudinis ad magnitudinē: soni ad sonū: tēporis ad tēpus: motus ad motū: humoris ad humorē: saporis ad saporē: coloris ad colorē &c. Geometer aūt cōtrahit intentionē ꝓportionis ad magnitudinē & habet eā sic diffinire. Proportio est duarū magnitudinū eiusdē gn̄is vnius ad alterā certa habitudo: dico aūt eiusdē gn̄is: q̄a sola talia cōparabilia sūt adinuicē vt in cap̄lo. 4. præcedētis libri diximus. Diuidit̄ aūt ꝓportio in duas sp̄ēs. s. rationalē & irrationalē: q̄ accipiunt̄ in cōparatione ad q̄ttitates proportionaliter diuersas. Nā q̄ttitatū q̄dā sunt cōicantes siue cōmēsurabiles: q̄dā dicunt̄ incōicātes siue incōmēsurabiles. Quātitates cōicātes dicunt̄ ille q̄bus est vna q̄ttitas cōis numerās eas: dicit̄ aūt vna q̄ttitas aliā numerare q̄ secūdū aliquē numerū accepta ꝓducit ipsam: vt linea pedalis mēsurat bipedalē vel tripedalē lineā: sunt ergo cōicantes linea bipedalis vel tripedalis quas pedalis linea secūddū binariū vel ternariū numerat: q̄ttitates vero q̄bus nō est vna cōis q̄ttitas eas numerās dicunt̄ incōicātes siue incōmēsurabiles: cuiusmodi sūt diameter & latera quadrati vt infra demōstrabit̄: sunt igit̄ secūdū hæc duo ꝓportionis species scilicet rationalis & irrationalis. Proportio rationalis debet̄ q̄ttitatib⁹ cōicātibus ipsa quoq3 sola est q̄ debet̄ numeris: irrationalis vero nequaq3 cōpetit numeris sed q̄ttitatib⁹ incōmēsurabilib⁹. Vnde manifestū est ꝙ ad geometrā ꝑtinet totalis ꝓportionis consideratio: q̄a oīs ꝓportio est magnitudinis: sed nō oīs ꝓportio ē numeralis. Differūt aūt iste duæ sp̄ēs prīcipaliter in hoc q̄a ꝓportio rationalis denoīat̄ immedietate ab aliq̄ numero: cū em̄ sit q̄ttitatū cōicātiū op3 vt sc̄dm aliquē nūerū minor vl̄ aliq̄ ps minoris maiorē nūeret: ꝓpter q̄d dicit Euclides i. 6. lib. ꝙ oīm duaꝝ q̄ttitatū cōicātiū ē ꝓportio vni⁹ ad alterā tanq3 ꝓportio nūeri ad numerū: & hoc magis patebit inferi⁹. Diuidit̄ aūt hæc sp̄ēs ꝓportionis sc̄dm oēm modū sc̄dm quē diuisa est ꝓportio in arithmetica: nā ꝓportionū nūeraliū alia ē eq̄litatis: alia ineq̄litatis. Et ꝓportio ineq̄litatis subdiuidit̄: alia em̄ ē maioris ineq̄litatis: alia minoris: & vtraq3 accipit̄ īter eosdē terīos variato ordine: pr̄ia em̄ ē habitudo maioris teri ad minorē: secūda minoris ad maiorē; & vtraq3 secūdū. 5. sp̄ēs subdiuidit̄: qm̄ sp̄ēs



maioris in æqualitatis sunt. 5. vlʒ ꝓportio multiplex: ꝓportio superparticularis: & ꝓportio superpartiens: itē ꝓportio multiplexsuperparticularis: & ꝓportio multiplex superpartiens: & totidē habet species ꝓportio minoris inequalitatis q̄ eisdē designātur noībus addita ista præpositione sub. Et hæc oīa sūt dicta i arithmetica: & de multiplicib⁹ diuisionib⁹ istarū specierꝫ dictū ē ibi: q̄re nō oportet hic ampli⁹ insistere. Proportio aūt irrationalis nō denoiaꝭ sic imediate ab aliquo numero vel ab aliqua ꝓportione numerali: qa nō ē possibile vt secūdū aliquē numerū aliqua pars minoris numeret maiorē: cōtingit tm̄ mediate denoiari ꝓportionē irrationalē a ꝓportiōe numerali: vt ꝓportio diametri ad costā ē medietas ꝓportionis duplæ: & ita capiunt aliæ species huius ꝓportionis denoiationē a numeris. Diuidiꝭ aūt hæc ꝓportio in duas species q̄ sunt ꝓportio irrationalis in longitudine & in potētia: & he accipiunꝭ penes cōparationē ad q̄titates incōmēsurabiles & ad modos diuersitatis in eisdē: vt exempligr̄a descēdā ad lineas: linearꝫ em̄ q̄dā sūt incōmēsurabiles in lōgitudine tm̄: q̄dā sūt incōmēsurabiles i lōgitudine simul & in potētia. Incōmēsurabiles in lōgitudine tm̄ sūt quarū lōgitudines nō cōicāt actu: si autē supficies q̄drate in q̄s possunt cōicēt: tūc sūt incōmēsurabiles i lōgitudine tm̄ sed cōicātes in potētia: & hæc est pria species: exēplū vt diameter & lat⁹ quadrati eiusdē qa nō cōicāt actu: q̄drata aūt eorū cōicāt scd̄m ꝓportionē duplā. Si vero supficies q̄dratæ i q̄s possūt duæ lineæ q̄ sunt incōicātes & incōmēsurabiles in lōgitudine: sūt etiā incōicantes: tūc ille lineæ dicunꝭ incōmēsurabiles in lōgitudine & in potētia: & hæc species est scda: exēplū accipiaꝭ linea medio loco ꝓportionalis inter diametrū & cōstā scd̄m artē infra ponēdā: ibi em̄ lat⁹ ꝑmi q̄drati & illa linea media inuēta sūt incōmēsurabiles in lōgitudine: cōstat qa cū extrema fuerit incōmēsurabilia inter se erūt & incōmēsurabilia cū medio qd̄ scd̄m ꝓportionem cōtinuā geometricā mediat inter ipsa: vt ostēdā in sequētib⁹: & eedē lineæ incōmēsurabiles erūt in potētia qm̄ q̄drata earū nō cōicāt. Nā ex decimaseptima sexti libri euclidis: oīm triū linearū cōtinue ꝓportiōabiliū q̄ta ē pria ad tertiā tm̄ erit q̄dratū priæ ad q̄dratū secūdæ: sed pria q̄ est costa ē incōmensurabilis tertiæ q̄ est diameter: igiꝭ q̄drata priæ & secūdæ q̄ est medio loco ꝓportionalis erūt incōmensurabilia: q̄ q̄drata dicunꝭ potētiæ earū & p cōsequēs non solū nō cōicāt q̄ ad lineas sed etiā neqꝫ q̄ ad potētias. Pōt aūt vtraqꝫ spēs diuidi iterū i tot spēs q̄t modis accidit lineas sic vel sic eē incōmēsurabiles. Nā nō solū lineæ possūt eē incōmēsurabiles in lōgitudine tm̄ dū se hn̄t sicut diameter & costa: sed etiā aliis modis forte infinitis: similiter dico de lineis incōmēsurabib⁹ in lōgitudine & potētia: qa nō sūt solū ille lineæ q̄ accipiunꝭ mediæ inter diametrū & costā: sed etiam medie inter illam mediam & istas: & iterū mediæ inter illas medias: & sic in infinitū.

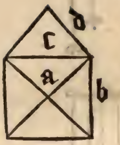




Capitulū secundū de ꝓportionalitate & de modis arguendi p eam.

PROPORTIONAlitas autē geometrica: sicut dictū ē in arithmetica: ē silitudo ꝓportionū: vnde ad minus reqrit duas similes ꝓportiones. Dicuntur aūt ꝓportiones similes quarū est eadē denominatio: vt dupla & dupla: tripla & tripla: sesquialtera & sesquial

tera & sic de aliis: & medietas duplæ & medietas duplæ de genere proportionũ irrationaliũ. Tales autem ꝓportiones aut cõmunicãt in vno termino aut nõ. Et primo quidẽ modo fit ꝓportionalitas continua quæ ad minus in tribus terminis est cõstituta: vbi cõsequẽs primæ ꝓportionis est antecedẽs secũdæ vt sicut.a.ad.b.ita.b.ad.c.& hæc est cõmunicatio in termino.b. Secũdo modo fit ꝓportionalitas discontinua vel disiũcta ad minus in.4.terminis cõstituta vbi media sunt diuersa vt sicut.a.ad.b.ita.c.ad.d. Cõtingit tñ in eisdẽ terminis vnã ꝓportionalitatẽ inferri ex alia multis modis cum fuerit ꝓportionalitas discõtinua: & euclides ponit.6.modos in quinto libro suæ geometriæ: & sunt quasi quidã modi arguendi & secundũ hoc sunt.6.species ꝓportionalitatis discõtinuæ.s.cõuersa: permutata: coniuncta: disiuncta: euersa: & æqua. Et istæ modus arguẽdi requirit ad minus duas ꝓportionalitates: sicut & ꝓportionalitas ad minus requirit duas ꝓportiones: & est vna antecedens alia vero cõsequẽs quæ infertur: vocãtur tamẽ quandoq; & ipsi termini antecedẽtia & cõsequentia: & qprior ẽ in ꝓportione qualibet vocaᷓ antecedẽs: posterior vero cõsequẽs: & sic accipies hæc noĩa in descriptionib9 sequẽtib9.



Conuersa igitur ꝓportionalitas est cum ex antecedẽtibus fiunt cõsequẽtia & ex consequentibus antecedentia ordine contrario: si arguendo: sicut.a.ad.b.ita.c.ad.d.ergo sicut.d.ad.c.ita.b.ad.a.hic enim.a.&.c.sunt primo antecedẽtia & postea cõsequẽtia: & ecõuerso de.d.&.b.istud idẽ patet in numeris accipiẽdo.6.4.3.2.& idẽ in magnitudinib9 siue cõmẽsurabiles fuerĩt siue nõ cõmẽsurabiles: cõmẽsurabiles eñi hñt se modo numerorũ: patet etiã de incõmẽsurabilibus si enim intelligas per.d.latus quadrati parui p.c.eius diametrũ per.b.latus magni quadrati p.a.diametrũ eiusdem: verum est quod sicut.a.ad.b.ita.c.ad.d.& ex hoc sequitur quod sicut.d.ad.c.ita.b.ad.a. Cõuersa proportionalitas ꝓbatur sic in prima cõclusione secũdi libri iordani: quia denominatio ꝓportionis minoris numeri ad maiorẽ est pars vel partes quotæ illius fuerint: ergo præmittendo minores numeros si.a.ad.b.eiusdẽ denoĩationis ꝓportionẽ habet sicut.c.ad.d.seqtur ꝙ tota pars ẽ.a.minor ad.b.maiorẽ: quota pars.c.minor ad.d.maiorem: ergo.d.erit æque multiplex ad.c.sicut.b.ad.a.vel seqtur ꝙ totæ ptes ẽ.a.ad.b.sicut.c.ad.d.ergo.d.erit æque superparticulare vel superpartiens ad.c.sicut.b.ad.a. Permutata ꝓportionalitas dicitur cum ex antecedente secũdæ ꝓportionis fit cõsequens primæ & ex cõsequente primæ fit antecedẽs secũdæ: vt sic arguendo sicut.a.ad.b.ita.c.ad d.igitur permutatim sicut.a.antecedens ad.c.antecedens ita.b.cõsequens ad d.consequens: & tenet cõsequẽtia siĺr siue p has lr̃as intelligas numeros siue magnitudines siue cõmẽsurabiles siue incõmẽsurabiles: in oĩb9 eñi istis q̃titatibus tenet ista cõsequẽtia. Assumiᷓ iste modus arguẽdi in aliis scientiis & ad diuersas materias trahiᷓ: sed qñ in aliis tenet & qñ nõ: difficultatẽ habet & alibi videri debet. In hoc scẽo modo arguẽdi ꝓportionalitas cõposita ex ꝓportionib9 irrationalib9 põt inferri ex ꝓportionalitate cõposita ex rationabilibus & ecõuerso: quia sequiᷓ sicut costa maior ad suam diametrũ: ita costa minor ad suã diametrum: igitur sicut costa ad costam ita diameter ad diame-

trũ ſed poſſibile eſt quod coſta ſit dupla ad coſtã & tunc ſequitur ꝙ diameter ſit dupla diametro: hoc autẽ nõ accidit in primo modo & cauſa eſt quia ĩ pri-mo ſi antecedẽs eſt ex ꝓportione maioris inequalitatis: cõſequẽs erit ex pro portione minoris inequalitatis & ecõtra: ſemꝑ autẽ in eiſdẽ terminis cũ pro portio maioris inequalitatis eſt rationalis erit & rationalis minoris inequa-litatis ꝓportio & ecõuerſo: nõia enim nõ differũt niſi ꝑ hãc præpõnẽ ſub: & per cõſequẽs rationalis nõ infert irrationalẽ nececonuerſo. Permutata pro portionalitas demõſtratur in tertia ſecũdi iordani ꝑmiſſis in ꝓportione mi-noribus terminis: quia ſi.a.ad.b.ſicut.c.ad.d.ergo quota pars vel partes eſt.a ipſius.b.tota pars vel partes erit.c.ipſius.d.quare ſequitur ꝙ.a.tota pars vel partes ſit ipſius.c.quota pars vł partes.b.eſt ipſius.d.ergo habẽt ꝓportiones eiuſdẽ denoĩationis ꝑmũ ad tertiũ ſicut ſecũdũ ad q̃rtũ: exempla patẽt clara.

Cõiuncta ꝓportionalitas eſt quotiens a diſiunctis terminis arguitur ad cõ-iunctos vt dicẽdo ſic ſicut.a.ad.b.ita.c.ad.d.igitur cõiungẽdo terminos tenet ſic ſicut.a.b.ad.b.ita.c.d.ad.d.eodẽ ordine ſeruato. Diſiuncta ꝓportionalitas dicitur cũ ecõuerſo a cõiunctis terminis ad eoſdẽ diuiſos arguitur: vt ſicut.a.b ad b ita c d ad d igitur ſicut.a.ad.b.ita.c.ad.d.& in iſtis ſeruaᵗ idẽ ordo in ter minis in q̃bus fit illatio. Coniũcta proportionalitas demõſtratur in ſexta cõ cluſione ſecundi iordani etiã ꝑmiſſis minoribꝰ terminis: quia ſi vt a ad b ſic c ad.d.ergo quota pars vł partes.a.eſt ipſius.b.tota pars vł partes.c.eſt ipſius d.vnde ſequiᵗ ꝙ ſicut.b ſemel totũ ẽ.a.b & adhuc ſuperat.a. pars vł partes ip ſius b ita d ſemel totũ eſt in c d & adhuc ſuperat c tota pars vel partes ipſius d quare talis erit ꝓportio.d.ad.c,d.q̃lis.b.ad.a.b.& ecõtra qualis ab ad.b.talis c.d.ad.d.quia ꝓportionũ denoĩationes ſũt ſimiles ex partibꝰ aliquotis. Ex qua ꝓbatione ſequitur demõſtratio proportionalitatis diſiunctæ ſatis clare. Et ex illis probaretur facillime ꝓportionalitas euerſa ſiue cõiũcta ſiue diſiũ cta per eaſdem partium denominationes. Euerſa ꝓportionalitas eſt a diui-ſis & ſimplicibꝰ terminis ad cõiunctos vel cõpoſitos nõ eodẽ ordine ſed ecõ-uerſo ꝓportionalis illatio: vt ſicut.a.ad.b.ita.c ad.d.igiᵗ ſicut.d.c.ad.c.ita.b.a ad a.Et differt a cõiuncta quia in illa arguebatur ad cõſequẽtia hic autẽ ad an-tecedẽtia & ideo vocatur euerſa. Et poteſt eſſe duplex vel euerſa cõiuncta vel euerſa diſiuncta ꝑ miſcendo eam cũ duabꝰ ſpeciebꝰ prædictis. Etiã poſſunt alii modi arguendi fieri ex permixtione horũ modorũ. Equa proportio-nalitas eſt duabus multitudinibus q̃titatum propoſitis & ſibi in ſimilitudi-ne ꝓportionũ correſpõdentibus ſubſtractis mediis primarum & vltimarũ in habitudine proportionalis illatio: ſic arguendo ſicut a & b & c inter ſe: ita d e f inter ſe igiᵗ ſicut.a.ad.c.ita.d.ad.f. Et iſti ſunt modi arguẽdi vtiles in om ni q̃titate tam cõtinua q̃ diſcreta. Et in omnibus quattuor q̃titatibus pro-portionalibus poteſt facere qs omnes has cõſequẽtias præter vltimã quæ ad minus ſex terminos requirit. Vnde ſi fuerint quattuor termini vel quãtitates proportionales conuerſim: erunt proportionales & permutatim & coniun-ctim & euerſim & rurſus diuiſim: quod dico quia diuiſam oportet cõiun-ctam præcedere ſicut in deſcriptione ꝓportionalitatis diſiunctæ dictum eſt.

Equa proportionalitas est duplex: quædā directa de qua in.21.secūdi: alia indirecta vel cōuersa de qua in.22.eiusdē secūdi iordani: prima formaṫ sic: denē duæ series nūerorū cōtinuate in minimis ꝓportionib⁹ a.b.c.& .d.e.f. itaq; sicut a.ad.b.sic.d.ad.e.& sicut.b.ad.c.sic.e.ad.f.& tandē cōcludaṫ ergo sicut.a.ad.c sic,d.ad.f. Indirecta vero arguit in eisdē sic: q̄ proportio ē.a.ad.b.ea.est.e.ad f.& quæ.b.ad.c.ea est.d.ad.e.ergo sicut.a.ad.c.sic.d.ad.f. Directa ꝓbatur ex permutata ꝑ tres cōseq̄ntias sic: si.a ad.b.sicut.d.ad.e. ergo sicut.a.ad.d. sic b.ad.e.vltra si sicut.b.ad.c.sic.e.ad.f.ergo sicut.b.ad.e.sic.c.ad.f.tandem si q̄ proportio est.b.ad.e.eadē est.c.ad.f.ergo & .a.ad.d.cū oēs illi numeri sint cōtinuati in sīlibus ꝓportionib⁹: & si.a.ad.d.sicut.c.ad.f.ergo ꝑmutatim sicut a.ad.c.sic.d.ad.f.quod erat demōstrandū. Indirecta ꝓportionalitas æqua similiter ꝓbaretur accipiendo ex ternariis binarios & permutando primū ad tertiū & secundū ad quartū: sic q̄ proportio.a.ad.b.ea est.e.ad.f.ergo sicut.a.ad.c.ita.b.ad.f.vltra q̄ proportio.b.ad.c.ea.d.ad.e.ergo sicut.b.ad.d.ita.c.ad e.quia vtrobiq; est ꝓportionalitas cōposita ex duab⁹ sīlibus: sed.a.ad.c.est ꝓportio cōposita ex duab⁹ similib⁹ & etiā.d.ad.f.ergo sicut.a.ad.c.ita.d.ad.f.

Generalis autē forma arguendi in oīb⁹ istis potest esse talis sicut primū ad secundū: ita tertiū ad quartū igitur sicut quartū ad tertiū: ita secundū ad primū vt in cōuersa: vel sic ergo sicut primū ad tertiū sic secūdū ad quartū vt in permutata: & sic de aliis: & tūc subinfertur sed primi ad tertiū est ꝓportio talis vel talis ergo secūdi ad quartū est ꝓportio cōsimilis: & sic suo modo est in aliis arguendū Aristoteles autē in tertio thopicorū vtitur tali modo arguendi ī ꝓportionalitate ꝑmutata: sicut primū ad secūdū ita tertiū ad quartū igiṫ permutatim sicut primū ad tertiū ita secūdū ad quartū: sed primū superat tertiū plusq̄ tertiū superat quartū: ergo secundū plus superat quartū q̄ idē tertiū superat quartū: exemplū sumatur isti numeri.6.4.3.2.& arguaṫ sic: sicut se habet.6.ad.4.ita.3.ad.2.quia vtrobiq; est ꝓportio sesquialtera igitur sicut.6.ad.3.ita.4.ad.2.quia vtrobiq; est dupla proportio: sed sic se habent.6 ad.3.quia.6.superāt.3.plusq̄.3.superant.2.quia superatio.6.ad.3.est secundū ꝓportionē duplā sed.3.ad.2.secundū ꝓportionem sesquialterā: proportio aūt dupla maior est ꝓportione sesquialtera: igiṫ sic se habēt.4.ad.2.quia superāt.4.2.plusq̄.3.2.quia superatio.4.ad.2.est secundū ꝓportionē duplā sed.3.ad.2.secundū ꝓportionē sesquialterā vt prius: tenet autē ista forma ꝑ hoc quod ꝓportio primi ad tertiū & secūdi ad quartū sunt æquales sicut concludiṫ ꝑ generalē formā arguendi ergo q̄tū vna ꝓportio ē maior & altera.

Capitulum tertium de regulis proportionum in cōmuni.

Prima regula.

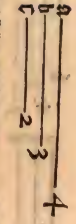
SVbiungam nunc quasdā regulas & cōclusiones ꝓportionū in cōmuni: prima est hec. Quanta est aliqua q̄titas ad aliā tanta est denominatio eius proportionis ad ipsam.

Ista pꝫ inductiue q̄ si fuerit vna linea equalis alteri: equalis proportio erit inter illas: ⁊ si dupla fuerit linea etiā ⁊ ꝓportio dupla erit: ⁊ si fuerit icōmensurabilis ⁊ excrescēs in lōgitudine ⁊ potentia: ⁊ ꝓportio irrationalis siṁr erit: ericq; ꝓportionis denoīatio cōformis habitudini terioꝝ. Et hinc manifestū est q̄ nulla q̄titas excedit alte-

ram in ꝓportionabiliter:ꝗuis vna excedat aliam incōmensurabiliter.

Secunda regula.

Proportio extremorũ ex ꝓportione mediorum ꝓportionabilium constat.



Ista ptꝫ ex prima: accipio enĩ duas lineas.a.⁊.c.duplã ⁊ sub duplã: dico tūc ꝙ ꝓportio.a.ad.c.cōponit̃ ex ꝓportione medij vel mediorũ sũptorũ inter.a.⁊.c.sit enĩ inter.a.⁊.c.siue secũdũ ꝓportionalitatem cōtinuã ⁊ ꝓportiones similes siue scd̃m ꝓportiones dissimiles ⁊ inequales seu discontinuas cōstat ꝙ ꝗtũ est b.ad.c.tñ est.a.ad.c.⁊ adhuc amplius q: ꝗtũ.a.excedit.b.ꝫ.a.excedit.c.scd̃m proportiones duorũ excessuũ sumptorũ: igit̃ excessus ille cōtinet excessus illos quare habitudo continet habitudines ⁊ ꝓportio ꝓportiones:⁊ hec voco ꝓportionẽ cōponi ex ꝓportionibus:cōsĩliter quoqꝫ si fuerint plura media ex oĩbꝰ ꝓportionibꝰ oĩm mediorũ illorũ inter se ⁊ ad extrema cōponitur ꝓportio extremorũ:quapropter videt̃ ꝙ oĩs ꝓportio pōt resolui multipliciter in proportiones. Exemplũ de ꝓportione dupla pōt enĩ resolui in duas ꝓportiones siles ⁊ ille sunt irrationales pōt etiã resolui in ꝓportiones rationales sꝫ nō siles: verbigratia in sesqualterã ⁊ sesquitertiã: sicut quaternariꝰ excedit binariũ puta scd̃m ꝓportionẽ sesquialterã ꝗ est ternarij ad binariũ ⁊ scd̃m sesquitertiã que est ꝗternarij ad ternariũ:si aũt accipias duplã ꝓportionẽ scd̃m senariũ ⁊ ternariũ inuenies plura media ⁊ plures ꝓportiones ⁊ sic semper ascendendo ad maiores numeros.

Tertia regula.

Proportiones sunt æquales quarũ denominationes sunt æquales.

Hec sequit̃ ex p̃ma accipio enĩ duas lineas.a.⁊.b.siue sint equales siue nō ⁊ arguo sic ꝗta est linea a.ad suã medietatẽ tãta est ꝓportio.eius ad suã medietatẽ ꝑ primã regulã:sed ꝗta est.a.ad suã medietatẽ tãta est.b.ad suã:ꝫ ꝗta est ꝓportio.a.ad suã medietatẽ: tanta est ꝓportio.b.ad suã medietatem. Iste ꝓportiones habẽt equalẽ denominationẽ q: sunt duple:igit̃ ꝓportiones habẽtes easdẽ denoiationes sunt equales ⁊ eodẽ modo arguit̃ in oĩbus. Ex hoc accipiunt aliqui argumẽtũ ad ꝓbãdũ relationẽ esse distinctã rẽ a rebꝰ absolutis: qm̃ si linea.a.sit maior linea.b.ꝗtitates erunt inequales ⁊ tamẽ sunt equales ꝓportiones earũ ad suas medietates sicut nũc ostensum est:sꝫ aliꝫ dicãt ꝙ nō sequitur est eq̃lis ꝓportio ergo res equalis:⁊ sic stat res inequales interse esse proportiones equales ad alias res comparatas.

Quarta regula.

Proportiones sunt inequales quarũ denoiationes sunt inequales:& in multiplicibus quidem secundum eundem ordinẽ se habent denominatio & proportio: in superparticularibus vero ordine econuerso.

Prima pars huiꝰ ptꝫ ꝑ premissã q: si equalitas ꝓportionis ⁊ denoiationis cōiunguntur necessario vt ꝓpositio dicit premissa:ꝫ cōiungent̃ ꝑ oppositũ inequalitas ꝓportiōis ⁊ inequalitas denoiationis quẽadmodũ ꝓponit hoc presens theorema. Secũda pars ptꝫ ⁊ p̃mo in multiplicibꝰ qm̃ tripla ꝓportio maiorẽ denoiationẽ hꝫ ꝗ dupla ⁊ ip̃a etiã est maior ꝓportio: est enĩ dupla pars proportionis triple vt ptꝫ ꝑ scd̃am huius: ptꝫ hoc etiã in supparticularibꝰ vbi est ordo cōuersus nam ibi ꝓportio maior minorẽ habet denoiationẽ ⁊ minor maiorẽ: q: sesquialtera maior est ꝗ sesquitertia q: sesquitertia pars sesquialtere est: sed a minori numero denominationem habet sesquialtera.

Quinta regula.

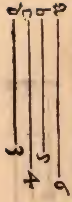
Quantitates sunt æquales quæ ad vnã ꝗtitatẽ cōpate ꝓportiones hñt æq̃les.

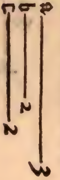
Quoniã si habẽt equalẽ ꝓportionẽ ad tertiã equalis est excessus earũ sup illã tertiã ex premissis: ⁊ si est equalis excessus earum sup idem cōe ipse ꝗtitates erũt equales inter se ꝑ qntam cōem sciam. Ex ista potest sumi argumentũ ad ꝓbandũ qd̃ vnũ infinitũ nō sit maius alio infinito: qm̃ oĩm infinitorũ ad vnã magnitudinẽ finitã est equalis excessus qm̃ infinitus ⁊ ꝑ ꝯñs equalis ꝓportio: igit̃ oĩa infinita erũt inter se eq̃lia igit̃ vnũ nō erit maius alio: ꝗre supposita eternitate mũdi a pte ante nō fuissent plures reuolutiones lune ꝗ solis preterite. Sꝫ pōt negari ꝯñs vel ad minus est tam dubiũ sicut cōclusio illata ex eo: q: ꝓportionis infinite darent̃ plures sp̄es: aliꝫ cōcedũt ꝯñs esse verũ de virtute sermonis sꝫ nō ꝓpter hanc rationẽ: sed ꝓpter illã ꝗ fiet in cōclusione sequẽte: ex qua etiã sequet̃ vnũ infinitũ nō esse alteri eq̃le: predicte enĩ due affirmatiue de ꝟtute sermonis sunt false: q: oĩs ꝓportio est finita: vñ in infinitis nulla ẽ ꝓportio ac ꝑinde neqꝫ vnũ infinitũ ẽ alteri eq̃le neqꝫ maius neqꝫ minus eo.

Sexta regula.

Quãtitates quarũ æque multiplices sunt æquales: ipse inter se sunt æquales.

Patet qm̃ submultipliciũ ⁊ eque multipliciũ eadẽ est ꝓportio ⁊ hoc ptꝫ ex arithmetica: sequit̃ igit̃ secũdũ ꝓportionalitatẽ ꝑmutatã ꝙ sicut multiplex ad multiplex ita sub multiplex ad sub multiplex: sed multiplicia sunt eq̃lia ex ipotesi ꝫ sub multiplicia erũt equalia. Ex ista pōt sumi argumentũ ad cōclusionẽ oppositã cōclusioni inducte in premissa. s. qd̃ vnũ infinitũ possit esse maius alio: nã si detur





oppositũ: accipio tunc vnitatẽ ꝛ dualitatẽ ꝛ infinitas vnitates ꝛ infinitas dualitates ꝛ arguo sic infi- nite vnitates sunt eque multiplices ad vnitatẽ sicut infinite dualitates ad dualitatẽ: sed infinite dua- litates sunt equales infinitis vnitatibꝰ ꝑ te igitˀ vnitas equalis est dualitati quod est impossibile.

Capitulum quartũ de proportionibus irrationalibus in speciali.

Prima regula.

ACCEDAM nũc in speciali magis ad ꝓportiones irrationales po- nẽdo regulas & cõclusiones sitqꝫ hæc cõclusio prima. Oĩs q̄titas oĩ q̄titati est proportionabilis: sed non omnis omni cõmensurabilis.

Prima ꝑs ꝑtꝫ ex diffinitione ꝓportionis ꝛ ex prima precedẽtis capli q̄ꝛ oĩs q̄titas ad oẽm q̄titatem aliã eiusdẽ generis est aliquãta qꝛ vel minor vel maior vel equalis: ꝛ q̄ta est vna q̄titas ad aliã tanta est ꝓportio eius ad illã ꝑ primã precedẽtis capli: ergo oĩs q̄titatis ad aliã q̄titatẽ eiusdẽ gñis est aliquãta ꝓportio. Scda pars ꝑtꝫ ex diffinitione q̄titatis cõmensurabilis ꝛ incõ mensurabilis: possunt eñ esse due q̄titates quarũ vna est maior alia ꝛ finite quibꝰ nulla est q̄titas cõmunis eas numerans sicut sunt diameter ꝛ costa quadrati igitˀ non oĩs omni est cõmensurabilis.

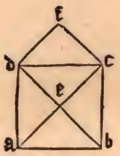
Secunda conclusio.

Omniũ duarũ q̄titatũ cõicantiũ est ꝓportio alterius ad alterã tanq̄ʒ numeri ad numerũ: si autẽ earũ nõ sit ꝓportio tanq̄ʒ nũeri ad nũerũ in cõicãtes erũt.

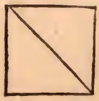
Supposita premissa statim ꝑtꝫ ista ex diffinitione cõicantiũ q̄titatũ ꝛ incõicantiũ: si enim sunt cõican- tes: ergo habent q̄titatẽ aliquã se cõiter numerãtẽ vt in superparticularibꝰ: vel minor ipsa maiorẽ numerat vt i multiplicibꝰ: illa aũt q̄titas cõiter numerãs erit scdm aliquẽ numerũ ꝛ aliquotiẽs in maiori ꝛ ꝫ aliquotiens ꝛ scdm aliquẽ numerũ in minori: aliter illa q̄titas nõ numerabit maiorẽ ꝛ minorẽ cõi- ter: accipio ergo istos duos numeros scdm quorũ alterũ est in maiore ꝛ scdm alterũ in minori manife- stũ est ꝙ ꝓportio que est illorũ numerorũ adinuicẽ est ipsarũ duarũ q̄titatũ. Ex quo sequitˀ pma pars huius ꝓpõnis ex qua etiã ꝑtꝫ scda nã si nulla talis mẽsura cõis eas mẽsuraret q̄tũcũqꝫ resoluerentˀ in partes: iam non cõmunicãtes sed incõmunicantes dicerentur.

Tertia conclusio.

Diametri quadrati ad latus eiusdẽ est ꝓportio irrationalis: est q̄ oĩs diameter coste sui quadrati assimeter: idest incõmensurabilis.



Ista ꝑtꝫ ex premissa q̄ꝛ ꝓportio lateris quadrati ad diametrũ nõ est tanq̄ʒ numeri ad numerũ: hoc probo q̄ꝛ diameter est mediũ ꝓportionale inter extrema duple ꝓportionis vt ostendã: sed in nume ris impossibile est inuenire numerũ ꝓportionalem mediũ inter numerũ duplũ ꝛ sub duplũ seu inter extrema duple ꝓportionis ergo diametri ad costã nõ est ꝓportio scdm habitudinẽ numeri ad numerũ: assumptũ ꝓbo sic: sit. e. c. latus quadrati parui ꝛ diameter eiusdẽ. d. c. sup lineã. d. c. cõstituo quadratũ aliud sit q̄. a. b. c. d. ꝛ ducatˀ. a. c. diameter eius cõstat ꝙ. a. c. est dupla ad. e. c. sed sicut se hꝫ. e. c. ad. d. c. ita se hꝫ. d. c. ad. a. c. qꝛ vtrobiqꝫ est cõparatio lateris quadrati ad suũ diametrũ: ergo ille. 3. linee scꝫ. a. c ꝛ. d. c. ꝛ. e. c. habẽt se scdm ꝓportionalitatẽ cõtinuã igitˀ. d. c. est medio loco ꝓportionabilis inter. a. c. ꝛ. e. c. q̄ sunt extrema ꝓportionis duple ꝑtꝫ ergo propositio inducta. Qd aũt adiungitˀ in theoremate ꝙ oĩs diameter est assimeter coste: est iteratio sententie premisse in vbis apud Aristotelẽ visitatis: est eñ simetrũ illud q̄ est cõmẽsurabile: assimetrũ aũt illud qd est incõmensurabile. Alius modus ꝓbãdi dictum prius assumptũ est ex ꝓportione quadratorũ diametri ꝛ coste: ꝛ iste tangetˀ in sequenti capitu- lo. Ex predictis ꝑtꝫ qualis debeat dici ꝓportio diametri ad costã q̄ꝛ est medietas duple proportio nis: nã ꝓportio dupla. a. c. ad. e. c. cõponitˀ ex ꝓportione maioris ad mediũ scꝫ. a. c. ad. d. c. ꝛ medij ad minorẽ scꝫ. d c. ad. e. c. que sunt ꝓportiones equales ꝛ similes ꝛ q̄libet earũ est medietas illorũ extremo rũ scꝫ. a. c. ꝛ. e. c. in quibꝰ est dupla ꝓportio ergo est medietas duple ꝓportionis quapropter altera earũ ꝛ quelibet simul dici debet medietas ꝓportionis duple sicut alicuius totiꝰ pars aliqua dr medietas. Patꝫ etiã qualiter cõtinuari põt ista ꝓportionalitas siue accipiendo maiores q̄titates siue minores q̄ꝛ hoc fit mutando costã quadrati maioris in diametrũ minoris quadrati vel ecõuerso diametrum minoris in costam maioris. Istud exemplũ est famosum in ꝓbia: ideo declarationi eiꝰ magis insisto. Quarta cõclusio erit de medio proportionali inueniendo geometrice inter duas lineas datas q̄ Iicũqꝫ siue earum fuerit nota proportio siue non ꝛ est talis.



Quarta conclusio.

Datis duabus lineis illisqꝫ directæ cõiunctis & ligatis: si sup totã lineam sic ex duabus aggrægatã describatur semicirculus: & a cõmuni medio duarum li- nearum sic cõiunctarũ linea ortogonaliter ad circũferentiã venerit: inter da- tas lineas secundum proportionalitatem continuam mediabit.

Hanc declaro in terminis: accipiat diameter et costa quadrati volo inuenire lineam scdm ꝓportionalitatem cõtinuam mediã inter ipsas: sitqꝫ diameter. a. b. costa. b. c. totaqꝫ linea ex his cõposita sit. a. c. sup hanc igitur lineã describam semicirculũ. a. d. c. et a puncto. b. erigam ꝑpendicularẽ lineam vsqꝫ ad. d. et hanc dico esse mediam lineã inuẽtam et dico. 3. lineas istas cõtinue esse ꝓportionales: ita ꝙ sicut se hꝫ. a. b. ad. b. d. ita se hꝫ. b. d. ad. b. c. Ista cõclusio nimis diffusam postulat demõstrationẽ et ideo hic sufficiat nobis euclidis auctoritas cuiusmodi est ista ꝓpositio nona sexti libri geometrie: et ẽ sensus in breui ꝙ omnis linea in circulo a circumferentia super diametrum veniens ortogonaliterqꝫ diametro insistens: secat ipsam diametrum in duas partes interquas est ipsa medio loco porportionalis. Et fundatur in maxima regularitate circuli cuius periferia equaliter recedit acentro in omnibus suis partibus: atqꝫ vniformiter difformiter ad extrema diametri accedit vel inclinatur.

Quinta conclusio.

Si fuerint duæ q̃titates vni q̃titati cõmunicãtes: ipse quoqꝫ inuicẽ cõmunicant ꝙ si nulli non cõmunicant interse vni cõmunicantes erunt.

Prima pars ptꝫ per diffinitionẽ quantitatum cõicãtiũ et per scdam capli pcedẽtis. Verbi gratia sint due quantitates. a. et. b. vni quantitati. c. cõmunicãtes et. a. sit ad. c. tripla. b. vero ad. c. sit dupla: dico ergo quod. a. et. b. cõmunicant: nã per scdam huius capli. a. et. c. sunt sicut duo numeri et. b. et. c. sunt sicut duo numeri ergo. a. et. b. et. c. sunt sicut. 3. numeri igitur. a se habet ad. b. sicut numerus ad numerum et p ɔñs. a. et. b. sunt cõicãtes. Scda ps sequitur ex prima ex opposito. s. ɔñtis iferẽdo oppm añtis ꝓ vt clare etiã pretẽdit ipsa forma theorematis sub q̃ ponitur. Ex quo ptꝫ illud q̃d in primo ptis huius caplo dictũ est de media linea ꝓportionabili inter costam et diametrũ: ipsa enĩ erit necessario in cõicans tam coste q̃ diametro ex quo ipsa inter se nõ cõicant: ptꝫ etiam ꝙ in quadrato nõ solũ diameter est assimeter coste: imo toti perimetro quadrati est diameter assimeter: nã costa cõicat cũ perimetro in ꝓportiõe sub quadrupla: et si diameter cõicaret cum perimetro iam diameter et costa cõicarent inter se per pesentẽ.

Sexta conclusio.

Si fuerint duæ cõmunicantes q̃titates inter se: totũ quod ex eis est cõfectum vtriqꝫ earum erit cõmunicans.

Ista patet similiter ex secunda huius capituli: qm̃ iste due quantitates erunt sicut duo numeri: et per cõsequens totũ ex eis cõpositum erit sicut aliquis numerus: et per cõsequens cõicabit vtriqꝫ partium.

Septima conclusio.

Omnium quattuor q̃titatum geometricæ proportionabilium: si fuerit prima cõmunicans secundæ tertia quoqꝫ cõmunicãs erit quartæ: si vero prima fuerit incõmunicans secunde & tertia erit incõmunicans quartæ.

Ista statim patet in modo arguẽdi in ꝓportiõalitatibus: nam si. a. b c. et. d. quantitates sint ꝓportionabiles ergo sicut. a. ad. b. ita. c. ad. d. sed hoc q̃d sequitur est impossibile si. a. et. b. sint cõmunicantes: et c. et. d. incõicantes vel ecõuerso: alioquin porportionalitas posset esse ex cõicantibus et incõmunicantibus: et per cõsequẽs oẽs q̃titates essent ꝓportionabiles q: minus differunt alij modi ꝓportionum tum q̃ cõmunicãtes et incõicantes: qđ cũ sit impossibile pꝫ ꝙ nõ sit ypotesis ex qua sequitur possibilis.

Caput quintum de ꝓportionalibus rationibus in speciali.

MVSICA scientia subalternata arithmeticæ quasdã suas conclusiones ꝓbare solet ex principiis vel etiã ex cõclusionibus arithmeticis. Et q̃a i nr̃a arithmetica introductiõe: nullas demõstrauimus cõclusiones de passionibus numerorũ: & si eas ꝓponendo insinuauerimus: sed Boetium insequentes solas diffinitiones & diuisiones vocabulorũ posuerimus q̃ essent præcognitiões ad demõstrationes: par esse duximus in hoc loco ingeniis mathematicorũ iam aliquãtulũ exercitatis in faciendis demonstrationibus: nõ nullas adducere demõstrationes de ꝓportionibus numerorũ: quæ oẽs sunt rationales: eas videlicet q̃ magis necessarias scimus ad musicã introductionẽ in calce huius nostræ æditionis subiũctã. Et q̃uis in hac geometrica introductione Euclidẽ semegarẽsem ꝑpe semꝑ fuerimus insequuti: tamẽ i hac parte Iordani nemorarii elementa arithmetica imitabimur: ꝙ clarior ac faci-

lior sit eius æditio: ꝙ̄ ea numerorū scientia quæ traditur in tribus libris post sextū apud euclidē. Sed ante ꝙ̄ ad ꝓportiones veniamus: numerorū passiones: quas in arthimeticæ nostræ primo libro solū exemplariter declaratas ꝓposuimus: seorsum demōstrabimus: sequendo earū ordinē quo ibi ꝓposite sunt: a primis numeri cōmunis passionibus ordientes: suppositis tm̄ numerorum diffinitionibus & diuisonibus ex arithmetica. Prima conclusio.

Oīs numerus circūsepositorū æqualiterꝗ ab eo distantiū est medietas numerorum: & econuerso: si quispiam numerus duorum coniunctorum medietas fuerit: illos ab eo æquidistare necesse erit.

Nam quando numerus alium superat: si differētia eorū a maiore fuerit subtracta aut minori addita: re manebunt numeri equales vt cuilibet nō mēte capto est quā notissimum: ꝗ positis trib⁹ numeris equaliter a seipsis distantibus si excessum maioris super mediū ab eo detraxeris ꝛ minori addideris: fient tres numeri equales: quoꝝ duo simul iuncti dupli sunt ad tertiū sicut duo ad vnū: quare veritas elucet prime ptis ꝙ duoꝝ altrinsecus positoꝝ per equales distantias medi⁹ numerus erit medietas. Secūda pars ex prima sequitur manifeste cū sit eius cōuertens: ꝛ cōfirmatur ad impossibile: qꝛ si dati numeri nō equidistarēt a medio: neqꝫ differētias ad ipsum equales haberēt: cum ꝗ ille medius numerus ꝓbatus sit medietas duoꝝ ab eo equedistantiū: ꝛ nunc ponit aduersarius eundē etiam esse medietatem duoꝝ nō equedistantiū: sequitur vnū impossibile ꝙ idē numerus esset simul medietas duorum maioꝝ inequalium cōtra quartam cōem sciam: cōsequentia est clara qꝛ numerus cōpositus ex duob⁹ equedistantibus ꝛ cōpositus ex duobus nō equedistāntib⁹ sunt inequales ꝑ nonā cōem sciam in geometria si equalib⁹ inequalia addanꝰ ꝛc. Ex hac cōclusione relinquitur ꝓbare qdā ꝓprietates numeroꝝ pariter impariū ꝛ ꝓportiōalitatis arithmetice quas ꝓposuim⁹ in suis locis nr̄e arithmetice.

Secunda conclusio.

Si numerus in duas tm̄ partes diuidaꝰ siue æquales siue inequales: vtraꝗ illarū in numero pari erit necessario par vel vtraꝗ impar: in numero aūt impari erit imparitati paritas associata: sic ꝙ altera partium erit par altera impar.

Huius ꝓbatio erit clara supposito illo principio: vnūquodqꝫ resoluitur in ea ex quib⁹ cōponitur: ergo per oppositū quilibꝫ numerus ex illis ptibus fuit primo cōpositus in quas postea est diuisus: quare si ꝓbauerimus oēm numerū prius fuisse cōpositum ex talib⁹ partibus quales notat hec cōclusio: sequitur manifeste veritas ei⁹ q̄ de diuisiōe ꝛ resolutione numeri ꝓponitur. Assumpiū ergo ꝓbaꝰ sic: oīne aggregatum ex duob⁹ paribus: vel ex duobus imparib⁹ est numerus par: qd̄ aūt mixte cōponitur ex pari ꝛ impari est numerus impar: ꝗ per oppositū omnis numerus par est diuisibilis in duos pares vel in duos impares: ꝛ oīnis impar mixte diuiditur per parē ꝛ imparē. Prima pars aūtis ꝓbaꝰ ex diffinitione numeri paris scꝫ ꝙ est diuisibilis in duo media: si ꝗ duoꝝ parium singule medietates simul cōponantur: totius numeri aggregati medietatē efficient: ꝗ tale aggregatum erit numerus par ex quo habet medietatē. Secūda pars aūtis sic ꝓbatur qꝛ in naturali numeroꝝ serie: q̄ ꝑ cōtinuā additionē vnitatis ꝓcedit: semꝑ alter numerus est par ꝛ alter impar alternatim: vnde fit vt quilibet impar sola vnitate distet a suo ꝓximo pari: qua detracta erit numerus par: ꝗ cōponere duos impares simul est aggregare duos pares ꝛ duas vnitates: q̄ sunt vnus par scꝫ binari⁹: quare totum aggregatum erit vt tres numeri pares simul positi: q̄ ex precedēte pte nō cōstituūt nisi parē. Tertia pars sequitur ex dictis qꝛ cōpositum ex pari ꝛ impari est vt cōpositum ex duobus paribus ꝛ vnitate: sed duo pares faciunt parem cui addita vnitate fiet impar: restat ergo totū antecedens totumqꝫ assumptum verum ꝛ per cōsequēs tota cōclusio euidenter ꝓbata. Ex qua sequiꝰ primo ꝙ si a numero pari dematur par eo minor: residuum etiā erit par: ꝛ si ꝑs detracta fuit impar: residua quoqꝫ erit impar. Scd̄o ꝙ si a numero ipari detrahaꝰ par eo minor: relinqueꝰ impar: ꝛ ecōtra si dematur impar remanebit par.

Tertia conclusio.

Multiplicatio numeri paris in alium parem ꝓducit parem: sicut etiā impar ductus in alium imparem effecit imparem: at vero permixte par multiplicās imparem aut econuerso procreat semper parem.

Supposito ꝙ multiplicare nō sit aliud q̄ multos similes numeros simul aggregare ꝛ in vnū colligere: qd̄ oībus improperatulo est ex terio: prima pars huius cōclusionis est manifesta ex precedēte vbi dictum est ꝙ oīne aggregatū ex paribus est numerus par: ꝗ multiplicare numerū parē per alium parē erit plures pares in vnū colligere: quare ꝛ numerū parem ꝓducere. Secūda pars similiter claret ex dictis qꝛ multiplicare imparē per imparē est plures impares aggregare in numero impari: sed tales

sunt velut plures pares simul ⁊ plures vnitates in numero impari:q̄ simul sunt vnꝰ impar: ergo totū aggregatū erit impar q: ex crescit vnitas i eo. Tertia pars ex prima sequitur q: aggregare plures impares in numero pari est velut plures pares ⁊ vnitates in numero pari cōponere: ergo totus numerus inde resultans erit par: ⁊ sic patz tota cōclusio. Ex qua sequitur primo ꝙ numerus par nullius nisi paris pōt esse pars aliquota: q: ex multiplicatione ptis aliquote ꝓducitur totū: at numerus par multiplicatus quocunq; non ꝓducit nisi parem vt hz hec conclusio. Secūdo sequitur ꝙ numeri imparis nulla erit pars aliq̄ta nisi impar ⁊ scdm nūerū imparē suū totū denoīans. Tertio sequit ꝙ si ipar fuerit pars aliquota numeri paris: ipsa nō nisi scdm parē numerū suū totū mēsurabit: ac perinde etiā medietatis eiusdē totius eadē esse poterit pars aliquota sz scdm medietatē mēsurationis totiꝰ: hec ⁊ plura alia ꝓlixe demōstrat iordanꝰ in pncipio sui septimi per .16. cōclusiōes primas: sz satis bñ ꝓbant ex dictis vt ondimus.

Quarta conclusio.

Sicut omnis numerus pariter par est diminutus: ita & q̄libet eius pars aliquota est numerus pariter par: atq; præcise secundū pariter parem numerū suū totum mensurans: excepta vnitate.

Ex diffinitione simul ⁊ ꝯgnatione pariter pariū: quas hic supponimꝰ ex primo libro nr̄e arithmetice: statim ꝓbat prima pars huiꝰ cōclusionis: quilibet eñ sequēs pariter par in naturali eoꝝ serie est duplus ad suū ꝓximo precedentē: sed primus eoꝝ sup vnitatem q̄ duplat nō addit nisi vnitatē: ergo ille ⁊ vnitas simul iuncti minus sunt q̄ ipsemet duplatꝰ: minꝰ itaq; q̄ sequēs pariter par: cuiꝰ ille sunt oēs ptes aliquote: eadē rō est de aliis oibus: ergo quilibet numerus pariter par est diminutus: q: ex suis ptibus oibus nō integratur. Secūda pars cōclusionis etiā facile ꝓbatur rōne ducēte ad impossibile: si eñ nō sit vera: ergo ptem aliquotā numeri pariter paris mēsurabit numerꝰ impar ex diffinitiōibꝰ aliarū specierum paritatis ⁊ imparis numeri: ꝯñs est impossibile q: sequeret ꝙ ille numerus impar etiā mensuraret pariter parē: ois eñ pars aliquota ptis aliquote est etiā pars aliquota totius licet sub alia denoiatiōe: sed impossibile est numerū imparē esse ptē aliquotā numeri pariter paris q̄ solū ex duplicatione cōtinua numeroꝝ ab vnitate ꝓcreatur ⁊ nō aliter: hoc nō esset verū facta illa ypothesi: q: ex cuiuslibet ptis aliquote multiplicatiōe ꝓducitur totū: ergo ex multiplicatiōe imparis ꝓcederet pariter par quod est oio impossibile. Tertia pars cōclusionis eodē modo ꝓbat: q: oīs pars aliquota mēsurat suum totū per multiplicationē: sed pariter par nō nisi per pariter parē multiplicatus ꝓducit pariter parem: alias sequeretur dictū inconueniens scilicet ꝙ numerus impar esset pars aliquota pariter paris ꝓducti ⁊ ipsum mēsuraret: tota ergo cōclusio vera. Dicitur notanter excepta vnitate: quia illa est pars aliquota oīs numeri licet non sit pariter par: denominat tamen pariter parē secundū ipsum.

Quinta conclusio.

Ex ductu medii vel mediorū in numeris pariter paribus ac pinde in oī geometrica ꝓportionalitate cōtinua: idē ꝓducit quod ex multiplicatione extremorū & quorūcūq; lateraliū æqualiter a mediis distātiū: eadē ratio est in denominatione partium aliquotarū adinuicem respectu totius pariter paris.

Comprehendimus hic duas vltimas ꝓprietates pariter pariū numeroꝝ: pro quarū demōstratione premittimus hic regulā in arithmetica nr̄a sepius reppetitam: ꝙ numeroꝝ simpliciū ⁊ suoꝝ eq; multiplicium eadē ⁊ similis est ꝓportio: q̄ iordanus in scdo aliis verbis sic ponit in septima cōclusione: si vnus numerus duos multiplicet: erit ꝓductoꝝ ⁊ multiplicatoꝝ eadē ꝓportio: ⁊ in octaua ꝯclusiōe: si duo numeri eundē multiplicēt: erit multiplicantiū ⁊ ꝓductorū eadē ꝓportio: ⁊ fundat eas in ꝓportionalitate pmutata: q̄ faciliter adaptat cū sint ibi quattuor numeri ⁊ due siles ꝓportiones: hac regula supposita: arguo ex qnta cōclusione tertii capitli huiꝰ: q̄titates ille sunt equales q̄ ad vnā tertiam cōparate ꝓportiones habēt equales: sed numerus ꝓductus ex ductu aut multiplicatione medii numeri per seipsum si fuerit tantū vnus medius: vel ex multiplicatione vnius medii p alterū si fuerint duo mediales: ⁊ alter numerus ꝓductus ex multiplicatione extremorū aut lateraliū equaliter a mediis distantiū: tales inquā duo numeri sic ꝓducti equales habēt ꝓportiones ad eundē tertiū numerū dabilē: ergo sunt equales vt ꝓponit cōclusio: minorē sic ꝓbo: sint quattuor numeri pariter pares in cōtinua ꝓportione dupla positi .a.b.c.d. sitq; numerus ꝓductus ex multiplicatione duorū mediorū .e. sit etiā ꝓductus ex multiplicatione duorū collateraliū vel extremorū .f. ⁊ hos duos .e.f. volo ꝓbare eē equales: duco .a. in .b. ⁊ ꝓducat inde .g. ergo p regulā allegatā ex arithmetica q̄ ꝓportio .b. ad .d. ea est .f. ad .g. ex quo idē numerus .a. multiplicauit duos .b. ⁊ .d. ⁊ ꝓduxit duos .g. ⁊ .f. ⁊ q: numerus .e. ꝓducebat ex ductu .b. in .c. ergo que ꝓportio .a. ad .c. ea erit .e. ad .g. per eandē regulā q: ex multiplicatione eiusdē numeri: scz .b. ꝓducti sunt in duos .a. ⁊ .c. sed ex cōclusionis ypothesi qualis est ꝓportio .a. ad .b. talis est .c. ad .d. ergo .e. ⁊ .f. ad .g. equales habēt ꝓportiones vt ꝓmisit nostra minor: ac p inde .e. ⁊ .f. sūt numeri equales vt dicit prima pars cōclusionis: eadē ꝓbatio multo efficatior fuisset posito vno tantū mediali numero bis tñ ad extrema cōparato. Secūda pars correlarie sequit ex prima si partes aliquote eiusdē totius sese denoiantes sint etiā sese multiplicātes ad cōstituendū totum.

Sexta conclusio.

Cuiuslibet nūeri pariter iparis q̄libet pars aliquota discordat a sua denoīatione q̄tū ad paritatē & imparitatē: vnde plures hui⁹ speciei numeri seriatim sumpti æqualib⁹ distabūt differētiis: ꝓportionalitatēq; efficiēt arithmeticā.

Tres sunt modi generationis numeroꝝ pariter impariū: primus ꝑ cōtinuam duplicationē singulorum impariū: que est multiplicatio eoꝝ ꝑ binariū: secūdus ꝑ cōtinuā dimissionē vnius numeri ex naturali serie numeroꝝ pariū: itaq; p̄mus par tertius q̄ntus septimus ꝛc. sunt numeri pariter impares: tertius modus multiplicādo quēlibet imparē ꝑ numerū pariter imparē ꝓducet etiā pariter impar. Tūc sic arguo ad p̄mā partē cōclusionis ex diffinitione: cuiuslibet p̄iter imparis medietas ē numerus impar q̄ ꝑ multiplicationē binarij producit suū totū scd̄m primū modū: g̃ binari⁹ ꝛ ille impar sunt partes aliquote eiusdē totius sese mutuo denoīantes: sed iste discordāt a suis denoīationibus vt patet: ꝛ eadē ratio est de qualibet alia parte aliquota: q: cuiuslibet numeri paris binarius est pars aliquota: ꝛ vt ꝓbauimus in quolibet pariter impari binarius impariter cōtinet̃ ab impariq; denominat̃: g̃ impar sibi correspōdēs siue binariū denoīans in eodē numero pariter cōtinebit̃ ꝛ respectu eius parē habebit denoīationē. Scd̄a pars cōclusionis ex scd̄o modo clara est q: in naturali numeroꝝ serie vbi inter aliquos equales totidē medij sunt ommissi equales etiā sunt eoꝝ differentie: hic autē cōtinue vnus medius par dimittit̃ ꝛ duo impares: ergo inter quoslibet duos proximos pariter impares mediant tres numeri sicq; quilibet eoꝝ q̄nto loco ab altero situat̃: quare eoꝝ differētie erūt eq̄les .s. q̄tuor vnitates. Tertia pars ex scd̄a sequit̃ ꝑ diffinitionē ꝓportionalitatis arithmetice.

Septima conclusio.

In numeris pariter imparib⁹ seriatim positis: & vniuersaliter in oī arithmetica ꝓportionalitate: additio duorū medioꝝ æqualet additioni duoꝝ extremorū: & quorūcūq; duorū lateraliū æq̄liter a mediis distantiū: at vero vbi vnus tantū medians est numerus: ille dimidiū erit aliorum duorū additorum.

Secūda pars hui⁹ ex p̄ma cōclusione istius capl'i ꝓbata est ad eamq; sequit̃ correlarie: q: naturalis series numeroꝝ cū ꝓcedat ꝑ cōtinuā additionē vnitatis: equales semꝑ habet differētias: sicut fit in numeris pariter imparib⁹ ꝛ in ꝓportionalitate arithmedica: g̃ numerus medius hic eodē modo se habebit ad suos collaterales equaliter ab eo distātes sicut illic: q: .s. erit eoꝝ additoꝝ dimidiū. Prime autē partis ꝓbatio hec erit: q: si oīm taliū numeroꝝ differētie sunt equales cōtinue: g̃ quelibet due simul sumpte adequant̃ alijs duabus simul sumptis: sed remotis differētijs duo medij adequantur duob⁹ collateralib⁹ equaliter ab eis distātib⁹ vel etiā duob⁹ extremis: g̃ appositis equalibus differētijs eisdē numeris erūt equales per octauā cōem scientiā: si equalibus equalia addita fuerint q̄ inde resultabunt erunt equalia.

Octaua conclusio.

Impariter par omnis cum ex duab⁹ prædictis speciebus paritatis procedat: consequēs erit suas partes aliquotas varias esse: & earū quasdā suis denominationibus conformes: alias vero difformes fieri.

Potest duobus modis hec species numeroꝝ ꝓcreari: primū dedimus in arithmetica ex Boetio: alterū ponimus hic ex Iordano .s. multiplicādo pariter parē ꝑ pariter imparē: vt numerus inde productus sit impariter par vt ꝓponit p̄ma pars huius cōclusionis: q̄ sic ꝓbat̃: cuiuslibet numeri ex duoꝝ multiplicatione ꝓducti quilibet ꝓducētiū est pars aliquota ab altero denoīata: vt p3 ex diffinitione partis aliquote: ꝛ q: ex multiplicatione predictarū specierū numerus ꝓductus est par ex tertia hui⁹ capl'i: sequit̃ q̄ q̄libet illoꝝ sit pars aliquota hui⁹ ꝓducti: qui ꝑ quartā huius capl'i nō pōt esse pariter par: neq; erit pariter impar ex diffinitione: q: ei⁹ medietas nō est impar: cū ꝓducat̃ ex multiplicatione paris ꝑ parē q̄ sunt medietates ꝓducentiū: restat g̃ a sufficiente diuisione q̄ ille ꝓductus sit impariter par q: nō est dabilis q̄rta spēs paritatis. Scd̄a pars ex prima sequit̃ ꝑ illā regulā in quarta cōclusione positā: q̄libet pars partis est pars totius ꝛc. q: tūc numeri impariter paris quedā partes erūt pares ꝛ alie impares .s. ille oēs q̄ erāt partes suoꝝ ꝓducentiū ꝛ ille seipsas mutuo denoīabūt: quare etiā sequit̃ q̄ alique partes erūt cōformes suis denoīationib⁹ .s. ille que erāt partes numeri pariter paris istū ꝓducentis ex quarta huius: ꝛ alie difformes ab eis ille vi3 q̄ erant partes pariter imparis: nā ꝛ illarū q̄ sunt numeri impares op3 q̄ pariter cōtineant̃ in suo toto: q: nullius numeri paris p̄s aliquota pōt eē ꝛ re ꝛ denoīatione ipar ex tertia hui⁹: q̄ vero sunt numeri pares modo cōcordāt modo discordāt a suis denoīationibus scd̄m varias ptes aliq̄tas q̄ illas denoīant vt p3 ex dictis.

Noua conclusio.

Plures series impariter pariū ordinate & simul positæ formā habēt q̄drilate.

ram: cui9 lõgitudo geometricã: latitudo arithmeticã ꝓportiõalitatẽ exhibet.

Non alia sed eadẽ figura resultat ꝑ istũ modũ q̃ ꝑ illũ quẽ posuimus in arithmetica ad generãdũ numeros impariter pares: sint ḡ due linee recte ad angulũ rectũ cõcurrẽtes: ponaturq̧ in altera earũ series pariter pariũ a binario incipiens: in altera series pariter impariũ incipiens a senario: ducaturq̧ primus vnius linee in oẽs alterius linee vt fiat inde vna series impariter pariũ: idẽ fiat de scdõ ⁊ tertio ⁊ oib9 alijs ⁊ resultabit forma quadrilatera vt insinuat ṗma pars nr̃e cõclusionis. Scda vero ꝓbatur q: lõgitudo figure erit iuxta lineã pariter pariũ: latitudo aũt scdm lineã pariter impariũ: s3 pariter pares in sua serie habẽt ꝓportionalitatẽ geometricã ex q̇nta huius: pariter vero impares positi sunt in proportionalitate arithmetica ex septima huius: ḡ similiter omnes series illorũ numerorũ in longitudine habent geometricam: in latitudine arithmeticam ꝓportionalitatem: cõsequẽtia est clara ex regula in quinta conclusione adducta: q: oẽs series numerorum in lõgitudine figure sunt multiplices ad seriem prriter parium: ⁊ in latitudine ad seriem pariter imparium.

Decima conclusio.

Ex continua additione numerorũ pariter parium naturali ordine dispositorum: ac ex multiplicatione imparis primi inde resultãtis per maximũ additorũ numeri perfecti sic ꝓcreantur: vt in quolibet numerãdi limitę vnus tantum perfect9 sit repperibilis: atq̧ perfecti oẽs in naturali serię alternatim senario octonarioq̧ terminentur.

Due vltime huius partes ex ṗma clarissime deducũtur ⁊ inductione notificanť: ṗme ḡ partis probationi insistamus: si eñ ꝑfectus numerus est ille cuius sũmã precise cõplent oẽs eius partes aliquote simul sũpte: ⁊ ꝓbauerimus ex predicta multiplicatione ꝓcreari numerũ ex oib9 partib9 aliq̇ts suis precise cõstantẽ: effectũ erit talẽ esse ꝑfectũ qualẽ ꝓponit cõclusio: minor ḡ assumpta sic deduciť: nam ille pariter par ⁊ ille primus impar: ex quoꝝ multiplicatione aliq̇s numerus ꝓduciť: manifeste sunt eius partes aliquote sese mutuo denoiantes: ac ꝑinde oẽs pariter pares illũ multiplicantẽ ꝑcedẽtes q: sunt ei9 partes aliquote erũt ptes aliquote totius ꝓducti: l3 sub alijs denoiationib9 hoc pacto: q: eñ ille maximus pariter par denoiatur ab illo impari: ḡ ꝓximo precedẽs illũ pariter par q: est medietas eius denoiabiť a duplo predicti imparis: ⁊ alius inferior pariter par q: est quarta pars maximi ⁊ medietas predicti denoiabiť a q̃druplo illius imparis q̃ est duplus ad duplũ ei9: ⁊ sic ɔ̃nr descẽdendo ꝑ pariter pares ⁊ ascẽdo ꝑ multiplices imparis scdm eundẽ ordinẽ. i. dimidiando illos ⁊ duplicando istos donec ꝑueniať ad vltimos hinc ⁊ inde: tũc sicut ex q̃libet hmõi multiplicatione duarũ partiũ sese denoiantiũ ꝓducitur ille totus numerus: sic ex additione oim illarũ simul resultat idem precise: quare erit ꝑfect9 numerus: vt p3 in hac serie. 1. 2. 4. 8. 16. nã hi oẽs simul sunt. 31. q̃ est impar ṗmus: ductis igitur. 16. in. 31. ꝓducitur. 496. quẽ dico esse numerũ ꝑfectũ: nã eius partes aliquote oẽs sunt predicti pariter pares vsq̧ ad vnitatẽ inclusiue q̃ sub. 16. cõtinue ꝓcedunt dimidiando: ⁊ totidẽ sup. 31. qui ꝓcedãt cõtinue duplãdo vt. 31. 62. 124. 248. 496. itaq̧ alternatim vnus istoꝝ denoiat vnũ illoꝝ ⁊ ecõtra: ⁊ adinuicẽ multiplicati ꝓducũt totũ numerũ: q̃ etiã vnitati correspõdet eamq̧ denoiat aq̃ ⁊ ipse denoiať: sicut eñ. 31. est pars decimasexta: sic. 62. est octaua: et. 124. est quarta ⁊. 248. est medietas predicte sũme. 496. que semel est idẽ numer9: ⁊ sicut ductis. 16. in. 31. ꝓduciť illa sũma: sic ductis. 8. i. 62. et. 4. in. 124. et. 2. in. 248. et. 1. i. 496. Tandem additis oib9 predictis ꝑtib9 aliquotis resultabit eadẽ sũma precise: q: nullas alias ptes aliquotas ab istis habere põt ḡ est ꝑfectus: oẽs ɔ̃ne huius argumẽtationis patẽt ex predictis cõclusionibus huius capĩ. Sequũtur ⁊ antecedũt ad hãc cõclusionẽ multa q̃ Jordanus enumerat in fine sui septimi libri. Primũ est: ꝙ oĩs pars aliquota numeri ꝑfecti preter vnitatẽ est numerus diminut9. i. pariter par vel ṗmus impar vel aliq̇s multiplex eius: p3 ex dictis. Scdm ꝙ infra decẽ vnus tãtũ sit numerus ꝑfect9. s. sex: ⁊ infra centũ sed supra decẽ itẽ vnicus ꝑfect9: sc3. 28. et infra mille sed supra cẽtũ iterũ solus vnus ꝑfect9 vt. 496. et sic ɔ̃nr ꝑ oẽs limites numerãdi q̃ decuplando sese ꝓcedũt: p3 hoc inductiue q: multiplicatio predicta pariter pariũ ꝑ impares primos: hos ⁊ nullos alios numeros potest ꝓcreare vt dicit secunda pars cõclusionis. Tertium est ꝙ dispositis in suo naturali ordine oibus prefectis numeris alternatim senario ⁊ octonario numeris parib9 terminantur vt dicit tertia pars cõclusionis: q: sic semꝑ occurrit multiplicatio ꝑfectorum productiua ⁊ nõ aliter: quare sequitur vlterius ꝙ oĩs numer9 ꝑfect9 ẽ par ⁊ nullus ipar. Quartũ est ꝙ numerus ꝑfect9 nunq̃ põt esse pars aliquota numeri ꝑfecti: imo neq̧ diminuti sed semper abũdantis de quibus statim dicemus.

Vndecima conclusio.

Sicut oĩs numerus diminut9 a sola vnitate aut ab alio numero diminuto mẽsurari potest: sic cuiuslibet numeri abũdãtis multiplex erit necessario abundãs: adeo ꝙ nullius alterius q̃3 abũdãtis abũdans potest esse pars aliquota.

Aduertendũ hic ꝙ l3 numerus ꝑfectus semꝑ sit par: tñ abũdans ⁊ diminut9 indifferẽter esse possunt

pares τ impares: nã sicut ois pariter par in conclusione q̃rtahuius ꝓbatus est diminut⁹: sic ois impar p̃mus est diminut⁹: q: sola vnitas est pars eius aliquota q̃ est minor eo: idẽ ꝓbatur de numeris abundãtibus q: eorũ quidã sunt pares alij impares. Ergo p̃ma pars cõclusionis verificat̃: q: impar primus a sola vnitate mẽsuratur: pariter vero paris numeri pars aliquota ex quarta hui⁹ nõ est nisi vnitas vel pariter par q̃ est diminut⁹: impar etiã cõpositus si fuerit diminutus vt. 9. vel. 15. ab impari p̃mo mẽsurat̃ q̃ similiter ꝓbat⁹ est diminut⁹. Scd̃a pars etiã vera est: q: duplare vel triplare nũerũ abũdantẽ est duplare vel triplare oẽs eius ptes aliquotas q̃ ita hĩ ꝓducũt abundãtẽ numerũ sicut simpliciter accepte ꝓducebãt ipsum ex diffinitione eius. Tertia pars ex p̃ma sequitur τ scd̃a: ex prima quidẽ q: abũdans nõ põt esse pars aliquota diminuti vt ꝓbatũ est: neq̧ pfecti q̃ solũ ex pariter pari τ impari p̃mo ꝓcedebat ex precedẽte cõclusione: g̃ restat q̧ nõ sit pars aliquota nisi abundãtis numeri. Ex scd̃a vero parte etiã idem sequitur: q: ois pars aliquota est submultiplex ad suũ totũ: τ cuiuslibet abundãtis multiplex etiã est abundãs τc̃. Numeros abundãtes pares facile inueniemus si. 12. eorũ p̃mũ multiplicauerimus: numerus etiam pfectus sua multiplicatione abũdantẽ ꝓducit ex quarto correlario precedentis. Sed imparem abundantẽ inuenire haud facile est τ credo: primũ eorum esse. 45045. cuius partes aliquote sunt. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. et totidẽ alie que ex diuisione toti⁹ per istas inuenientur: τ ꝓducunt omnes simul addite. 40091. deinde omnis multiplex predicti numeri. 45045. erit abundans siue par siue impar.

Duodecima conclusio.

Quia ois numerus aut primus est aut cõpositus: ille q̃ in se p̃mus est ad oẽm aliũ p̃mus erit: compositus vero ois ab aliquo primo necessario metasuratur.

Hec vocabula numerus primus in se: primus ad aliũ: cõposit⁹ in se: cõpositus vel cõmẽsurabilis ad aliũ: cõia sunt numeris parib⁹ τ impib⁹ quẽadmodũ de abũdante τ diminuto dictũ est: lз an arithmetica nr̃a p̃mũ τ cõpositum ad solos impares: abundantẽ τ diminutũ ad solos pares retulerimus: hic tamẽ ad oẽs numeros ea adaptanda suscipimus. Prima g̃ pars cõclusionis a sufficienti diuisione probat̃ q: ois numerus habet partẽ aliquotã vnitatẽ: vel g̃ eam solã τ: sic dr̃ primus: vt binarius ternarius τc̃. vel preter vnitatẽ habet aliũ numerũ ptem aliquotã sui: τ sic dicit̃ cõpositus: vt quaternarius nouenarius τc̃. Itẽ numerus q̃libet cõuenit cũ alio numero in vnitate parte aliquota vtriusq̧: vel g̃ in ea sola: τ sic dicit̃ p̃mus ad alterũ: vel etiã in alio numero preter vnitatẽ: τ sic dr̃ cõpositus ad alterũ: neq̧ potest dari mediũ inter hec mẽbra q̃ p contradictionẽ separant̃. Scd̃a etiã pars ex diffinitione numeri ad alterũ p̃mi est p manifesta: q: si aliq̃s numerus in se nullã partẽ habet aliquotã preter vnitatẽ: g̃ ad alterũ cõparat⁹ in nulla alia parte aliquota cõuenire poterit cũ eo: q̃d est ad illũ primũ esse: qui etiã duo numeri dici solẽt cõtra se p̃mi τ ad inuicẽ p̃mi. Tertia pars sĩr notificat̃ ex terminis: q: si aliq̃s numerus est cõposit⁹ g̃ ab alio numero parte sui aliquota mẽsurat̃ ex diffinitione: vel g̃ ille alius numerus est p̃mus vel cõposit⁹: si primus habemus ꝓpositũ: si cõpositus: quero iterum vel sua pars aliquota est numerus primus vel cõpositus: si primus: ille etiã erit pars aliquota toti⁹ τ sic ꝓpositũ est verũ: si cõpositus ꝓcedã vlterius donec inueniam numerũ p̃mũ: q: in numeris decrescẽdo nõ ꝓcedit̃ in infinitũ. Ex hac cõclusione sequitur p̃mo q̧ si aliq̃s numerus mẽsuret cõpositũ ex duobus: necessario τ alterũ cõponentiũ mẽsurabit: ac perinde alteri illorũ est cõmẽsurabilis. Scd̃o sequitur q̧ quicũq̧ numerus mẽsurat cõpositũ τ vnã partẽ eius: mẽsurabit τ alteram: si in duas tantũ partes diuidat̃: τ multa alia ex his sequerent̃ facilia que oia fundant̃ in regula superi⁹ allegata: quicq̃d est pars partis est pars totius τ ecõtra: loquẽdo precise de partibus aliquotis.

Decimatertia conclusio.

Si impares numeri in sua naturali serie disponant̃: & totidẽ ipares post quẽlibet sumant̃ quot⁹ ipse ab vnitate fuerit: extremũ sũptorꝫ ab illo nũmerari cõueniet: & itẽ totus ab illo extremo quot⁹ ipse a primo: etiã a primo mensurabit̃: sicq̧ deinceps: omnes vero medii semper relicti erunt impares primi.

Hec est. 25. septimi Iordani quã etiã sub alijs vbis in nr̃a arithmetica posuimus: τ aliter sub alijs ponit eam Boetius in sua: vbi gñatio p̃marũ specierũ imparitatis declarat̃: in naturali g̃ serie imparium ternarius est p̃mus q̃ idẽ est tertius numerus ab vnitate: quare post ternariũ accipiamus tres impares ipsum imediate sequẽtes: scз. 5. 7. 9. dico q̧ horũ extremũ mẽsurat ternarius q: est pars aliquota eius: q̃d sic ꝓbatur: q: ille nouenarius est maior ternario τ excedit ipsum adeo q̧ differentia eorũ est cõposita ex tribus differẽtijs intermediorũ ad seipsos τ ad duos extremos p secũdam cõclusionẽ tertij capĩ huius: sed differẽtia duorũ impariũ ꝓximorũ est binarius: g̃ multiplicato binario p ternarium fiet tota differẽtia q̃ est inter nouenarium τ ternarium: cui si addat̃ ipse ternarius constituet̃ nouenarius: g̃ iste est mẽsurat⁹ ab illo: g̃ ternarius ẽ ps aliquota nouenarij q: aliquoties sumpt⁹ reddit integrũ nouenarium: quare nouenari⁹ est numer⁹ cõposit⁹. Deinde acceptis iterũ trib⁹ imparibus ꝓximis post nouenariũ: scз. 11. 13. 15. extremũ eorũ mẽsurat ternari⁹: ꝓbatio: q: inter eos sũt sex differẽtie sicut prioib⁹: g̃ ternari⁹ duplat⁹ ꝓducit totã differẽtiã p multiplicationẽ suam cum binario cui totali differentie si addat̃ ternarius fient. 15. numerus a ternario cõpositus τ mẽsuratus: ꝓter

accipiant post.15.tres numeri.17.19.21.quorū extremum mẽsurat ternarius:nā inter eos sūt nouē differētie q̄ sunt binarij ex quib⁹ totalis differētia pducit ex multiplicatione ternarij triplati p binariū cui additus ternari⁹ pficiet.21.eadē ratio pbat de alijs oib⁹ sequēdo naturalē seriē impariū. Itē quinari⁹ ē secūdus impar ⁊ quint⁹ numerus ab vnitate: acceptis ĝ quinq; imparib⁹ proximis post eū:scz.7.9.11.13.15. extremū eorū mẽsurat quinari⁹ pter quinq; differētias q̄s ipse quinari⁹ duct⁹ in binariū pficit:qb⁹ ipse si addat cōplebit.15.numer⁹ cōposit⁹ ⁊ mẽsurat⁹ a quinario:q̄ etiā ad.25.hz decē differētias q̄s ipse duplat⁹ ⁊ duct⁹ in binariū pducit:ad.35.hz quindecim differētias ⁊c. Siliter septenarius tertius impar ⁊ septimus nūerus ab vnitate mẽsurabit septimū post se.21.⁊ septimū post illū.35.⁊ quotquot septimos continue dederimus: differētieq; variantur p.7.14.21.⁊c.quas septenarius sua pficiet multiplicatione p binarium:⁊ sic de alijs oib⁹ imparib⁹ p ordinē:ĝ prima ps cōclusionis vera. Secūda ps de numeris intermedijs ex diffinitione imparis primi pbat:q2 oēs illi relicti sunt ab imparib⁹ p̄cedētib⁹ oibus:ĝ nullā hñt ptē aliquotam preter vnitatē:⁊ sic sunt numeri primi:cōña pbatur: q2 nō possunt habere numerū parē p pte aliquota ex tertia huius:neq; imparē sequentē eos q2 oĩs talis est maior numerus:nulla autē pars est maior suo toto per secūdam cōem scientiam:neq; tandē aliquem imparem precedēdē eos ex ypothesi q2 sunt relicti ab omnibus precedentibus:ergo sunt numeri incōpositi ⁊ primi.

Quartadecima conclusio.

Cum fuerint duo numeri ad seipsos primi:etiā alii duo qui ab eis in seipsos ductis producentur erunt adinuicem primi:ꝙ si iterū iidem in pductos suos ducātur:& qui inde pducētur erūt cōtra se primi:sicq; deinceps in infinitū.

Hec est apud Jordanū.12.tertij q̄ pbat gnationē tertie spēi numeri imparis:p cuius pbatione quedā supponant ppōnes ex eodē lib.3.Jordani. Prima si fuerit duo numeri ad inuicē primi:quicq; nūerat eorū alterū:erit ad reliquū primus:q2 alias seq̄ret ꝙ illi duo nō essent cōtra se primi:sed cōicarēt in parte aliquota illius numeratoris. Secūda ꝙ qlibet duo numeri q̄ mẽsurāt alios duos ad se primos:etiā ⁊ ipsi sunt adinuicē primi: q2 si nō:primi duo nō erāt cōtra se primi:nā cōis istorū mẽsura nūeraret illos qđ repugnat posito. Tertia ois numerus cōpositus ex duob⁹ ad se primis:ad vtrūlibet eorū erit primus: q2 ex correlario.12.oē numerās aliqđ totū ⁊ vnā ex duab⁹ ptibus ei⁹: numerabit ⁊ reliq̄. Quarta omne cōpositū ex duob⁹ primis ad aliqđ tertiū:erit ad idē tertiū siliter numerus primus:eadē est ratio q̄ in precedēte. Quinta si fuerint duo numeri cōtra se primi: ille q̄ pducit ex altero eorū in se ducto erit ad reliquū primus:pz ex tertia q2 de cōposito ex additione ⁊ pducto ex multiplicatione idē est iudiciū:si quidē ois multiplicatio est additio. Ex his statim pbat prima ps nře cōclusionis q̄ est prima pprietas numeri ad alterū primi:ex quinta eñi istarū numerus pduct⁹ ex multiplicatione primi illorū p seipsum ē primus ad alterū:⁊ ecōtra pduct⁹ ab altero est primus ad alterū:ĝ duo illi nūeri pducti sūt cōtra se primi:Vbi grā:sint.a.⁊.b.cōtra se primi ducat.a.in se ⁊ fiat.c.ducat etiā.b.in se ⁊ fiat.d.tūc arguo ex quinta predictarū ĝ.c.est primus ad.b.⁊ vltra.b.⁊.c.sunt ad se primi ⁊.b.mẽsurat.d.ĝ p eandē.c.erit prim⁹ ad.d.qđ ē ppositū:duo primi sint.3.et.5.duo scđi.9.et.25.Secūda ps de pductis ex multiplicatiōe ꝓor pductor̄ et pbat:sint illi pducti.e.f.tūc.e.ē primus ad.b.et.ad.d.ex q̄rta p̄dictarū ⁊.f.est.pduct⁹ vel mẽsurat⁹ ab ipso.b.ĝ.e.et.f.sunt adinuicem primi:eadē erit ratio pcedēdo p alios multiplices sine fine.

Decimaquinta conclusio.

Si fuerint duo numeri cōtra se primi:& minore eorū a maiore subtracto quoadpoterit:residuū etiam a prius subtracto dematur quoadpossit: continuaq; hoc pacto detractione facta vnitatē relinqui necesse est. Et vice versa:si in numeris hoc modo ab inuicem detractis cōtinue tādem vnitas residua fuerit:illos ad se primos incōmensurabilesq; esse oportebit.

Vltima pprietas numeror̄ in primo libro nře arithmetice posita demōstratur hic:prima itaq; pars sic: si subtrahat minor quoad pōt de maiore: illud qđ remanet erit necessario minus illo detracto: alias nō fuisset detract⁹ alter ab altero quoad poterat:residuū ĝ vel erit vnitas vel numerus:si vnitas:habetur propositū:si numerus:cū ille etiā sit primus ad detractū ex casu vt patet ex dictis:subtrahat iterū quoad pōt a p̄dicto minore detracto: ⁊ tūc iterū quero vel remanet vnitas vel numer⁹ ⁊c. ⁊ cū nō sit pcessus i infinitū decrescēdo in numeris: sequitur ꝙ tandē remanebit vnitas. Secūda ps pz q2 est cōuertens prime:⁊ etiā seq̄retur ꝙ numerus mẽsuraret vnitatē essetq; ps ei⁹ qđ ē impossibile: cōña pbat ex correlario.12.quicquid eñi mẽsurat totū ⁊ detractū mẽsurat ⁊ residuū:si ĝ nūeri ex q̄rū alterna subtractiōe ⁊ cōtinua sola remanet vnitas:nō sint adinuicē primi sz cōicātes:illa cōis eorū mẽsura vnitatē procul dubio mẽsuraret q̄ remanet. Ex hac cōclusione sequitur p analogiā oppositi ꝙ si duorū numerorū fiat alterna subtractio ⁊ continuata modo predicto:atq; preter vnitatē remāserit alius numerus: illi duo non erūt contra se primi sz potius cōmensurabiles: eritq; ille numerus q̄ remanet maxima pars aliquota in qua illi duo cōicant tanq̄ in vtriusq; mẽsura. Hactenus igitur de numerorū passionib⁹ hec pauca demōstrasse sufficiat:post que veniendum erit ad numerorum proportiones ⁊ proportionalitates.

Caput sextum de proportionibus rationalibus & earum passionibus.

CIRCA proportiões numerales quas & rationales diximus duplices cõclusiones demõstrare intendimus: quedã enim erũt ꝓprietates generales ꝓportionũ quas in nr̃æ arithmeticæ libro primo statim ꝓposuimus in tractatu secũdo: aliæ erũt ille quæ in musice itroductionis libro ꝑmo necessario præsupponunt̃ ad musica elemẽta. Igit̃ comparando prima genera ꝓportionũ quæ sunt æqualitas & inequalitas: sit hæc prima cõclusio quæ tamẽ est.70.in.9.lib.Iordani. Prima conclusio.

Propositis quotlibet numeris æqualib9: ex illis totidẽ multiplices ordinatæ ꝓducere: itẽq̧ ex multiplicibus seriatim supparticulares elicere: atq̧ ex supparticularibus suppartientes: & alias deniq̧ inequalitatũ species ex aliis ordine debito procreare erit facillimũ pariter & certissimũ: sicut etiam viceuersa posteriores in suas priores ꝓportiones resoluere vsq̧ ad æqualitatem.

Supponamus hic artẽ datam ex Boetio in vltimis duob9 capitibus ꝑmi libri nr̃e arithmetice: sꝫ de origine ⁊ resolutione ꝓportionũ ab equalitate incipiẽdo ad equalitatẽ deueniendo: qd̃ in trib9 tantũ terminis efficimus. Scriptis ergo tribus numeris eq̃libus in vna serie: ꝓ ꝑma parte hui9 cõclusionis scribamus sub eis alios tres sic q̧ ꝑmo supiorũ subscribat̃ numerus sibi eq̃lis: ⁊ secũdo subijciat̃ numer9 aggregatus ex ꝑmo ⁊ secũdo superioribus: tertio vero supponatur numerus cõpositus ex trib9 superioribus secũdo tñ eorũ duplato: ⁊ sub secunda serie ꝑ eandem artem fiat tertia series totidẽ numerorum ⁊ sub tertia q̃rta ⁊c̃. Sit ergo ꝑma series.a.b.c.scd̃a.d.e.f.tertia.g.h.k.⁊c̃. tūc arguo sic: sicut.a.ad.b.ita.b ad.c.q2 sunt eq̃les: ergo ꝑ cõiunctã ꝓportionalitatẽ erit.b.c.ad.a.b.sicut.b.ad.a.⁊ ꝑ eandẽ.c.b.⁊ b.a.simul ad.a.b.se habebũt sicut.b.a.ad.a.idest ita q̃tuor ad duo sicut duo ad vnũ eorũ: sꝫ.b.c.⁊.a.b.simul sũt idẽ qd̃.f.⁊.a.b.sil̃r sunt idẽ qd̃.e.⁊.d.est idẽ qd̃.a.ex ypothesi: ergo.d.e.f.nũeri scd̃e seriei sũt cõtinue ꝓportionales inter se: itaq̧ talis est ꝓportio.e.ad.d.q̃lis.f.ad.e.sꝫ.e.ad.d.est duplus ex casu q2 est aggregatũ ex duob9 eq̃libus ipsi.d.ergo.f.ad.e.etiã est duplus: erit itaq̧ ꝑ hunc modũ dupla proportio orta ex eq̃litate. Itẽ ꝓ tertia serie sil̃r arguo: sicut.d.ad.e.sic.e.ad.f.q2 dupli: ergo ꝑ cõiunctã ꝓportionalitatẽ erit.e f.ad.d.e.sicut.e.ad.d.⁊ sil̃r.f.e.⁊.e.d.sil̃ ad.d.e.se habebũt sicut.e.d.ad.d. idest ita q̃tuor ad duo sicut duo ad vnũ eorũ: sed.e.f.⁊.d.e..sil̃ sunt idẽ qd̃.k.⁊ d e.sil̃ sunt idẽ qd̃.h ⁊.g.ẽ idẽ qd̃.d.ꝑ ypothesim: ergo.g.h.k.numeri tertie seriei sũt cõtinue ꝓportionales: q2 ita se hꝫ.h.ad.g.sicut.k ad.h.sꝫ ex casu.h.ad.g.est tripl9 q2 est aggregatũ ex duplo ⁊ subduplo quorũ subduplũ erat eq̃le ipsi g ergo sil̃r.k.ad.h.est triplus: q̃re ex dupla imediate ⁊ ex eq̃litate mediate orta est tripla ꝓportio: eadẽ ratio efficax erit ad ꝓbãdũ q̧ ex tripla orit̃ q̃drupla ⁊ sic ꝯſr ꝑ oẽs multiplices ꝓportiones seriatim: q2 solũ variat̃ minor vltime rõnis sub eadẽ semꝑ maiore: nã vbi ꝑus diximus sed.e.ad.d.est duplus: postea diximus sꝫ.h.ad.g.est tripl9: ⁊ ꝯſr diceremus sꝫ m.ad.l.est q̃druplus ⁊c̃. que minor facile ꝓbat̃ ex nũeris q̃s aggregat.m.suꝑ.l.⁊ sic de alijs suo mõ. Scd̃a ps de supparticularib9 q̧ ꝑ eandẽ artẽ subscribẽdi oriant̃ ex multiplicib9: vt ex dupla sesqualtera: ex tripla sesq̃tertia ⁊c̃. eadẽ rõne ꝓbat̃ cõuersis multiplicib9 ⁊ supparticularib9 ordine recto descriptis: q2 est penit9 idẽ mod9 arguendi accipiendo lr̃as ꝓ nũeris: vt si series duplicũ sit.a.b.c.series sub ea sit.d.e.f.tūc arguat̃ vt ꝑus argutum est in eisdẽ lr̃is q̄usq̧ veniat̃ ad hãc minorẽ sꝫ.e.ad.d.est sesqualter numerus q2 est cõposit9 ex duplo ⁊ subduplo talib9 q̧ duplus eorũ est eq̃lis ipsi.d.ergo.f.ad.e.sil̃r erit sesqualter: q̃re ⁊ ꝓportio sesqualtera imediate orit̃ ex dupla conuersa ⁊ mediante ea ab eq̃litate: eodẽ mõ argueret̃ q̧ sesq̃tertia orit̃ ex tripla: ⁊ sic de alijs supparticularib9. Tertia ps de suppartientib9 q̧ oriant̃ ex supparticularib9 ordinate: ⁊ quarta ps de aliis gñib9 ꝓportionũ q̧ oriant̃ ex ꝑdictis: eadẽ penit9 via ꝓbaret̃ si prolixius agere q̄s vellet ⁊ laborẽ sumere. Vltima ps q2 est cõuertẽs ad oẽs q̃tuor precedẽtes manifeste sequitur ex eis: q2 idẽ est modus resoluẽdi q̄ erat modus ꝓcreandi ꝓportiones ab eq̃litate mediate vel imediate.i.subtrahere quẽlibet numerũ ab alio cui prius addebat̃: sic eñ vnaqueq̧ ꝓportio resoluet̃ in eam aqua oriebatur donec ventũ sit ad equalitatẽ que est oĩm ꝓportionum origo ⁊ mater: sicut vnitas oĩm numerorũ. Ex hac cõclusione sequitur clarissime ꝑma multiplicis ꝓprietas posita in arithmetica: sꝫ q̧ ꝓportio multiplex ceteris inequalitatũ generibus est ⁊ antiquior ⁊ origine prior: lꝫ in fine primi libri arithmetice diximus multiplicem omnẽ ex superparticulari compositam.

Secunda conclusio.

In naturali numerorũ seriæ sicut qlibet nũerus ẽ ad vnitatẽ ꝓportio multiplex: q̄ tãto ẽ maior q̃to ab vnitate remotior: sic qlibet duo nũeri ꝓximi sunt

adinuicē ꝓportio suppartícularis:q̄ p recessum ab vnitate cōtinuæ minorat.
Prime partis ꝓbatio est facilis q: vnitas cuiuslibet numeri est pars aliquota: oīe autē totū ad suā partē aliquotā est proportio multiplex q: multotiens eam totā cōtinet: vt totū ad suam medietatē du plum ad suā tertiam triplū ⁊c. ergo quilibet numerus est multiplex ad vnitatē. Scḋa etiam pars est faci lis q: illa est maior ꝓportio multiplex qua maior terius pluries cōtinet eundē minorē: sed remotior ab vnitate numerus pluries cōtinet vnitatē q̄ sibi ꝓpinquior ergo ⁊c. Tertia pars de suppartícularib⁹ ꝓbatur ex pma: q: si vnitas est cuiuslibet numeri pars aliquota: ⁊ quilibet numerus se quēs addit pcī se vnitatē sup suum ꝓximo precedētem: sequit q̄ addit partē aliquotā: ergo per diffinitionē est ꝓportio suppartícularis ad ipsum: Quarta pars tādē probat: q: illa suppartícularis ꝓportio est maior alia que a minore numero denoiatur vt pz inductiue q: medietas est maior pars aliquota q̄ tertia: ⁊ hec q̄ pars quarta ⁊c. sed quāto numeri magis recedūt ab vnitate tanto maiores sunt ⁊ maiorē denoīatio nē tribuunt vnitati parti eorum aliquote: q: ipsa est medietas binarij ⁊ tertia pars ternarij: quarta quaternarij ⁊c. ergo minor est ꝓportio suppartícularis remotioris numeri ad suū ꝓximo minorem quā numeri ꝓpinquioris ad suū: vt minor q̄nq3 ad quattuor: q̄ quattuor ad tria: ⁊ hec minor q̄ tria ad duo: tota ergo cōclusio est vera. Ex qua correlarie sequit q̄ figura illa quadrāgularis de inuētione oīm proportionū: quā in capl̄o. 5. scḋi tractatus pmi libri arithmetice posuimus: cū suis ibidē ꝓprietati bus: cōtinet olmodā veritatē: nā eius pma linea siue in longū siue in latum est velut vnitas q: ab ea incipit ⁊ p cōtinuā ei⁹ additionē ꝓcedit: alie vero linee oēs post pmā sunt sicut numeri in naturali or dine: q: q̄libet earū a suo numero incipit ⁊ p cōtinuā ei⁹ additionē ꝓcedit vsq3 ad q̄titatē pme linee.

Tertia conclusio.

Omnis proportio multiplex habet post se aliam maiorem: sed nō omnis an te se aliam minorē ea: at superparticulares ꝓportiones ordinem cōtrarium seruant: superpartientes vero multiplicium sequuntur modum.

Hec tripartita cōclusio tota simul ꝓbatur ex precedente: q: multiplices ꝓportiones crescunt per re cessum ab vnitate: suppartículares vero illo modo decrescūt: sed in numeris recedendo ab vnitate nō accedendo ad eam ꝓcedit in infinitū: ergo oīs ꝓportio multiplex habet aliā se maiorē nō oīs aliam se minorē: est enī dabilis minima sed nō maxima ꝓportio multiplex: ecōtra vero oīs suppartícularis habet aliā se minorē nō oīs aliā se maiorē: q: ē dabilis maxima nō minima suppartícularis. Sup partientes vero ꝓportiones ordinē multiplicium sequunt: q: earū ille sunt maiores que a maioribus numeris denoīant: ⁊ ille minores que a minorib⁹ vt fiebat in multiplicib⁹: quare etiā in istis erit dā da minima nō maxima ꝓportio superpartiens. De alijs vero duob⁹ generib⁹ ꝓportionū q: mixta sunt nō opus est aliqd specialiter addere: sed mixte cōuenit de eis loqui. He tres conclusiones suffi cienter explicarunt generales proprietates oīm proportionum: quare veniendum erit ad alias con clusiones que viam expediunt musicam.

Quarta conclusio.

Quæcūq3 proprietates aut passiones numeris cōueniunt: eedem & propor tionibus rationalibus adaptari possunt: quare nimirum si in ꝓportionib⁹ nu meralibus equæ atq3 in ipsis numeris additio: substractio: duplatio: dimidia tio: multiplicatio: & diuisio fieri possint.

Correlarium manifeste infertur ex cōclusione: subsumpta hac minore certissima q̄ iste passiones nu meris cōueniunt: ꝓbatur ergo cōclusio ista: ⁊ siue ꝓportio rationalis imediate denoiatur ab aliquo nu mero ex pmo capl̄o huius tertij: quare eadem ⁊ rationalis ⁊ numeralis ꝓportio dicit: ergo oīs talis proportio est accipienda velut aliquis numerus: quare ⁊ numeri conditiones seu proprietates ha bere dicenda est: quicq̄d enī cōuenit numero denoīatori alicuius proportionis cōuenit ⁊ illi propor tioni: que nō potest aliter explicari aut declarari q̄ per illum numerū: vt proportio dupla est vt bi narius ⁊ habet eius proprietates: tripla vt ternarius: equalitas est vt vnitas ⁊c. Itē sesquialtera re fertur ad binarium: sesquitertia ad ternarium ⁊c. Deniq3 superpartiens tertias ad ternarium: super partiens quartas ad quaternarium ⁊c.

Quinta conclusio.

Non aliter in proportionibus quam in partibus aliquotis prædicte nume rorum passiones sunt requirendæ: vnde viceuersa tota ratio illarum regula rum arithmetice practicæ siue artis numerandi in fractionibus vulgaribus: ex naturis proportionum est accipienda.

Loquimur hic de passionibus in correlario precedentis enarratis: vt sit sensus cōclusionis: q̄ adde re substrare: duplare: dimidiare: multiplicare: ⁊ diuidere proportiones adinuicē debet fieri per eam

dem artem qua arithmetica practica docet talia infractionibus vulgarib⁹: que sunt medietas: tertia quarta ⁊c. non autem vt infractionibus astrologicis q̄ sunt gradus ⁊ minuta ⁊c. probat̄ ḡ conclusio: omne totū ad quālibet vnā suā partē aliquotā est ꝓportio multiplex: vt duplū ad suam medietatem triplū ad tertiā ⁊c. ad plures vero simulpartes ex quib⁹ nō fit vna pars aliquota: aliquādo est ꝓportio supparticularis: vt ad duas tertias totū est sesquialterū: ad tres quartas sesquitertiū: ad quattuor quintas sesququartū ⁊c. aliqñ sup partiens vt ad tres q̄ntas totū est superbipartiens tertias: ad quattuor septimas totū est sup tripartiens quartas: ad q̄nq̄ nonas totū est supquadripartiens q̄ntas ⁊c. Si vero plures partes aliquote simul facerēt vnū totū integrū vt due medietates: tres tertie ⁊c. iam ille nō essent dicēde pars neq̄ ptes rei sed res integra: ⁊ ad tale aggregatū partiū totum esset ꝓportio equalitatis: ḡ eadē via ⁊ arte est agendū in proportionib⁹ sicut in partib⁹ aliquotis q̄tum ad predictas passiones q̄ in musicis theorematib⁹ sunt ꝑ necessarie. Correlariū ex ꝑncipio noni libri Jordani per octo primas conclusiones fit q̄ euidentissimum: q: ibi demonstrantur regule de additione: substractione: multiplicatione: ⁊ diuisione que dantur in algorismo per proportiones totius ad partes ⁊ partium ad partes aliquotas.

Sexta conclusio.

Tunc additur ꝓportio ꝓportioni quādo ex eis tertia q̄dam resultat ꝓportio composita: duplare igitur vel binario multiplicare proportionem aliquam est duas similes proportiones simul in vnam colligere.

Ratio conclusionis est: q: omne totū resultat ex oībus suis partib⁹ simul additis: vel potius est omnes sue partes simul sumpte: ⁊ ecōtra partes sunt totū: sed omne cōpositū est totū ad sua cōponentia ⁊ illa sunt partes ad ipsum: ḡ si tertia ꝓportio cōposita ex duab⁹ simplicibus resultat: opȝ illas duas simul esse additas ⁊ ecōtra: si ille due simul addātur necesse erit tertiā inde resultare cōpositā. Correlarium ptȝ ex cōclusione: addita etiā ꝓpositione assumpta in tertia cōclusione capli precedētis. s. q̄ multiplicare aliquē numerū non est aliud q̄ plures siles numeros in vnū colligere: ḡ duplare. i. binario multiplicare aliquā ꝓportionē idē erit ac si duas siles ꝓportiones in vnam cōponere. Tantū de theoria huius cōclusionis: ꝓ cuius praxi vel practica noticia est aduertendū tres esse modos addendi simul plures ꝓportiones ad cōponendū vnā aliam ex eis: primus iā insinuatus est in precedēte cōclusione ⁊ demōstrat cum Jordanus in. 8. sui libri noni. s. ducendo denoīatorē vnius in denoīatorē alteri⁹: q: numerus inde ꝓductus erit denoīator ꝓportionis cōposite ex eis: vt si vellemus addere duplam proportionē triple: tūc cōposita ex eis erit sexcupla q: bis tria sunt sex: sic etiā fit additio infractionibus vel partibus aliquotis q: tot medietates addite tot tertijs eiusdē totius fiunt tot sexte eiusdē ducendo vlȝ denoīatorē vnius fractionis in denoīatorē alterius vt ꝓcedat inde denoīator fractionis cōposite. Secūdus modus: quē etiā docet Jordanus in. 3. q̄nti libri: est ꝑ multiplicationē alternā terminorū cōsimiliū in illis duab⁹ ꝓportionib⁹: itaq̄ dux vnius multiplicetur per ducē alterius: ⁊ comes vnius ꝑ comitē alterius: nā ex ꝑma multiplicatione ꝓducetur dux: ex scd̄a comes proportionis cōposite ex eis: vt sit. 4. ad. 2. dupla: sit. 9. ad. 3. tripla ex quibus volo componere aliam ꝓportionem ducēdo igitur. 4. in. 9. fient. 36. ⁊ ducendo. 2. in. 3. fient. 6. q̄ duo numeri 36. ⁊. 6. sūt ꝓportio sexcupla: ⁊ sic ex dupla ⁊ tripla simul additis resultat sexcupla vt prius: ꝓbatio erit clarissima inueniendo mediū ꝓportionale inter illa duo extrema ꝓportiōis sexcuple: ⁊ hoc fiet ducēdo comitē ꝑme in ducē scd̄e ꝓportiōis vt. 2. in. 9. ꝓducit. 18. q̄ nūer⁹ ē subdupl⁹ ad. 36. ⁊ tripl⁹ ad 6. ḡ ꝑ scd̄aȝ tertij capli huius ꝓportio. 36. ad. 6. q̄ ē sexcupla cōponit̄ ex dupla. 36. ad. 18. ⁊ ex tripla. 18. ad. 6. q̄re sequitur q̄ dupla ⁊ tripla simul addite faciūt sexcuplā ꝓportionē. Tertius modus ptȝ ex vltimo caplo primi libri nr̄e arithmetice: vbi docuimus cōtinuare ꝓportiones plures adinuicē ad cōstituendā ꝓportionalitatē: nā in multiplicib⁹ hoc ꝑfacile erat. s. sup ducē vnius ꝓportionis vel infra comitē eius alium inuenire numerū in data alia ꝓportione: quo inuēto ex illis tribus numeris resultāt due simplices proportiones extremorū ad mediū: ex q̄bus fit vna cōposita extremi numeri ad extremū: q̄ cōposita alias dr̄ ꝓportionalitas si due ille simplices eā cōponētes erāt siles eiusdē ꝑ speciei ꝓportiones: q̄ si nō sint siles sed varie: neq̄ cōposita dicetur ꝓportionalitas geometrica: sed in supparticularib⁹ ꝓportionib⁹ ⁊ in alijs q: hoc erat difficilius: cautelas adhoc aliquas posuimus ibidē. Horū aūt trium modorū primus erat opere facilior ⁊ artificiosior: sed intellectu difficilior ⁊ obscurior: terti⁹ ecōtra intellectu facillimus ope difficillimus aliorū: secūdus vero ⁊ intellectu ⁊ ope mediat inter eos.

Septima conclusio.

Subtrahere proportionem a proportione est residuā inuenire ꝓportionē: q̄ earum differētia dici solet: hinc dimidiare proportionem: si tamen fuerit dimidiabilis: fiet quā facillimum.

Quēadmodū in numeris substractio supponit duos numeros fere semꝑ inequales quorū minor detrahitur a maiore ⁊ nō ecōtra: ita in proportionib⁹ eadē substractio inequalitatē duarū ꝓportionum requirit quarū minor demat a maiore ⁊ non ecōtra vt inde remaneat alia ꝓportio q̄ sit excessus vel

differētia maioris ad minorē ꝓportionē:sed ex correlario quarte cōclusionis huius capl'i cōstat ꝙ in proportionibꝰ numeralibus est possibilis subtractio sicut in numeris:ergo cōclusio vera. Correlarium manifeste sequit̄ ad eam:quia dimidiatio est spēs subtractionis:inqualibet autē specie saluat̄ tota ratio generis. Dr tñ notāter si ꝓportio sit dimidiabilis: ad innuendū ꝙ nō ois ꝓportio est talis: vt dupla ꝓportio in multiplicibꝰ ⁊ quelibet alia habēs imparē denoiationē:itē ois supparticularis ꝓportio est indimidiabilis vt infra dicet̄. Hoc de theoria cōclusionis: ꝓ praxi eius aduertendū etiā tres esse modos subtrahēdi ⁊ dimidiandi in ꝓportionibus: primus est siliis tertio precedēti intellectu oim facillimus.s. inueniendo mediū numerū inter extrema date ꝓportionis maioris: q̄ ad alterū eorū habeat ꝓportionē minorē q̄ ꝓponit̄ subtrahēda:nā illo medio inuēto ꝓportio maior diuisa erit in duas quarū altera est q̄ subtrahit̄:ergo altera est q̄ relinquitur vt excessus vel differētia maioris ad minorē. Scḋus modꝰ ex pma qnti libri Jordani docet idē: multiplicādo adalterutrū terios dissimiles duarū ꝓportionū ꝓpositarū hoc est ducē maioris p comitē minoris ꝓportionis: ⁊ ecōtra comitē maioris p ducē minoris:nā ex pma multiplicatione ꝓceditdux ex scḋa comes residue ꝓportiōis:huiꝰ cui dētia fiet si vtrūlibet comitē inalterū duxeris:tunc eñ ꝓducet̄ tertius quidā numerus ad quē dux residue ꝓportionis habebit eandē ꝓportionē maiorē aqua erat minor subtrahēda: que tñ maior p comitē residue diuisa erit in duas quarū altera erat substrahēda ⁊ altera residua ꝙ diximus:ergo ille modus est verus. Tertius modus est siliis pmo aliorū in precedēte cōclusione.s. substrahendo denoiatorē minoris a denoiatore maioris ꝓportionis: quēadmodū fieri solet in partibꝰ aliquotis: ⁊ remanebit denoiator ꝓportionis residue: ista tñ subtractio presupponit multiplicationē duplicē: ⁊ deinde ꝓductorū alterū ab altero substrahit̄:nā ⁊ in algorismo de fractionibus subtrahēdo tertiā a medietate relinquemus sextā: ⁊ subtrahendo quartā a tertia residuabimus duodecimā ⁊c. eodē modo in ꝓportionibꝰ substrahere poterimus duplā a tripla ⁊ remanebit sesqualtera:si triplam a quadrupla relinquet̄ sesqtertia: ⁊ si sesquitertiā a sesqualtera dēpseris residua erit sesquioctaua: ⁊ dempta ꝓportione sesqualtera a dupla remanet sesquitertia: vel si hec remoueatur remanebit illa: ⁊sic de aliis:he due cōclusiones in musicis theorematibꝰ magnū habent momentū suntqꝫ eis ad modum necessarie.

Octaua conclusio.

Sicut ex additione plurium multiplicium semp fit proportio multiplex nō ecōtra: ita etiam si proportio multiplex in plures partes æquales diuidatur: illas omnes multiplices esse necesse erit.

Hanc ꝓlixe demōstrat Jordanus in nono libro nō quidē totā simul: sed priorē eius partē. in. 22. cōclusine: alteram in. 60. possumus tñ breuiter ex premissis eam demonstrare: quia ex pmo modo sexte huius additio ꝓportionis ad ꝓportionē est multiplicatio suorū denoiatorū adinuicē: sed in numeris integris oīe multiplex integri est numerus integer: secus infractionibꝰ numerorū vt patꝫ inductiue: proportio aūt multiplex sola denoiat̄ a numero integro: alie oēs a fractionibꝰ vt earū diffinitiōes indicāt: ergo pma pars est vera. Scḋa etiā ꝓbat̄ quia oīe totū in duas aut plures partes eq̄les diuisum habet ad eas multiplicē ꝓportionē: ergo per quartā huius capl'i idē etiā erit verū in diuisione ꝓportionū: tota etiā cōclusio ex inductione fidē habet: Ex qua p analogiam oppositi sequitur ꝙ si ꝓportio non multiplex duplet̄ triplet̄ aut alias multiplicet̄: nō fiet inde ꝓportio multiplex: ⁊ vice versa: si ꝓportio resultans ex alterius duplatione aut qualicūqꝫ multiplicatione nō fuerit multiplex: neqꝫ illa altera erat multiplex: nā si due tres aut plures ꝓportiones sesqualtere vel sesquitertie cōtinuent̄ ⁊ extrema totius aggregati adinuicē cōparent̄: nō habebūt ꝓportionē multiplicē adseipsa sed aliam speciem: nā due sesqualtere vt. 9. 6. 4. sunt vna dupla sesqquarta: due sesquitertie vt. 16. 12. 9. sūt vna proportio supseptēpartiens nonas: due sesquiquarte vt. 25. 20. 16. est ꝓportio supnonipartiens decimas sextas: ⁊ tandē due sesquioctaue vt. 81. 72. 64. est vna ꝓportio sup decēseptēpartiens sexagesimas quartas ⁊c. ⁊ ratio huiꝰ correlarii dicta est quia infractionibꝰ numerorū multiplicatio earum alterna nō ꝓducit numerū integrū a quo denoiatur multiplex: sed semp fractionē a qua denoiantur alie species ꝓportionū. Dictū est notāter in cōclusione ⁊ nō ecōtra: quia ꝓportio multiplex pōt constare ex additione pluriū nō multiplicium vt dupla ex sesqualtera ⁊ sesquitertia: tripla ex dupla ⁊ sesqualtera ⁊c. potest ergo ꝓportio multiplex p additionē componi ex multiplicibus ⁊ ex nō multiplicibus.

Nona conclusio.

Cuiuslibet rationalis proportionis diuisio in duas aut plures partes æquales per numeros medios inter eius extrema possibiles: eandem legem obseruat in minimis numeris eius & in aliis omnibus indifferenter.

Hanc Jordanus in. 12. quarti aliis verbis sic ꝓponit: si fuerit pmus numerus ad scḋm sicut tertius ad quartū: quotcūqꝫ inter pmū ⁊ scḋm totidē inter tertiū ⁊ quartū ꝓportionaliter medios consistere necesse est: ⁊ sensus est: ꝙ si vnū vel duo aut plura media ꝓportionalia sint possibilia inter duos numeros alicuius ꝓportionis: totidē precise sunt possibilia inter quoslibet alios duos in eadē ꝓportione: quia nō refert q̄ntum adhoc si illi numeri sint minimi vel maiores vel mediocres in tali ꝓportione

sed in oībus eadem ꝓportio eandem legē sue diuisionis sustinet: itaqȝ si inter minimos numeros talis ꝓportionis nō sit possibile medium ꝓportionale vt pote q: sola vnitate distāt vt. 2. et. 1. vel. 3. et 2. ⁊c. neqȝ inter quoslibet alios duos in illa ꝓportione erit dabile mediū ꝓportionale: ⁊ si inter primos nō sit possibile nisi vnū medium: similiter ⁊ inquibuslibet alijs duobus talem ꝓportionē habentib⁹ erit tantū vnū mediū ꝓportionale: ⁊ si in primis fuerint duo aut plura talia media: ⁊ in oībus alijs erūt totidē media eodē modo ꝓportionabilia. Huius cōclusionis demōstratio tota fundat̄ in equa ꝓportionalitate de qua supra caplo scdo hui⁹ tertij: si eñ accipiant̄ quattuor minimi teri in data pro portione: illi oēs erūt ad seipsos p̄mi (alias mēsurarent eos alij numeri minores in eadem ꝓportione. s. illi scd̄m quos pars aliq̄ta cōis multiplicata ꝓduceret eos: qd̄ manifestā implicat cōtradictio nem) sed minimi numeri in qualibet ꝓportione mēsurant quoslibet alios in eadē vt maior maiorem ⁊ minor minorem scd̄m eundē numerū: quare si multiplicis ⁊ submultiplicis eadem ⁊ silis est proportio: sequit̄ ꝙ illi minimi ꝑ talē numerū multiplicati ꝓducent eos de quib⁹ loquitur cōclusio cōtinuatos in sili ꝓportionalitate: qd̄ est totidē habere media ꝓportionabilia q̄t sunt in minimis nume ris: ergo cōclusio vera. Et si ponātur duo ⁊ duo numeri in silibus ꝓportionibus: ⁊ cōcedant̄ inter duos primos duo media ꝓportionalia q̄ diuidant illā ꝓportionem in tres partes eq̄les: dico etiam inter duos scdos esse duo media ꝓportionalia q̄ sīr diuidant illā in tres equales: nā acceptis quattuor mi nimis in ꝓportionalitate illa forte illi numerabūt p̄mos quattuor scd̄m binariū: ⁊ alios duos scdos per ternariū: ergo sicut ductis q̄ttuor minimis in binariū ꝓducitur q̄ttuor p̄mi: ita ductis eisdē minimis in ternariū ꝓducitur duo secūdi cū duob⁹ ibi medijs ꝓportionalibus. Ex hac cōclusione seq̄tur manifeste ꝙ nulla ꝓportio dupla nullaqȝ supparticularis est diuisibilis in duas aut plures ꝓportiōes equales: q: minimi numeri in eis nullū recipiūt mediū ꝓportionale: cū sola vnitate distent: ⁊ hoc idē probat Jordanus in. 61. noni: ⁊ in hac veritate fundāt musici indiuisionem thoni (que est proportio sonorū superparticularis) in duo integra semitonia. i. equales ꝓportiones que sint partes thoni: sed diuidūt ipsum in duas partes ineq̄les quas vocāt maius ⁊ minus semitonium: silis est ratio de indimidiabilitate diapason q̄ est ꝓportio dupla sonoꝝ. Possent tñ thonus ⁊ diapason dimidiari in ꝓ portiones irrationales de quib⁹ nihil ad musicū: qui rationibus numeralibus omnia considerat.

Decima conclusio.

Quotlibet numeros in data proportionalitate continua minimos inuenire poterimus: si duos primos sue originalis proportionis supposuerimus.

Hec apud Jordanū est sexta sui quarti libri: ꝓ cuius intelligētia aliquas suppositiones demonstrationi premittamus: p̄ma est doctrina data in nr̄a arithmetica de inueniendis p̄mis numeris cuiuslibet ꝓportionis. Scda ꝙ etiā in qualibet ꝓportionalitate sunt dabiles p̄mi ⁊ minimi numeri illius: qui ꝓcedunt ex primis numeris illius ꝓportionis simplicis ex q̄ talis cōponit̄ ꝓportionalitas: vt si ꝓportionalitas cōponat̄ ex duplis p̄mi ei⁹ numeri oriunt̄ ex p̄mis numeris duple ꝓportiōis q̄ sunt 2. et. 1. si ex sesqualteris p̄mi duo supponēdi sūt. 3. et. 2. ⁊c. Tertia suppositio ꝙ geometrica ꝓportionalitas cōtinua (de qua sola est hic sermo) potest cōponi ex duab⁹ ꝓportionib⁹ ⁊ trib⁹ teris: vel ex tri bus ꝓportionib⁹ ⁊ quattuor teris: ⁊ sic ꝯ̄r maiorando numeros ꝓportionū ⁊ teroꝝ taliter ꝙ numerus teroꝝ sola vnitate superet numeros ꝓportionū: in qualibet igr̄ ꝓportionalitate qualibet cō posita possunt dari p̄mi ⁊ secūdi ⁊ tertij numeri ⁊ ꝯ̄r alij maiores: vt in proportionalitate cōposita ex duabus duplis p̄mi teri ⁊ minimi sunt. 4. 2. 1. si ex tribus: p̄mi teri sunt. 8. 4. 2. 1. In proportio nalitate cōposita ex duab⁹ sesqualteris: primi sunt. 4. 6. 9. si ex trib⁹: p̄mi sunt. 8. 12. 18. 27. ⁊c. sic ꝙ nulli numeri minores aut p̄ores istis possunt tales ꝓportionalitates cōstituere: istis tñ duplatis: tri platis: aut aliter multiplicatis fient alij numeri maiores in eisdē ꝓportionalitatib⁹. Nostra itaqȝ cō clusio intēdit solos p̄mos ⁊ minimos numeros cuiuslibet ꝓportionalitatis inquirere: quotcūqȝ numeros illa ponatur habere: hoc est tres q̄ttuor aut quinqȝ ⁊c. ⁊ dicit ꝙ illi oriuntur ex duob⁹ primis numeris sue originalis ꝓportionis. i. illius ꝓportionis simplicis ex qua talis ꝓportionalitas cōpo nitur. Modus vero quo isti ex illis eliciuntur ponitur in correlario dicte sexte cōclusionis a Jordano sic: vnde manifestū erit ex duoꝝ in aliqua ꝓportione minimoꝝ p̄mo in ambos ⁊ scdo inse ductoꝝ tres: ⁊ ex eodē p̄mo in illos tres eodēqȝ secundo in tertiū: quattuor ꝓtinus enasci illius ꝓportionis minimos: ꝙ si p̄mū hoc pacto in oēs ducere pergis ⁊ scd̄m in vltimū eorū: quotquot libuerit inali qua ꝓportione minimos efficies: hec ille: cuius sensus clarus est: ꝙ suppositis duob⁹ p̄mis ⁊ minimis teris alicuius ꝓportionis: elicies inde tres minimos ꝓportionalitatis cōposite ex duab⁹ talib⁹ ꝓportionib⁹: multiplicādo p̄mū. i. maiorē duoꝝ p̄mo in seipsum: scdo in minorē: tertio minorē in se ipsum: ⁊ ꝓducent̄ inde tres teri cōtinue ꝓportionales. i. facientes duas siles ꝓportiones tales q̄lis erat illa vna ꝓportio ex duob⁹ p̄mis teris e quib⁹ isti tres orti sunt: ⁊ si velles elicere quattuor terminos ad cōponendū ꝓportionalitatē ex tribus silibus ꝓportionibus: debes multiplicare tres pre dictos ꝑ duos priores hoc modo: ꝙ p̄mo ducat̄ p̄mus duoꝝ in oēs illos tres: deinde secundus duoꝝ multiplicetur ꝑ tertium illoꝝ trium: ⁊ sic fient quattuor teri primi in tali ꝓportionalitate: postea si velles adhuc maiorē ꝓportionalitatē cōponere: ex q̄ttuor numeris cōflabis qnqȝ: ⁊ ex quinqȝ sex ⁊c. semꝑ multiplicando p̄mū duoꝝ per oēs precedētes: ⁊ scd̄m duoꝝ per vltimū eorūdem: ⁊ semꝑ na

meri inde ꝓducti sunt ꝑmi ꝛ minimi in illa ꝓportionalitate: quib⁹ duplatis triplatis aut aliter mul-
tiplicatis ꝓcedent scḋi tertij ꝛ alij in eadē ꝓportionalitate. His suppositis ꝓbatio cōclusionis clara
est: si eñ qñ idem numerus multiplicat alios duos vel cōtra ꝓductorū ꝛ multiplicatorū eadem est
ꝓportio vt allegauimus in q̄nta precedētis capl̄i: g̃ illi tres numeri ex duorū multiplicatione p̄dicta
procreati habēt duas ꝓportiones siles ꝓportioni aliorū duorū: vt si.a.ꝛ.b. sint duo ꝑmi.c.d.e. tres
scḋi: q̄r.c.ꝛ.d. ꝓducti sunt ex multiplicatione vnius p alios duos: sc3.a.p.a.ꝛ.b. hñt eandē ꝓpor-
tionē sicut.a.ꝛ.b. itē q̄r.d.ꝛ.e. ꝓducti sunt ex multiplicatione duorū p vnū: sc3.a.ꝛ.b.p.b. habēt eandē
ꝓportionē sicut.a.ꝛ.b. g̃.c.d.e. hñt duas siles ꝓpōnes illi q̄ est a.ꝛ.b. Qd̄ v̄o illi tres sint ꝑmi ꝛ mi-
nimi in illa ꝓportionalitate: ꝓbat̄ sic: q̄r eñ duo priores erāt in sua ꝓportione ꝑmi ꝛ minimi ac p in-
de cōtra se ꝑmi: g̃ oēs ex eis in se ꝓducti sunt contra se ꝑmi ex.14.precedētis capl̄i. Quare p ean-
dē si iterū ex trib⁹ fiant quattuor multiplicatione duorū priorū: etiā illi erūt cōtra se ꝑmi: ꝛ p quintā
precedētis habebūt siles ꝓportiones predictis: ꝛ sic ꝯñr ꝓcedēdo: g̃ tota conclusio vera. Ex qua p3
alia via facilior cōtinuādi plures ꝓportiones supparticulares eiusdē speciei: q̄ȝ erat illa q̄ȝ posuimus
in calce ꝑmi libri nr̄e arithmetice ex Boetio sumptā: ꝛ ad musicas cōtēplationes p necessariā: ꝓ cō-
positione plurium thonorū (que sunt sesquioctaue ꝓportiones) ad cōstituendam ex eis consonātiā.
Pro huius tamē conclusionis clariore intelligentia duas alias super addamus.

Vndecima conclusio.

Cum fuerint plures numeri cōtinuæ proportionales: eorūq; primus mēsus fuerit vltimum: metietur & secūdum: q̄ȝ si secundū metiri nō posset primus: neq; ipse neq; aliquis aliorum numerabit vltimum.

Quāuis hanc ꝓlixe demōstret Jordanus in.13. q̄rti: tamē faciliter hic eam ꝓbare volumus ex pre-
cedētibus: nā per octauā huius capl̄i ꝓportio multiplex neq; cōponit̄ neq; diuidit̄ equaliter nisi pro-
portionibus multiplicib⁹: hoc aūt est mēsurari numerū a numero habere ad ipsum ꝓportionē mul-
tiplicē: ꝛ ꝓportio ꝑmi ad vltimū q̄ est multiplex p casum p scḋā tertij capl̄i huius cōponit̄ ex ꝓpor-
tionibus mediorū tam ad se q̄ȝ ad extrema: q̄ oēs p casum sunt eq̄les: g̃ tam illa cōposita q̄ȝ alie ex q̄b⁹
cōponitur sunt multiplices: q̄re vera erit cōclusionis ꝑmi pars q̄ȝ vbi cōcurrūt tres: q̄ttuor: aut plures
numeri cōtinue ꝓportionales.i. ꝓportiones siles ꝛ equales habētes: atq; ꝓportionē multiplicē ex-
tremorū cōponētes ac diuidētes (q̄r vnū extremorū alterū mēsurat) necesse erit ꝑmi ad scḋm vel econ-
uerso esse multiplicē ꝓportionē qd̄ est mēsurare illū: eadem ratio cōuincit de scḋo ꝛ tertio: de tertio ꝛ
quarto ꝛc̄. q̄r oēs sunt siles ꝓportiones. Scḋa pars cōclusionis seq̄tur ad primā p ꝯñam ecōtra-
rio.i. inferēdo ex opposito cōsequentis oppositū añtis: qd̄ erat ꝑma ps cōclusionis iā demonstrata: si
eñ ꝑmus nō mēsurat scḋm: ibi nō ē ꝓportio multiplex: g̃ neq; inter scḋū ꝛ tertiū: neq; inter tertiū ꝛ
quartū: q̄re neq; inter ꝑmū ꝛ vltimū: vñ seq̄tur q̄ȝ ꝑmus nō mensurat vltimū: ꝛ silr̄ neq; aliq̄s aliorū.

Duodecima conclusio.

Quotlibet numerorum continuæ proportionalium si duo extremi fuerint adseipsos primi: erunt omnes illi in sua proportione minimi: & ædiuerso: si quotlibet numeri cōtinuæ proportionales fuerint in sua proportionalitate minimi: duo eorum extremi erunt contra seipsos primi.

Cōprehēdimus hic quartā ꝛ q̄ntā cōclusiones q̄rti libri Jordani: q̄ fundātur in vigesimatertiā eiusdē
que talis est: q̄libet duo numeri adinuicē ꝑmi sunt in sua ꝓportione minimi: ꝛ ꝓbatio eius est facil-
lima ex terio: q̄r si nō essent in tali ꝓportione minimi: nō essent cōtra se ꝑmi vt supponitur: ꝯña p3 q̄r
cōicarent in parte aliquota alia ab vnitate: sc3 in illo numero secundū quē minimi illius ꝓportionis
mēsurarēt istos nō minimos: q̄r p 19. tertij libri: q̄libet numeri i sua ꝓportione minimi mēsurāt oēs
alios in eadē ꝓportione.s. maior maiorē ꝛ minor minorē equaliter: ꝛ ꝓbatur statim a ꝑmutata pro-
portionalitate ꝛc̄. Ex his g̃ sic arguitur ad ꝑmā partē cōclusionis nr̄e: q̄r si ꝑmus ꝛ vltimus dictorū
numerorū sunt ad seipsos ꝑmi ꝛ per cōseq̄ns minimi in sua ꝓportione: isti mēsurant oēs alios ꝛ
non mēsurātur ab alijs in eadē ꝓportione: q̄r nulli sunt priores aut minores eis: ꝛ q̄r ꝓportio extre-
morū cōponitur ex ꝓportionib⁹ mediorū: g̃ etiam medij numeri eorū sunt in suis ꝓportionib⁹ mini-
mi: sic q̄ȝ in talib⁹ ꝓportionib⁹ a nullis priorib⁹ mēsurātur: ꝯña deducitur tū q̄r ꝓportio minimorū
nō cōponeretur ex ꝓportionib⁹ nō minimorū: tū etiā q̄r si finges alios eis minores in talib⁹ ꝓportio-
nibus: arguā p equā ꝓportionalitatē ad inferēdū vnum manifeste impossibile.s. q̄ȝ maiores numeri
mēsurarent minores essentq; partes eorū aliquote. Scḋa pars ex ꝑma seq̄tur p cōuersionē: ꝛ item
quia si detur oppositū ei⁹.s. q̄ȝ extremi numeri cōicarent in aliquo numero parte aliquota eorū: seq̄-
tur q̄ȝ in eadē ꝓportione darētur alij numeri minores istis.s. illi secūdū quos illa pars aliquota mē-
suraret istos duos extremos: iuxta regulā allegatā si idem numerus duos multiplicet multiplicato-
rū ꝛ ꝓductorū eadem erit ꝓportio: tunc eñ illa pars aliquota ducta in illos duos mensurationis sue
produceret istos duos extremos q̄ necessario erunt maiores illis vt pote multiplices ad eos: conse-
quēs illatū est impossibile implicās cōtradictionem: g̃ ꝛ oppositū scḋe partis ex quo seq̄tur erat fal

sum: ꝛ sic manet tota conclusio vera. Sed quia diutius in arithmeticis demõstrationib⁹ immorati sumus: ꝛ ex predictis duobus capitulis satis elucere possunt oĩa que in ꝓmo subiecte musice libro demonstranda proponuntur: ad geometricas speculationes vnde discessimus redeamus.

Capitulum septimum de potentia linearum.

DICTVM est de proportionibus magnitudinũ & cõicatione & incõicatione earũ: & potissime descendendo ad lõgitudines linearũ: nũc dicã aliquid breuiter de linearũ potẽtia respectu superficierũ in quas possunt: ꝓmo qd nois ex ponẽdo. Superficies autẽ inq̃ põt aliqua linea: est quadratũ eius: & dicit̃ linea posse in ipsam superficiem: quia ex ductu sui in seipsam eam producit.

Prima conclusio.

Equales lineæ in superficies possunt æquales: dupla autem in quadruplam: tripla vero in nonocuplam: & vniuersaliter quodlibet multiplex lineæ date potest in multiplicem superficiei date lineæ: denominatam a numero denominãte mutiplex lineæ in se ducto.

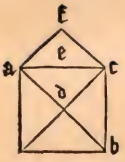
Ista patet inductiue: linea enĩ bipedalis põt in quadruplũ respectu linee pedalis: ꝛ linea tripedalis põt in nonocuplũ: ꝛ quadrupedalis in sedecuplũ: qm̃ quadratũ pedalis linee est tantũ vnius pedis quadrati: quadratũ vero linee bipedalis. 4. pedũ quadratorũ: ꝛ quadratũ linee quadripedalis. 16. ꝛ sic vlteri⁹: vt apparet ex arithmetica q: bis duo sunt. 4. ter tria sunt. 9. quater q̃tuor sunt. 16. ꝛc. De ꝓportionibus linearũ superparticularibus ꝛ sup partientibus ꝛ alijs q̃buscũqꝫ earũ datur hec regula: q lineę reducãtur ad numeros minimos talis ꝓportionis ꝛ illi quadrẽtur: ꝛ apparebit ꝓportio quadratorũ: ꝛ sic proportio sesquialtera potest in duplam sesquiquartã: q: sic se habent quadrata binarij ꝛ ternarij: ꝛ sic de alijs.

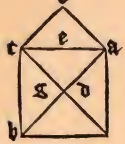
Secunda conclusio.

Lineæ quarũ vna potest in duplũ respectu alteri⁹ sunt sicut diameter & costa.

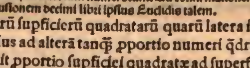
Ista patet ex scdo libro caplo. 3. de q̃drãgulis ꝓpositione q̃rta: ex qua ptꝫ quod diameter est assimeter coste: ꝛ est alia ostẽsio ab illa q̃ dixi in caplo. 4. ꝓcedente: si enĩ diameter ꝛ costa essent simetra haberent se vtiqꝫ sicut numerus ad numerũ ex secũda capl̃i q̃rti huius: g̃ ꝛ quadrata eorũ haberen se sicut quadrata numerorũ: sed hoc est impossibile qm̃ ꝓportio dupla que est istorũ: impossibile est q sit quorũcũqꝫ duorum quadratorum numerorum. Ad confirmationem autẽ huius sententie apponam septimam conclusionem decimi libri ipsius Euclidis talem.

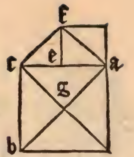
Omniũ duarũ sup̃ficierũ quadratarũ quarũ latera in lõgitudine cõicãt: ẽ proportio alterius ad alterã tanq̃ ꝓportio numeri q̃drati ad numerũ quadratũ. Si vero fuerit ꝓportio sup̃ficiei quadratæ ad superficiem quadratã tanq̃ ꝓportio numeri quadrati ad numerum quadratũ: erunt latera earum in longitudine cõmunicãtia: q si non: erit oppositum.





Ex ista ptꝫ intẽtũ nã ꝓportio sup̃ficiei q̃drate diametri ad sup̃ficiem q̃dratã coste nõ est sicut ꝓportio nũeri q̃drati ad numerũ q̃dratũ: igr̃ latera taliũ q̃dratorũ scꝫ costa ꝛ diameter erũt in lõgitudine incõmensurabilia. Ad cõfirmandũ autẽ hãc sententiã de diametro ꝛ costa inducit cãpanus decimo geometrie cõmento septimo ꝯnam q̃ facit Aristoteles ꝓmo priorũ: scꝫ qd̃ si diameter esset simeter idest cõmẽsurabilis coste: erit numerus impar eq̃lis numero pari qd̃ sic ptꝫ: si enĩ diameter est cõmẽsurabilis cost: erit igr̃ ꝓportio diametri. a. b. ad. a. c. costã sicut ꝓportio alicui⁹ numeri ad aliquẽ numerũ: vt ptꝫ ex scda precedẽtis capl̃i q̃rti ꝛ ex diffinitione cõicãtium q̃titatũ: ꝛ sint dati numeri. d. et. e. et sin isti numeri scdũ suã ꝓportionem minimi: g̃ nõ erit vterqꝫ eorũ par sed vnus par ꝛ alter impar: aliõqn numeraret eos binarius ꝛ p ꝯns nõ essent scdm illã ꝓportionẽ minimi q: nõ cõtra se ꝓmi: sit igitur impar. d. maior: g̃ quadratũ eius erit impar necessario: q: quadratũ ois numeri imparis est impar: vt docet arithmetica: q: si impares numeri impꝛiter accreuerĩt: vt fit in q̃libet q̃drato numeri imp̃is: cõposit⁹ necessario erit impar: sꝫ p ꝓmissam imediate que est septima decimi Euclidis q̃dratũ. a. b. ad quadratũ. a. c. est tãq̃ ꝓportio q̃drati. d. ad q̃dratũ. e. et ecõuerso: igr̃ cũ q̃dratũ. a. b. sit duplũ ad q̃dratũ. a. c. vt prehabitũ est: g̃ q̃dratũ. d. erit duplũ ad q̃dratũ e. sed cõstat q ad quadratũ. e. est aliquis numerus par duplus qd̃ ptꝫ duplicãdo ipsum: igr̃ cũ q̃dratum. d. ex ypotesi sit numerus impar sequitur q numerus par ꝛ numerus impar erunt eque multiplices respectu eiusdẽ numeri: ꝛ ita erunt eq̃les p quintã tertij capl̃i. Si vero. e. est minor ꝛ impar diuidatur. a. b. in duas medietates ducta. g.

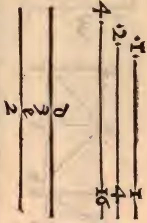




c.lineæ:pficiaturq quadratũ ductus lineis.a.f.et.c.f.si igr̃ ꝓportio.a.b.ad.a.c.est tanq̃ ꝓportio.d.ad.c.igr̃ cõuersa ꝓportione.a.c.ad.a.b.est tanq̃ ꝓportio.c.ad.d.igr̃ ꝓportio.a.c.ad medietatẽ.a.b.puta ad.a.g.est tanq̃ ꝓportio.c.ad medietatẽ.d.igr̃ ꝓportio quadrati.a.c.ad quadratũ.a.g.est sicut ꝓportio quadrati.c.ad medietatẽ quadrati.d.igr̃ vt prius q̃dratum.c.erit duplũ ad quadratum medietatis.d.sed cõstat qđ ad quadratũ medietatis.d.fit aliqs numerus par duplus:ĝ cũ quadratũ.c sit minus ⁊ impar:erũt numerus par ⁊ impar eandẽ habẽtes ꝓportionem ad eundẽ numerũ ⁊ p cõsequens erũt equales sicut prius:ĝ numerus ipar erit p te equalis numero pari: qđ palã est impossibile:ergo antecedens ex quo sequitur erat falsum:scꝫ diametrum esse sue coste assimetrum.

Tertia conclusio.

Si fuerint tres lineæ continuæ ꝓportionales:secũda tanto potentior est prima:q̃ta est proportio tertiæ ad primã. Ex quo manifestũ est ꝙ linea ꝓportionaliter media inter diametrũ & costam est incõmensurabilis vtriq; in lõgitudine simul & in potentia.

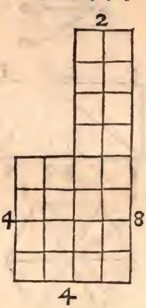


Ista conclusio capit vnã partem euidentie a pⁱma huius capli ⁊ aliã a scđa:a pⁱma enĩ capit euidentiã pro q̃titatibus cõicantibus:accipiant̃ enĩ tres lineæ:scꝫ pedalis:bipedalis: quadripedalis q̃ sint continue ꝓportionales scđm ꝓportionem duplã cõstat enĩ ꝙ tertia est q̃drupla ad pⁱmã: secũda aũt que est dupla ad ipsam põt in q̃druplũ respectu eius qđ põt illa pⁱma vt dicit pⁱma ꝓportio capli hui⁹:quare tanto potẽtior est secũda sup primã q̃ta est ꝓportio tertie ad pⁱmã. Ex secũda aũt accipit euidentiã pro incõmẽsurabilib⁹:accipiam enĩ tres lineas quarũ secũda se habet ad pⁱmã sicut diameter ad costã ⁊ similiter tertia ad secundã sicut diameter ad costam: constat qđ tertia est dupla ad pⁱmam ex tertia quarti capli: cõstat etiã ꝙ q̃dratũ secũde est duplũ ad quadratũ pⁱme: ex secũda presentis capli quare etiã in istis tanto potentior est secũda sup primã q̃ta est ꝓportio tertie ad primã. Correlarium pꝫ ex diffinitione lineæ incõmensurabilis in longitudine ⁊ potentia.

Quarta conclusio.

Si fuerint tres lineæ continuæ ꝓportionales:quod fit ex ductu primæ in tertiam æquum est quadrato mediæ.

Ista ex arithmetica sufficientẽ habet euidentiã in q̃titatibus cõicantibus:nã sic est vniuersaliter verũ in numeris cõtinue ꝓportionalib⁹ quod illud ꝙ ꝓuenit ex ductu minoris numeri in maximũ equũ est quadrato medij numeri:vt ꝓbatũ est supra caplo.5.huius cõclusione.5.Verbigra..2.4.8.sũt proportionalia continue scđm ꝓportionẽ duplã constat ꝙ bis.8.et q̃ter.4.idem faciunt:sed q̃titates cõmunicantes habent se sicut numeri igitur similiter erit in illis:quare in q̃titatibus incõmunicantibus erit idem modus qꝛ eadem est potentia in istis ⁊ in illis.



Quinta conclusio.

Si fuerint quattuor q̃titates ꝓportionabiles continuæ: ꝙ fit ex ductu primi in quartum æquum est ei rectangulo quod fit ex ductu secundi in tertium

Et voco rectangulũ figurã altera parte longiorẽ que cõtinet̃ sub duab⁹ lineis medijs in se ductis. Ista patet similiter in numeris vt.2.4.8.16.nam quater.8.et bis.16.idẽ faciunt:ergo vera est cõclusio in q̃titatibus cõmunicantibus:ĝ ⁊ in alijs nam in eis eadem ratio est.

Capitulum octauum de quadraturis.

POST prædicta decens est tãgere aliqua de q̃draturis. Est enĩ aliq̃ figurã quadrare aream quadratã inuenire sibi æqualẽ. Causa autẽ in quadraturis est ista: ꝙ figura quadrata est certioris mensuræ q̃ quecunq; alia figura: cũ enĩ habes ꝙ superficies data est duorum pedũ quadratorũ vel.4.aut secũdũ alium numerũ:iam certificatus es de mẽsura q̃titatis ei⁹ certitudine vltima: ꝓpter qđ geometræ interest tractare de reductione aliarũ figurarꝫ ad hanc:quare geometræ antiqui oẽs alias propter sui varietatẽ in eam reducere cõsueuerũt & nõ istã i alias. Ponã ergo aliquas cõclusiones paucas de quadraturis: & incipiam a superficiebus similioribus quadratis: & deducam cõsiderationem vsq; ad circulos: & sit prima cõclusio de figura altera parte longiore quæ est quadrato similior.

Prima conclusio.

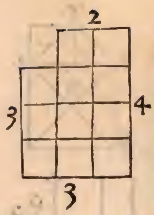
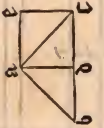


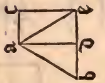
Figura altera parte longior per midiæ rei inuẽtionem: & eius ductum in se ipsam in quadratum reducitur.

Medie rei inuentionẽ accipies ex quarto capl'o huius libri propositione quarta: sed ex quarta capl'i precedẽtis habes q quadratũ in qd pôt aliqua linea media est altera parte lõgiori date equale. Hec ostensio est vñs τ geometrica cui attestaẽ arithmetica: qm̄ si fuerit vnum latus altera parte longioris duorũ pedũ τ aliud.8. erit tota area.16. pedum quadratorũ: q si quadrare velis accipias vnum latus quattuor pedũ τ ipsum in se ducas τ habebis supficiem quadratã cuius area est.16. pedũ: τ hu' demõstrationis mẽtionem habes secundo de aia τ tertio methaphisice vbi philosophus hanc quadraturam medie rei inuentionẽ vocat: qm̄ medie linee inuentione habetur quesitum.

Secunda conclusio.

Area trianguli æquilateri vel ysochelis æqua est tetragono contẽto sub duabus lineis: quarũ vna est medietas basis: altera vero linea diuidens basim angulũq3 basi oppositum & totum triangulum per medium in se ductis.

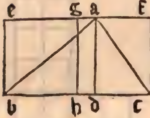




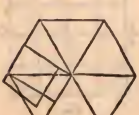
Ista manifesta est statim ex scda cõclusione capl'i de triangulis: sit em̄ triangulus eqlaterus vel ysocheles.a.b.c. τ nõ est dr̄ia nisi quod in triangulo eqlatero qdl3 latus in distincte pôt esse basis in ysochele vero latus inequalitatis erit basis: τ ducaẽ linea.d.a. diuidens p medium basim.b.c. τ angulũ a. τ totũ triangulũ.a.b.c. oĩa em̄ hec diuidit: dico tunc qd area trianguli eqlis est tetragonismo cõtento sub lineis.a.d. τ.d.c. in se ductis: ducaẽ em̄ vna linea in aliam τ erit tetragonismus.a.e.d.c. q diuisus est in duos triangulos eqles p lineã diagonalẽ.a.c. τ erũt in tota figura tres trianguli partiales τ inter se equales sicut deductũ est euidẽter in capl'o ysoperimetrorũ cõclusione scd̄a: quare cũ duo istorũ sint oẽs partes trianguli prefati: τ duo illorũ sunt om̄es ptes tetragoni memorati: manifestũ ẽ q trigonus iste τ tetragonus ille eqles habeant areas qd erat ostẽdẽdũ: τ hoc modo triangulus in formã tetragonismi altera parte lõgioris reduct' est: quẽ si vlterius q̃drare libuerit artificio precedẽtis propositionis de medie rei inuentione vtendum est.

Tertia conclusio.

Area trianguli oĩm laterum inequalium æqualis est medietati tetragoni contenti sub duabus lineis: quarũ vna est latus maximũ eiusdem trianguli: altera vero est a maximo angulo eius super maximum latus eiusdem trianguli perpendiculariter veniens in se ductis.

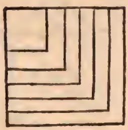


Verbigr̃a: sit triangulus gradatus.a.b.c. in quo maximus angulus sit.a. τ maximũ latus p ɔñs sit linea.b.c. τ opposita angulo maiori: tunc ab angulo.a. ducaẽ linea.a.d. ppendiculariter sup latus.b c. dico tũc q medietas tetragoni sub duabus his lineis cõtenti est equalis aree trianguli: τ ecõuerso. Ducã em̄.b.c. equalẽ τ eque distãtẽ.a.d. siliter ducã.f.c. τ pficiam paralelogramũ.e.b.c.f. quod cõtinetur sub duabus lineis: sc3.e.b. que est eqlis.a.d. τ.b.c. que est maximũ lat' trianguli predicti: tunc ergo erit hoc paralelogramũ diuisum in duo paralelograma p lineam.a.d. τ quodlibet paralelogramũ diuisum in duos triangulos equales p lineas diagonales: quarũ vna est.a.b. τ alia.a.c. sed ex penultima capl'i de triangulis est manifestũ duos triangulos iuxta lineam diagonalem.a.b. acceptos equales esse inter se: siliter τ alios duos iuxta lineã diagonalẽ.a.c. sed duo illorũ triangulorũ hoc modo equaliũ sunt om̄es partes trianguli principalis.a.b.c. τ sunt medietates totius tetragoni.e.b.c.f. quare totus triangulus.a.b.c. erit medietates eiusdẽ tetragoni: diuidã g̃ hunc tetragonũ in duos tetragonos equales per lineas.g.h. τ erit trigonus tetragonizat': τ tunc habita medie rei inuẽtione p primam huius capl'i erit trigonus predictus quadratus qd doceri debuit: τ sic apparet propositio.



Quarta cõclusio generalis.

Omne poligonium per resolutiones factas in triangulos: & per quadraturas factas ipsorum triangulorum: & demũ per circunscriptiones gnomonicas in formam quadrati reduci possibile est.

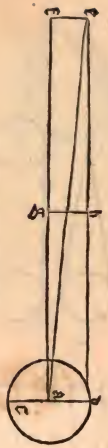


De quadratura cuiuslibet poligonij in speciali tractare nimis longũ foret τ difficile: τ ideo eligenda est via i paucior' lib'. De modo aũt resouẽdi poligonia oĩa in triangulos habes ꝓpositionẽ sextã q̃rti capl'i pmi libri. De modo autem quadrandi triangulũ secundũ suas species habes in hoc capl'o. De modo autẽ circũscribendi quadrata sibiinct gnomonice habes ꝓpositionem vltimam capl'i de quadrangulis: manifestũ est g̃ per ista media om̄e poligonium posse quadrari: quare p3 intentum.

Quinta conclusio de quadratura circuli.

Area cuiuslibet circuli æqualis est tetragonismo sub medietate circunferentiæ: & medietate diametri contento.

Suppono vnã ꝓpositionẽ archimenidis de mẽsura circuli: ⁊ erit mihi petitio: qm̃ eam demonstrare reqreret maiorẽ tractatũ ꝙ sit istud capl̃m: ⁊ est ista ꝓpositio. Ois circulus triangulo orthogonio est equalis: cuius vnũ duorũ laterum rectũ angulũ cõtinẽtium est semidiameter circuli: ⁊ latus alterum equatur linee cõtinenti circulũ. Est aũt ꝓportio linee cõtinentis circulũ ad diametrũ tripla sesqseptima: ita ꝙ circumferẽtia cõtinet ter diametrũ ⁊ septimã partẽ eius vltra hoc: vt habetur ab eodem archimenidie in predicto libello: verbigratia in circulo. a. b. c. sit. a. c. diameter cuꝰ semidiameter sit. a. d. ⁊ a puncto. d. ducatur orthogonaliter linea. d. e. vsq ad equalitatẽ circumferẽtie circuli: ⁊ ducatur linea. a. e. perficiens triangulũ. a. d. e. est ğ tũc intẽtio archimenidis ꝙ triangulus. a. d. e. est equalis circulo ⁊ hoc demõstrat certissime: ex quo ptꝫ intentũ: ⁊ ducaꝭ linea. a. f. equedistãter. d. e. ⁊ ducaꝭ linea. f. e. eque distãter. a. d. tetragonisimũ pficiens: habes igiꝭ paralellogramũ scꝫ. f. a. d. e. diuisum in duos triangulos p lineam diagonalẽ. a. e. sed illi duo trianguli sunt equales p vltimã de triangulis: ⁊ circulus est vni eorũ equalis p ꝓpositionẽ archimenidis: ğ circulus est equalis medietati illius tetragoni: diuidatur igiꝭ illud tetragonũ in duos tetragonos equales p lineam. g. h. ⁊ erit circulus alterutri eorum equalis: sed quilibet eorũ tetragonisinorũ cõtinetur sub medietate circumferentie ⁊ medietate diametri: ğ circulus est equalis tetragono sub semicircumferentia ⁊ semidiametro contento: si ğ quadretur tetragonus ille erit circulus quadratꝰ. Et hec de quadraturis sufficiant. Aristoteles vero. 2. priorũ caplo de inductione sumit tale argumentũ qd circulus quadrari possit sic: omne equale figure rectilinee quadrari potest: sꝫ ois circulus est equalis alicui figure rectilinee: igiꝭ ⁊c. maior ptꝫ ois figura rectilinea quadrari põt: vt doceꝭ in pmis. 4. demõstrationibꝰ huius capl̃i: minor habetur per sententiam archimenidis: ⁊ sic videꝭ hoc totum capl̃m tendere ad hanc cõclusionem ꝙ circulus quadrari possit. Aliam ꝓbationem minoris tangit Aristoteles per portiones lunulares: ꝙ tamẽ reputat in aliis locis sue philosophie insufficientẽ: ⁊ ideo de ea non curo ad presens. Si tñ bene oia dicta archimenidis pensetur sua etiã ꝓbatio ẽ insufficiẽs: vt infra in libello de qdratura circuli dicemus.

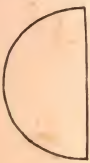


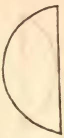
Liber quartus de figuris solidis seu de corporibus: habet sex capitula.

Capitulum primũ de diffinitionibus & diuisionibus corporum.

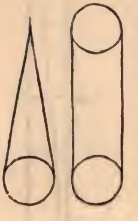
QVARTA HVIVS operis particula est circa dispositiões solidorũ corpoꝝ: & hic etiam a diffinitionibꝰ est inchoandũ. Dico ergo corpus illud oĩe quod habet lõgitudinẽ latitudinem & pfunditatẽ: mensuraturq̃ tribus diametris intersecãtibus sese orthogonaliter in eodẽ pũcto. Oĩe aũt corpꝰ aut vna superficie aut pluribꝰ supficiebus terminari necesse est. Corpora aũt vna supficie terminata sunt q̃ dicunꝭ rotunda. Oĩe autẽ rotũdũ aut habet oẽs lineas a cõi puncto ductas ad circũferẽtiam æquales aut nõ: si primo modo est corpus quod vocaꝭ sphera: vnde sphera est corpus rotũdũ cuius oẽs diametri sunt æquales. Si autẽ nõ habet oĩes lineas a cõi pũcto ductas æquales: tũc etiã diametri nõ sunt æquales: aut ergo axis est lõgior ceteris diametris aut nõ: si primo modo est corpus ouale quod habet figuram oui: si secũdo modo sic est corpus lenticulare. s. corpus quod lẽticula dicitur: & axem habet breuiorẽ. Item corporum multis superficiebus cẽtentorum: alia rotundis: alia angularibꝰ supficiebus cõtenta sunt. Rotũdarũ autẽ supficierũ corpora: alia quidẽ p totã lõgitudinẽ corpulẽtiam habẽt æqualem: alia nõ: primo modo colũpnæ rotundæ siue chilindri vocanꝭ: q̃ autẽ regulariter minorata treminanꝭ ad conũ: piramides rotũdæ siue coni appellanꝭ. Ex istis patet quomodo pdictis corporibus applicanꝭ diffinitiones quas Euclides ponit. 11. lib. geometriæ. s. quod sphera est trãsitꝰ archus circũferẽtiæ dimidii circuli: & piramis ẽ trãsitꝰ trianguli rectãguli: & colũpna ẽ trãsitꝰ paralellogrami recti anguli: & eodẽmõ põt diffiniri lẽticulare & ouale: ꝙ corpꝰ ouale est trãsitꝰ portionis semicirculo minoris corda existẽte fixa: lẽticulare est trãsitꝰ portionis semicirculo maioris supercordã fixam minorẽ diametro circuli.

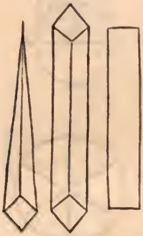
E

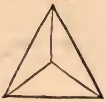


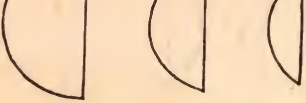


Corporum autẽ habẽtium multitudinẽ superficierũ & angulorum: quæ di-
cunt conica ꝓpter angulos & conos quos habẽt: quedã habẽt æqualem gros-
siciem secundũ totã longitudinẽ: & dicuntur colũpnæ lateratæ: quedã autẽ
vniformiter minorata ad conum terminant: & dicuntur piramides laterate.
Præter colũpnas autẽ & piramides est tertium genus conicorũ corporũ in
quo repponũtur corpora.5.regularia ænumerata in pricipio p̃mi libri hui9
& de qbus infra.s.tetracedron: exacedron: octocedron: duodecedron: ycoce
dron: ꝙꝙ tetracedron ad piramides & exacedron ad colũpnas reducantur.
Denominatur autẽ tam colũpna laterata ꝙ piramis a multitudine superficie
rum siue laterũ in sursum ærectarũ basi circũscripta: vt dicãtur piramides tri-
lateræ quæ habẽt tres superficies laterales: & quadrilateræ quæ habẽt.4.&c.
Sĩliter colũpna dici potest trilatera quadrilatera & multilatera secundũ nu-
merũ superficierũ lateralium: nõ cõnumerãdo basim in piramidæ nec duas
sup̃ficies terminales in colũpna. Columpna autẽ potest subdiuidi in corpus
serratile & solidũ paralellogramũ & alia multilatera corpora: vt dicatur cor-
pus serratile colũpna trilatera: solidũ autẽ paralellogranum colũpna quadri
latera: alia autẽ sunt sicut colũpna pentilatera & eptilatera &c. Sunt autẽ cor
pus serratile & solidũ paralellogramũ in geometria magis vsitata: quapro-
pter primo de eis insistendũ est. Corpus serratile dicit quod.5.superficieb9:
quarũ.3.sunt paralellogramæ & duæ triangulæ cõtinet: & si quidẽ fuerit ba
sis eius vna superficierũ triangularium colũpnæ habet similitudinẽ: si autem
statuatur super vnã sup̃ficierũ paralellogramarũ tunc cõuenit ei figura do-
mus siue tecti iuxta adapationẽ cãpani. Solidũ paralellogramũ dicit quod
continetur.6.superficiebus paralellogramis æque distantibus: & in multas
species diuidit vt i colũpnam cubũ aserem laterculũ & corpus cuneum: quæ
noĩa in arithmetica ad numeros tranlumũtur. Oĩa autẽ corpora conica hñt
angulos corporeos siue solidos sicut superficies planæ poligoniæ hñt angu-
los planos Angulus corporeus siue solidus ẽ quẽ cõtinẽt anguli plani plures
ꝙ duo: q nõ in vna sup̃ficiæ siti ad pũctũ vnũ angularẽ cõueniũt: & dico plu
res ꝙ duo quia pauciores esse nõ possunt trib9 anguli plani q angulũ solidũ
cõtinere debeant: si autẽ queras multitudinẽ maiorẽ angulorũ planorũ: di-
co ꝗ in minus statur ad.3.in maius nõ est status: quia nõ tot possunt eẽ quin
plures possint angulum solidum cõtinere: & ideo in talibus est processus in
infinitum: quod autem postea dicitur nõ in vna superficiæ siti: per hoc ac-
cipiendum est ꝗ mutua applicatio talium angulorum planorum sit non di-
recta: conformiter ad illud quod supra dictum est in diffinitione anguli pla-
ni. Terminant autẽ solida ad superficies: superficierum autẽ illa sup ꝙ erigit
figura solida basis vocatur: quæ autẽ in sublimi erigunt latera appellant. In
piramidæ aũt pũctus opposit9 basi in quẽ terminat figuræ grossities vertex
vel conus appellat. Accidit aũt in pluribus & maxime in corporib9 regulari
bus ꝗ q̃libet sup̃ficies sit æqualiter apta nata esse basis: ꝓpter quod talia cor-
pora figuræ multaꝝ basium vocant: & ideo iã inoleuit modus vt ycocedron
dicat figura.20.basiũ: & cõformiter de aliis corporib9 regularib9: cũ tamẽ

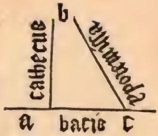








quodlibet tale corpus de facto tantū vnā supficiem super ꝗ statuitur habet solum pro basi. Et quēadmodum solida terminātur ad superficies: sic superficies terminantur ad lineas: quæ lineæ similiter terminantur ad pūcta. Et diuiduntur: linearū enim quædā tota iacet in plano & vocatur basis: alia vero in sublimi ærecta: & subdiuiditur harū enim quædam est quæ ærigit̄ perpēdiculariter: & vocat̄ cathecus: alia vero ad angulos cōsurgit inequales & vocatur ypotemissa: & hoc imaginari potest in trigono orthogonio habēte in plano basim: & duo latera in aere æleuata: vnde versus. Linea protracta basis est: ærecta cathecus. Extenditur ad metas ypotemissa duas.

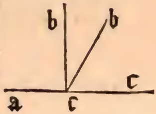


Capitulum secundū de lineis in comparatione ad corpora.

Prima conclusio.

HIS NOTATIS ponendæ sunt cōclusiones & incipiam a lineis secundū ꝙ linearū cōsideratio ad hāc partem pertinet: sit ergo hæc cōclusio prima iuxta diuisionē de lineis. Lineā rectā partim eē in plano & partim sublimi est impossibile.

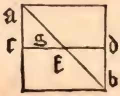
Quod si possibile est: ponatur qḋ linea sit recta. a. b. cuius pars iaceat in plano ꝛ sit. a. c. pars vero ypotemissaliter surgat sꝫ. b. c. qḋ autē perpendiculariter surgat nimis esset alienū a ratione: si ꝗ ei partiali linee que in plano iacet puta. a. c. alia linea in eodē plano directe addiciatur ex eadem parte ex qua alia partialis cōsurgit puta. c. d. erunt vni ꝛ eidē linee sꝫ. a. c. due alie linee diuerse penitus ex eadē parte adiecte directe quod est impossibile. Item ex hoc sequit̄ oppositū petitionis quinte: qm̄ constat ꝙ ex. b. in. a. potest duci recta que nō transeat per punctū. c. si ergo. b. c. a. sit linea recta: ꝗ due linee recte supficiem clauderent. Ex ista sumūt aliqui argumentū ꝓ indiuisibilibus. i. ad ꝓbandū pūcta indiuisibilia esse realiter in natura: nā sit. a. b. planum cui insistat linea. c. d. siue perpendiculariter siue ypotemissaliter: tunc arguo sic: impossibile est. c. d. lineam habere partē in plano cū sit in sublimi erecta ꝑ presens theorema sed aliqḋ ipsius. c. d. est in plano qꝛ tangit planum ꝛ non nisi secundū aliquid sui: igitur est dare aliquid linee. c. d. ꝙ non est pars eius: hoc autē nō est nisi indiuisibile: ꝗ indiuisibile est dādū. Sꝫ aliꝗ dicerent ꝙ linea erecta tangit planū in infima sui parte: sed non primo qꝛ non secūdum totam illā partem: ꝛ hoc est tangere indiuisibiliter sed non in aliquo indiuisibili.



Secunda conclusio.

Omnium duaū linearum se inuicem seccātium cōmunis sectio est punctus.

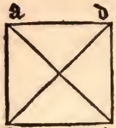
Ista pꝫ ex premissa per cōsequētiam ecōtrario: qm̄ ex opposito istius sequitur oppositū illius: sit enim linea. c. d. intersecans aliam lineam oblique. a. b. que est diameter in quadrato: si tangit eam in plus ꝗ in puncto (sicut dicunt quidā ponentes cōtinuum cōponi ex indiuisibilibus: ꝛ cū hoc saluare volentes ꝙ plura sunt puncta in diametro ꝗ in costa cū longior sit diameter costa: qḋ aliter saluari nō potest nisi ponendo ꝙ linea que tāgit vnū punctum in costa tangit plura puncta in diametro) si inquā cōmunis sectio istarū linearū sit plus ꝗ punctus tunc. c. d. sit planum ꝛ. a. f. sit linea erecta in sublimi ꝛ. f. g. sit sectio cōis: ꝗ cū. f. g. sit portio linee erecte: sequitur necessario istius recte linee q̄ est erecta esse partem in plano puta. g. f. partim in sublimi puta. g. a quod est oppositum conclusionis premisse.



Tertia conclusio.

Omnes duæ lineæ rectæ se intersecantes in eadem superficie site sunt.

Istam ꝓbo sic: aut enī tales due linee que se intersecant iacēt super planum: ꝛ sic habetur propositū qm̄ in eadē extēsa superficie site sunt: aut vna iacet in panlo ꝛ reliqua in sublimi erecta est vel vtraqꝫ in sublimi erecta est: ꝛ siue sic siue sic copulabo termios earundē adinuicēm ꝑ q̄tuor lineas rectas: vt si sit vna earum. a. b. altera. c. d. copulabo. a cum. c. per lineam. a. c. ꝛ sic de alijs etiāqꝫ superficies quadrangularis. a. b. c. d. in qua site sunt linee. a. b. ꝛ. c. d. quod fuit probandum.



Quarta conclusio.

Vnam & eandē lineam numero in diuersis supficiebꝰ sitam esse possibile est.

Hec pꝫ per premissam: iaceant enim due linee. a. b. ꝛ. c. d. site in plano ꝛ. a. cōmuni earum sectione ducatur cathecus sursum ꝛ deorsum secans vtramqꝫ lineam in superficie plana ꝛ sit. e. f. constat ꝙ. e. f. linea est in eadem superficie cum. a. b. ꝛ est in eadem superficie cum. c. d. ex eo quod secat vtramqꝫ lineam per premissam: quare vna ꝛ eadem linea est in diuersis superficiebus.

Quinta conclusio.

Si superficies superficiem secet: cõmunis sectio erit linea.

Ista ptz per premissam: ꝙ enim vna ꝛ eadẽ linea sit in diuersis superficiebus hoc specialiter nõ contingit nisi in tali casu qñ superficies secat supficiem: ex eo enim linea est in diuersis supficiebus: qꝛ iste superficies secant se sup illã lineam. Et iste cõclusiones sufficiant per quas deuentum est a punctis ad lineas: ꝛ per lineas ad superficies: ꝛ ꝑ supficies ad solida: de solidis igitur cõsequenter dicamus.

Capitulum tertium de angulis solidis.

Prima conclusio.

PRINCIPIA autem solidorum videtur esse anguli solidi: accepta autẽ eorum prius data diffinitione sit prima cõclusio. Si tres anguli superficiales angulũ solidũ cõtineãt: illoꝝ quilibet duo pariter accepti reliq̃ sunt maiores. Ex q̃ manifestũ est ꝙ in piramide laterata anguli laterales q basim cõtingũt angulis ipsius basis sunt maiores.

Ista ptz ex clausula petitioni ꝑme adiuncta qȝ rectũ est breuissimũ: sic vt inter eosdem terminos linea recta sit breuior ꝙ̃ linea curua vel fracta: similiter inter easdem lineas supficies recte extensa est breuior curua superficie vel fracta: ꝛ voco fracturã supficiei vel linee qñ due linee vel supficies sibi inuicem applicate sunt nõ directe: hoc supposito accipio angulũ solidũ trib⁹ angulis supficialibus cõtẽtũ q sit a ꝛ accipio angulũ superficialẽ qui sit maximus illorũ trium iste terminaꝝ ad duas lineas cõcurrentes in pũcto a reliqui etiã duo anguli superficiales terminanꝝ ad easdẽ duas lineas: quare manifestum est ꝙ iste due superficies simul sumpte sunt quasi vna supficies curua vel fracta: nõ enim rectã habet ꝓtensionẽ: illa vero vna recte ꝓtendiꝝ ad eosdẽ terios viȝ ad easdẽ lineas: quare si rectum est breuius obliquo vel curuo vel fracto sibi cõterminali: sequitur quod angulus quẽ inter eas accepimus est minor duobus alijs angulis: ꝛ ita quicũꝗ duo pariter accepti reliquo maiores erunt. Correlarium ptz statim qñ anguli laterales attingẽtes basim cũ angulis basis cõstituunt angulos solidos duobus angulis laterabilibus semꝑ attingentibus vnũ angulum ex angulis basis. Ex quo manifestum est qȝ omnes isti superficiales simul sunt maiores omnibus illis qui sunt basis.

Secunda conclusio.

Omnes anguli laterales cuiuscũꝗ piramidis laterate valent tantum ꝙ̃tum omnes anguli basis & vltra hoc quattuor rectos præcise.

Ex sexta ꝓpositione capli de lineis in primo libro huius habes quod omnes anguli basis tot rectis sunt equales quot sunt ipsi duplicati dẽptis q̃ttuor. Cõstat aũt qȝ oẽs anguli laterales piramidis tot rectis sunt equales quot sũt anguli basis duplicati: ꝓ quolibet enim angulo basis habes triangulũ vnũ lateralẽ: nã quot sunt anguli basis tot sunt trianguli laterales: ꝛ quilibet triangulus valet duos rectos angulos: ergo sequitur ꝙ anguli laterales valent plus ꝙ̃ anguli basis ꝛ excedũt eos in quattuor rectis quod est ꝓpositum mei theorematis.

Tertia conclusio.

Omnis angulus solidus quattuor rectis minor est necessario.

Dicitur aũt angulus solidus tantus esse q̃ti sunt oẽs anguli plani ipsum cõtinentes: qȝ autẽ oẽs illi anguli plani minus valẽt quattuor rectis etiã si essent millesies mille: sequitur euidẽter ex duabus propositionib⁹ premissis: statuatur nãꝗ piramis multilatera ꝛ sit a supremus angulus eius in quo ostendã ꝓpositum: accipiam enim ex secũda cõclusione qȝ oẽs anguli laterales. i. oẽs anguli preter angulos basis excedunt omnes angulos basis precise in quattuor rectis: cum igitur anguli laterales diuidãtur in angulos q attingunt basim ꝛ angulos q cõstituunt angulũ solidũ supremũ a accipio ex prima ꝙ anguli qui attingũt basim sunt maiores angulis basis: relinquiꝝ ergo necessario qȝ anguli q sunt apud. a. sint minores q̃ttuor rectis q si possent valere quattuor rectos precise: ponaꝝ ꝙ accipianꝝ cũ angulis q attingũt basim: sed anguli attingẽtes basim valent tantũ ꝙ̃tum valent anguli basis ꝛ aliqd plus ꝑ primã: igitur oẽs anguli laterales addũt sup oẽs angulos basis quattuor rectos ꝛ aliquid plus qȝ est impossibile per secundam: cũ igiꝝ ex opposito ꝯclusionis cũ altera premissarum puta ꝑma sequatur oppositũ alterius premisse. s. cõclusionis scḋe ptz qȝ illa prima illatio erat bona. Non autẽ solũ cõcludit hec demõstratio de angulis piramidis: sȝ de quibuscũꝗ angulis solidis: qñ si accipias angulũ solidũ icocedronis. 20. supficierũ triangulariũ vel alterius corporis solidi regularis ꝛ subtẽdas ei supficiem abscidentẽ ipsum angulũ cõstat ꝙ habes piramidẽ: ꝛ erit demõstratio sicut prius. Et ita ptz quod ista demonstratio vniuersalis est ad oẽm angulum solidum. Ex istis ergo apparet via ad demonstrandum dispositiones ꝛ naturas corporum regularum.

Capitulum quartum de constitutione corporũ regularium.

Prima conclusio.

EX SVPERFICIEBVS triangularibus tria tantum corpora regularia constituere possibile est.

Tetracedron enim octocedron ⁊ icocedron ex superficieb⁹ triangularibus consistunt: nec plura possibile est cōstitui corpora regularia in basibus triangularib⁹: dicunt̄ autē corpora regularia q̄ equiangula sunt ⁊ eq̄latera: ⁊ a sphera atq̧ a se inuicē circūscriptibilia vt cāpanus dicit: quapropter opʒ qȯ sint ex sup̄ficiebus regularib⁹ q̄ sunt eq̄angule ⁊ eq̄latere: hoc igit̄ supposito patebit intētū. Impossibile enim est ex sex angulis triangulorū talium cōponi angulū solidum aut ex pluribus p premissam: q: sex anguli tales quattuor rectos valēt: ⁊ plures valēt amplius: nec ex duobus tm̄ possibile est cōponi angulū solidū p diffinitionē anguli solidi: igr̄ ex tribus solū ⁊ ex quattuor ⁊ ex quinq̧ talibus pōt esse angulus solidus: cū tam .3. q̄. 4. q̄. 5. deficiant a .4. rectis: ⁊ ideo figura corporalis ex sup̄ficiebus triangularib⁹ regularibus solū tunc fieri pōt qn̄ aut .3. aut. 4. aut. 5. anguli superficiales ad cōponendū angulū corporalē cōcurrunt. Si igr̄ ex trib⁹ angulis trianguloꝝ regulariū fiat angulus solidus: tunc opʒ ꝙ q̄ttuor sint sup̄ficies triangulares in corpore illo ꝓpter quod tetracedron nūcupat̄ a tetra qȯ est q̄ttuor: vocatur etiā piramis q̄tuor basium: ⁊ cōstat qȯ erunt q̄ttuor anguli solidi in illo corpore: q̄ttuor enim trianguli habēt angulos. 12. cum igr̄ ex illis fiant anguli solidi scdm̄ ternarios ⁊ in. 12. sint q̄ttuor ternarij: manifestū ē ꝙ q̄ttuor erūt anguli solidi. Si autē ex q̄ttuor angulis trianguloꝝ fiat angulus solidus: tūc opʒ quod sint octo trianguli in illo corpore: ⁊ ob hoc dicitur octocedron in quo cōstat ꝙ sunt sex anguli solidi in illo corpore: octo enim trianguli habēt angulos. 24. cum enim semp̄ q̄ttuor de illis concurrāt ad cōponēdum angulū solidum ⁊ in. 24. sint sexies quattuor: clarū est qȯ sex erunt anguli solidi in illo corpore. Si autē ex q̄nq̧ angulis triangulorū fiat angulus solidus: tūc opʒ quod in illo corpore sint. 20. sup̄ficies triangulares vndiq̧: vt pʒ ad sensuʒ in corporibus taliter fabricatis: vnde ⁊ vocat̄ icocedron. i. 20. basium: ⁊ cōstat qȯ erunt. 12. anguli solidi in tali corpore. 20. enim trianguli habent. 60. angulos: cum igitur de illis cōponātur anguli solidi secundum quinarios: ⁊ in. 60. sunt. 12. quinarij manifestum est ꝙ. 12. erunt anguli solidi in eo: ⁊ per hoc habetur via clara ad fabricandum talia corpora.

Secunda conclusio.

Ex superficiebus quadrāgularibus vnum tantū regulare corpus cōponitur.

Ista pʒ statim: opʒ enim quod sit ex oīb⁹ q̄dratis sup̄ficiebus: angulus autē q̄drati rect⁹ est igr̄ tm̄ tres anguli tales cōiuncti possunt angulū corporalē facere: nā si addant̄ q̄ttuor: iā nō erit angul⁹ solid⁹ ex eis: vt pʒ ex cōclusione tertia p̄cedētis capl̄i. Si ḡ tres anguli q̄dratoꝝ cōcurrant ad angulū solidum causandū tunc in tali corpore erūt sex sup̄ficies q̄drate sicut est in taxillo: ⁊ hec figura cubus vocatur ⁊ exacedron ab exa grece ꝙ est sex latine: ⁊ constat quod in tali corpore octo sunt anguli solidi.

Tertia conclusio.

Ex superficiebus pentagonis vnum tantum corpus regulare componitur.

Ista statim pʒ: nā cum angulus pētagoni regularis sit maior angulo q̄drati sicut pʒ ex primo libro huius ꝓpositione sexta capl̄i quarti: cūq̧ minus possit angulus solidus cōstare ex q̄ttuor angulis pētagoni regularis q̄ ex q̄ttuor angulis quadrati: cū ḡ non pōt constare ex istis: ḡ nec ex illis q̄ttuor cū sint maiores: opʒ igr̄ vt solū tres anguli pētagoni cōcurrāt ad angulū solidū cōstituendū: ⁊ tūc in illo corp̄e erunt. 12. sup̄ficies pētagone sicut pʒ in fabricatione talis corporis: ⁊ ꝓpter hoc vocatur duodecedron: ⁊ q: 12. pentagoni hn̄t. 60. angulos: cū igr̄ tres anguli cōcurrāt ad cōstituendū angulū solidū: ⁊ cū in. 60. sint. 20. ternarij: ideo necesse ēvt sint. 20. anguli solidi in copore tali: ⁊ sic pʒ ꝓbatio.

Quarta conclusio.

Præter quinq̧ corpora regularia prædicta impossibile est vt sit corpus regulare multilaterum.

Dico autē multilaterū ꝓpter spheram que regularissima capacissima ⁊ vniformissima est qualis nata est in corporibus esse. Cōclusio pʒ qm̄ post pētagonum seq̄tur exagonus in ordine figurarum: ex superficiebus autē exagonis non est possibile ꝙ sit aliqua figura regularis: q: nullus angulus corporalis potest fieri ex angulis talium exagonorū: ꝓpter hoc quod tres anguli tales valent quattuor rectos: q: oēs sex anguli exagoni valent octo sicut ex p̄mo libro notum est: cum igit̄ nullus angul⁹ corporalis valeat q̄ttuor rectos ex tertia capl̄i precedētis: ⁊ angulus corporalis nō potest esse ex paucioribus q̄ ex tribus angulis superficialibus per diffinitionē anguli solidi: manifestum est quod ex superficiebus exagonis non sit regulare corpus vllomodo. Ulterius cum quelibet figura exagonū sequens habeat maiores angulos q̄ sunt anguli exagoni: impossibile est quod fiat aliqua figura regularis ex eis: sic ergo in presenti capl̄o inuestigauimus breuiter numerū ⁊ dispositionē corporum regularium per euidentiam demōstratiuam per quā etiam pʒ fabricatio talium corporum.

Capitulum quintum de loci repletione.

CONSEQVENTER ad ista videre oportet de loci repletione & quæ de corporib⁹ regularib⁹ locũ replere nata sunt.

Circa hoc autẽ negociant̃ tam mathematici q̄ naturales q̄eadmodũ notũ est per Aristotelẽ tertio celi ⁊ mũdi ⁊ ꝑ cõmẽtatorẽ ei⁹: ⁊ ꝓpter hoc arguit̃ vtilior huius rei pericia. Opʒ aũt recipere repletionẽ loci insolidis ꝓportionabiliter ad repletionẽ loci in planis de qua dictũ est supra libro ꝑmo capl'o de lineis: sicut eñ ibi replere locũ est occupare totũ spaciũ qḋ circũstat aliquẽ punctum in plano: qḋ fit ꝑ q̄ttuor rectos angulos in forma vł in valore sicut ibidẽ dictũ est: ita ⁊ hic replere locũ ẽ replere totũ spaciũ corꝑale qḋ circũstat pũctũ sup quẽ intersecãt se tres linee ad angulos rectos. Et dicit aueruis qḋ paucitas sup̄ficierũ replẽtiũ sua loca causa est paucitatis corporũ replentium sua loca: scimus aũt ex ꝑmo libro hui⁹ qḋ tantũ tres figure sup̄ficiales regulares: scʒ triangulus q̄drangulus ⁊ exagonus replẽt locũ: ꝓpter qḋ videtur aueruis ponẽ q̄ tãtũ cubus ⁊ piramis insolidis replẽt locũ: cubus eñ in corporali repletione corrñspõdet q̄drato in sup̄ficiali repletione: q̄r cub⁹ fit ex q̄dratis sup̄ficieb⁹ regularib⁹: ⁊ piramis corrñspõdet triangulo regulari q̄r fit ex triangulis: sʒ figure exagone nõ corrñspõdet figura tertia corꝑalis replẽs locũ: q̄m ex exagonis nõ ẽ possibile aliqḋ corpus regulare cõstitui: vt pʒ ex ꝑcedẽti capl'o demõstratione vltima. Sʒ hec nõ ẽ nisi ꝑsuasio.

Comẽtator auerrois.

Conclusio vnica.

Dico ergo quod secundum veritatem cubus replet locum: sed secundũ opinionem auerуis piramis etiam replet locum.

De cubo.

Ad habendã aũt certitudinẽ de cubo plus valet experientia quã ratio silogisticã: videmus eñ ad sensum ⁊ ad experientiã q̄ octo cubi cõgregati circa vnũ punctũ totũ spaciũ circa ipsum replent ad oẽm differẽtiã positionis: si eñ intelligamus tres lineas in aere intersecantes se ortogonaliter: sicut apparet in tribus paleis sibi mutuo applicatis: q̄ faciunt. 12. angulos rectos sicut pʒ: inter illas lineas superius intercipientur quattuor cubi sine internallo ⁊ alij quattuor inferius consistẽt: ita q̄ supra sectionẽ q̄ttuor ⁊ infra etiã q̄ttuor ⁊ ita octo cubi totũ spaciũ occupabũt. Est tamẽ etiã ad hoc ratio satis cogens: nam vt declaratũ est in arithmetica: si cubus ducat̃ in cubũ ꝓducetur cubus: accipiatur ḡ corpus cubicũ ⁊ multiplicabo talia corpora cubica secundũ cubicũ numerũ: verbigratia secundũ. 8. qui est ꝑmus numerus cub⁹: ex illa ḡ ꝓpositione arithmetice si cõponant̃ illa octo faciũt cubũ: sed nõ facerẽt cubũ nisi replerẽt locũ circa vnũ pũctũ quẽ oẽs attigũt: hoc manifestũ ẽ q̄m aliter magna esset eorũ separatio adinuicẽ extrinsecus: opʒ ḡ vt locũ repleant.

Obiectio.

Sed si obiceres quod si ista ratio cõcluderet sequeret̃ quod. 27. cubi replerent locũ q̄r. 27. est numerus cubicus ⁊ ita de oibus alijs cubicis: quod est manifeste fñm: nã si octo replẽt locũ impossibile est plura vel pauciora corpora cõcurrere ad replendũ locũ: sicut in sup̄ficiebus q̄r sex trigoni: tres exagoni: q̄ttuor tetragoni replẽt locũ: impossibile est vt ex eis plures vel pauciores repleant locũ.

Solutio.

Et dico ad illud quod in ꝓposito locus dicitur repleri q̄ñ corpora repletiua cõcurrũt ⁊ cõtingũt vnũ punctũ: ita quod nõ sufficit ad repletionẽ loci in ꝓposito quod nõ intercipiat̃ vacuũ siue separatio inter partes: sed cũ hoc req̄ritur quod ista corpora cõtingant vnũ punctũ in medio: nunc autẽ cubi octo sic excludũt vacuum siue separationẽ partium q̄ quilibet eorũ trãsmittit angulũ vnum ad cõem pũctũ in medio situatũ: qḋ nõ facit quisq̄ alius numerus cubicorũ: ex quo pʒ quod ratio predicta solũ habet locũ in octonario cubo ⁊ in nullo alio numero siue cubico siue nõ cubico.

Dubium.

Est adhuc alia instãtia siue ambiguitas soluẽda: si eñ octo cubi replent locũ scʒ octo angulis solidis cõcurrentibus ad vnũ punctũ: cũ quilibet talis angulus solidus sit ex talibus tribus sup̄ficialib⁹ angulis rectis: videt̃ quod ad repletionẽ loci req̄rantur. 24. recti: nam ter octo sunt. 24. nunc autẽ ĩ trib⁹ lineis se intersecãtibus solũ. 12. apparent anguli recti: vt supra dictũ est.

Responsio

Ad hoc dicendũ est quod in corporibus cõgregatis circa vnum punctũ semꝑ duo anguli sup̄ficiales duorũ angulorum corporalium cõiuncti sunt secundũ ꝓfundum: ⁊ ideo nõ plus faciunt duo q̄ si esset vn⁹ solus.

De piramide vel tetracedron.

De piramide magna est altercatio q̄m auerуis ponit q̄. 12. piramides replent locũ: ꝓpter hoc q̄. 12. anguli piramidis valẽt octo angulos cuboꝝ igit̃ ita replet locũ vna figũa sicut ⁊ alia: assumptũ ꝓbatur q̄m q̄libet angulus solidus piramidis est ex trib⁹ angulis sup̄ficialibus q̄ valent duos rectos q̄libet eñ est tertia pars duoꝝ rectorũ ḡ. 12. tales valẽt. 24. rectos sicut octo anguli cuborũ.

Opinio.

Alij reprehẽdunt auerуim in hoc dicẽtes quod nõ minus q̄. 20. replent locuũ: ⁊ allegãt experientiã ꝓ se: ⁊ hoc videt̃ satis rationabile q̄r ex eis resultaret corpus. 20. basium qḋ vocat̃ icocedron ⁊ si intelligamus subtili imaginatione icocedron diuidi in piramides ductis lineis a singulis angul' cuiuslibet basis de. 20. basibus eius in medium ipsius corporis videnẽ resultare viginti piramides.

Reprobatio.

Alia opio.

Et ita videtur esse verisimilior sententia eorum qui dicunt viginti piramides posse replere locum.

Ad rõnes prime opinionis.

Et oino certũ est q̄ ratio auerуis nõ ꝓcedit: nõ eñ valet q̄ña anguli sup̄ficiales. 12. piramidũ valent angulos sup̄ficiales octo cuborũ. igit̃ tanta corpulẽtia est sub istis sicut sub illis: possibile eñ ẽ q̄ angulus solidus minoris corpulentie cõtineat̃ sub tãtis vel maiorib⁹ angulis planis: sicut minor sup̄ficies cõtineri põt sub eq̄libus vel maiorib⁹ lineis vt in secũdo libro demõstratũ est. Propterea si va-

leret ratio auernis de piramide: cõcluderet necessario de octocedron q: repleret locũ: quod tñ nulla e pl nio nec ipse Aristoteles dicit: angulus em̃ solidus octocedron cõtinet a q̃ttuor angulis triangulorũ regularium: quapropter cũ tres de illis valeant duos rectos ⁊ vnus vnã tertiã duorũ rectorũ: sequit̃ q̃ nouẽ eius anguli valẽt octo angulos cuborũ: valebũt em̃ tales nouẽ p̃mo.18.rectos ⁊ remanet de quolibet vnus angulus: ⁊ ita nouẽ sunt anguli plani remanentes q̃ valẽt sex rectos: igr̃ om̃es valẽt.24.rectos quãtus est valor octo angulorũ cubicorũ. Itẽ si.12.piramides replerẽt locũ sequeret̃ q̃ ex eis resultaret corpus.12.basium triangulariũ cõgregatis ipsis circa vnũ punctũ: q: de qualibet pi ramide esset vnus triangulus in sup̃ficie illius corporis: ⁊ cum isti trianguli essent eq̃les ⁊ regulares oporteret tale corpus esse regulare: ⁊ ita p̃ter q̃nq̃ corpora regularia esset sextũ corpus regulare cu ius oppositũ demõstratũ est. De.20.piramidib⁹ si repleant locũ q̃uis videat̃ p̃babile: nõ est tñ vsq̃ quaq̃ certũ: q: q̃ diceret octo piramides replere locũ: diceret similiter ex ipsis resultare corpus octo ba sium qd̃ vocat̃ octocedron: ⁊ itẽ ipsum octocedron similiter resolueret subtiliter imaginans in octo pi ramides. Si autẽ cõstaret quod piramides in quas predicto modo resoluit̃ icocedron essent regula res: iam nõ videret̃ res esse dubia: sed q: per viam disputationis non possumus p̃ nunc ad plenam certitudinem deuenire: ideo relinquitur ad presens illud indiscussum.

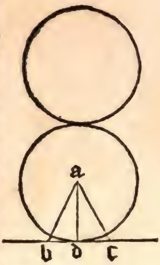
Capitulum sextum determinat de sphera.

NVNC post tractatum de corporibus poligonis regularibus: tan gendũ est aliq̃d de sphera: q̃ est figura regularis simpliciter vnifor mis: maxima: nobilis: & perfecta: incipiendo a diffinitionibus: & subiungam conclusiones de circulis in phera significabilibus se quendo dicta theodosii philosophi.

Scd̃m q̃ theodosiũ sphera est figura solida vna tñ sup̃ficie cõtẽta: in cui⁹ sup̃ficiei medio ẽ p̃uct⁹ a quo oẽs linee recte ducte ad superficiem eiusdẽ sphere sunt eq̃les: ⁊ hic q̃dẽ p̃uctus dr̃ sphere centrũ. Hãc quidẽ diffinitionẽ cõp̃chendit Aristo. breuiter quarto ⁊ septimo methaphisice vbi dicit: sphera est fi gura solida ex medio equalis. Scd̃m theodosium diameter sphere est linea trãsiens p̃ centrũ sphere applicans extremitates suas sup̃ficiei sphere ex vtraq̃ parte. Axis sphere est diameter eiusdẽ sphere: que cũ sphera circa ipsam diametrũ voluit̃ fixa manet. Axis autẽ extremitates poli sphere noiant̃. Polus circuli in sphera signati est p̃uct⁹ existẽs in sup̃ficie sphere: a quo om̃es linee ducte ad ipsius circuli circũferentiã sunt equales. Circulus in sphera p̃ centrũ trãsire dr̃ in cuius sup̃ficie centrũ sphe re cõsistit. Circuli ĩ sphera a cẽtro eq̃liter distare dicunt̃: q̃ñ perp̃ẽdiculares linee a cẽtro sphere ad ip sorũ circulorũ sup̃ficies ducte fuerint adinuicẽ equales sicut duo tropici. Plus autẽ circulus a centro distare dr̃ sup̃ cuius sup̃ficiem cadẽs linea p̃pendicularis est lõgior. Et nota q̃d circulus in his diffini tionibus nõ accipit̃ p̃ circunferẽtia tantũ in sup̃ficie cõuexa ipsius sphere descripta: sed p̃ circulari su perficie plana trãseunte imaginabiliter p̃ sphere corpulẽtiam ⁊ ad circũferẽtiam in sphere sup̃ficie de scriptã terminata. Angulus spheralis dicit̃ angulus ex duob⁹ arcubus in sup̃ficie sphere p̃ueniens. Angulus rect⁹ spheralis dicit̃ angulus inter duos arcus interceptus: cũ om̃es interceptiones arcuũ equales fuerint. Angulus q̃ recto maior est obtusus dicit̃: q̃ vero recto minor acutus appellatur. Cir culus ĩ sup̃ficie sphere descript⁹ sup̃ circulũ inclinat⁹ dicit̃ cũ eorũ intersectiones fuerint secundũ angu los ineq̃les: inclinatio aũt eorũ dr̃ differẽtia recti anguli. Et circuli in sphera sup̃ alios circulos equa liter inclinari dicunt̃: quorũ inclinationes sunt equales. Magis autẽ inclinati sunt quorũ inclinatio fuerit maior minus inclinati dicitur quorũ inclinatio minor fuerit. Sherã sup̃ficies contingere dicit̃ que cũ spherã tangit in q̃cũq̃ partẽ fuerit protracta eandẽ spheram non secat: sit q̃ prima conclusio de sphera tangente planum: que est apud theodosium tertia ⁊ est talis.

Prima conclusio.

Si spherã planã superficies cõtingat: in vno puncto tantũ cõtingere necesse est. Ex quo manifestũ est: multo magis spheram a sphera cõtingi in puncto.



Si em̃ in pluri cõtingat q̃ in p̃ucto: aut igitur in linea aut in superficie: ⁊ siquidẽ in superficie: necesse est vt etiã in linea cõtingat: q: sup̃ficies nõ est sine linea: si aũt in linea cõtingat: iã reddit demõstratio quarti capĩi de circulis ĩ scd̃o lib. hui⁹ q̃ p̃bat circulũ cõtingere lineã in p̃ucto solũ. Si autẽ sphera cõ tingat planũ super lineam: a centro sphere quod sit.a.ad terios linee secundũ q̃ sphera contingit pla num q̃ sunt.b.c. p̃traham lineam.a.d.in medium linee.b.c.⁊ erũt duo trianguli.a.d.b.⁊.a.d.c. Tũc arguo sic: aut.a.d.linea incidit.c.b.linee orthogonaliter aut nõ: si sic erit in vtroq̃ triangulo angul⁹ apud.d.rectus: ⁊ per cõsequẽs in istis triangulis erũt latera.a.b.⁊.a.c.lõgior a latere.a.d.per tertiã capĩi de triangulis: cum maioribus angulis in illis triangulis opponãtur. Si vero.a.d.linea nõ in cidat linee.b.c.orthogonaliter tunc angulũ obtusum facit cum linea.b.c.⁊ ei in suo triangulo maius latus opponitur per eandẽ tertiam: ex quo sequitur quod tres linee venientes a cẽtro.a.vsq̃ ad puncta b.d.c.non sint equales: sed illa tria p̃ucta sunt puncta circumferẽtie: igitur in sphera linee venientes a centro ad circũferentiam nõ sunt equales: quod est oppositũ sphere ⁊ circuli diffinitionis. Correla

rium de sphera spheram tangente: p3 manifeste ex declaratione diffinitionis.

Secunda conclusio.

Vnam spheram duodecim sphere æquales circumpositæ contingunt.

Ista ptim ē manifesta p vltimā capl̄ de circulis i scd̄o lib. hui⁹: q cū sex sphere orbiculariter applicēt sphere p̄ncipali p3 per illā: q si signēt circulus maior in sphera q̄libet: sic erit demōstratio vt prius: sed qm̄ spacium est vtrobiq3 iuxta latera illarū sex spherā ordinatarū in circuitu sphere principalis: faciliter cōuincitur q nō nisi tres sphere in vno spacio ꝛ tres in alio capi possint: ꝛ sensus hoc indicat: nā cū fecerimus. 13. spheras de cera equales: videbimus qd̄. 12. sic possunt applicari circa tredecimā ita qd̄ q̄libet illarū contingat eam inferius: ꝛ cū hoc quattuor de spheris lateralibus: vt sit contactus cuiuslibet spherarū lateraliū scd̄m q̄nq3 p̄cta q̄ sunt teri diametroꝝ secantiū se lateraliter siue orthogonaliter in vno quoq3: nisi q apud terim vnius diametri qui est sextus punctus non est cōtactus: qr superius alias spheras nō contigunt. Post hoc ponā conclusiones de circulis in sphera significabilibus: ꝛ prima erit ista que est tertia in ordine.

Tertia conclusio.

Si in sphera plurimi circuli signentur: is qui per centrū sphere transierit: omnibus erit maior. Reliquorū quidē hii: quorū longitudo a cētro æqualis fuerit: erunt æquales: at cuius lōgitudo a cētro maior fuerit: minor erit: & cuius longitudo minor fuerit: est maior.

Hanc cōclusionem ꝛ sequētes volo exemplificādo deducere: ꝛ qr ordinant̄ ad astronomiam: ideo cōuenienter in sphera celesti vel materiali celestem spherā representāte exemplificari possunt: sunt em̄ in sphera celesti plurimi circuli signati sicut p3 in sphera materiali: eorū aūt q̄ quidē per cētrū trāsierint alijs sunt maiores: sicut equinoctialis ꝛ zodiacus ꝛ coluri ꝛ hm̄oi q̄ p cētrū transeunt: ꝛ sunt maiores tropicis ꝛ circulis arcticis q̄ p centrū sphere nō transeunt. Et istorū hi quidē sunt equales quoꝝ lōgitudo a centro equalis est: vt duo tropici: ꝛ duo arctici. Inequales aūt sunt quorū longitudo a cētro est inequalis: ꝛ maior cuius lōgitudo a cētro minor est: minor vero cuius lōgitudo a cētro maior: sicut p3 accipiendo tropicū cācri: ꝛ circulū arcticum. Accipit̄ aūt hic circulus nō ꝓ circumferētia tm̄: sed ꝓ supficie circulari sicut in precedenti caplo expositū est. Ex ista ꝓpositione accipiunt̄ ille diffinitiones maiorū ꝛ minorū circulorū in tractatu de sphera. s. qd̄ maior circulus in sphera dicit̄ qui descriptus in supficie sphere sup eius centro spheram diuidit in duo equalia: minor vero q̄ diuidit eam in portiones ineq̄les. Ex ista etiā accipitur numerus vtrobiq3 circulorū in sphera materiali: qr maiores sunt sex qui sc3 transeunt per cētrum sphere: minores aūt quattuor qui extra centrū transeunt. Theodosius tamen nō limitat hos aut illos ad aliquem determinatum numerum.

Quarta conclusio.

Circuli æquales & æquedistantes in sphera nō sunt nisi duo tātum: inequales vero & inequedistantes infiniti. Omnium autem æquedistantium eosdē esse poles necesse est.

Prima pars sequitur ex premissa: equales em̄ sunt circuli quorū longitudo est equalis a centro: vt dicit premissa: hec autē longitudo mēsuratur p perpēdiculares lineas a cētro sphere ad ipsorū circulorū supficies ductas p diffinitionē equaliter distātium a cētro: tales autē ppendiculares respectu equedistantium circulorū a centro nō possunt esse nisi due: que cōiungunt̄ in centro ꝛ vnā rectam lineam faciunt ꝫ ꝛc̄. Istud etiam p3 in circulis sphere materialis: nā tropico cancri nullū equedistātem circulum possibile est eē equalē nisi tropicū capricorni: ꝛ silr̄ de duob⁹ circulis. s. arctico ꝛ antarctico: qr circulo arctico nullus in sphera est eq̄lis nisi circul⁹ antarcticus. Quod autē inequales ꝛ in equedistantes possunt esse infiniti manifestū est ꝗuis in sphera materiali sint solū q̄nq3 equedistantes. Tertia pars p3 ex diffinitione poli: est em̄ polus punctus in superficie sphere a quo omnes linee recte ad ipsius circuli circumferētiam ꝓtracte sunt equales: nūc autem quēlibq3 paralellorum accipiatur in sphera constat quod omnes linee ducte a polo mundi ad eius circūferentiam sunt equales.

Quinta conclusio.

Circulorum se contingentium diuersos esse polos necesse est: eruntq3 amborum poli in vno circulo transeunte per locum contactus.

Prima pars p3 qm̄ circuli sese contingētes in oībus locis separant̄ nisi in puncto cōtingentie vel cōtactus: p3 in zodiaco ꝛ tropico q̄ tantū in puncto solsticiali se contingūt: accipio ꝫ polum minoris circuli puta polū mūdi q̄ est polus tropici: qr ab eo ꝓtracte linee ad tropicū sunt equales linee per poli diffinitionē: si igitur punctus iste sit polus zodiaci sequitur qd̄ linee ab eo ducte vsq3 ad zodiacū sunt equales: hoc autem apparet esse falsum ad sensum ꝛ facile erit deducere ad impossibile cōtradictionem:

vt patet ex nona ꝛ decima conclusionibus in capl'o de circulis allegato. Secunda pars ptz nã polus zodiaci est in eodem circulo cum polo mundi in circulo scz qui transit per locum contactus zodiaci ꝛ tropici: hic autem circulus est colurus solsticiorum: sicut patet in sphera materiali.

Sexta conclusio.

Si aliquem circulum maiorem in sphera circulus alius per æqualia diuiserit: ipsum quoqꝫ diuidentẽ de maioribus circulis esse necesse est: ꝙ si ortogonaliter & per æqualia scilicet ad angulos rectos diuiserit: vtriqꝫ per polos alterius transire conueniet.

Prima pars ptz si em̃ aliquis circulus aliquem maiorẽ circulum per eq̃lia diuiserit: opꝫ q̃ diuidat eum sup eius centrũ: cẽtrũ autẽ maioris circuli in sphera est centrũ sphere: quapropter opꝫ q̃ talis circulus diuidẽs transeat per centrũ sphere: ergo erit circulus maior in sphera per tertiam huius capli. Secũda pars ptz qm̃ si cũ hoc q̃ diuidit ipsum per equalia diuidat ipsum ad angulos rectos: cũ mutuo se diuidant ortogonaliter ꝛ per equalia: mutuo quoqꝫ per suos polos transibũt: sicut ptz de duobus coluris in sphera: ꝛ de alterutro colurorum ꝛ de equinoctiali circulo: ꝛ sic de aliis similibus. Ex hoc ptz q̃ in sphera transire per polos ꝛ secare ortogonaliter ꝛ diuidere per equalia coniunguntur necessario ꝛ vnum illorum alterũ antecedit ꝛ sequit̃: ꝛ hoc multum vlz ad noticiam ortus ꝛ occasus signorum in astronomia sicut alias declaraui. Conclusiones sequentes erunt de circulis quorum vnus est inclinatus super alium: illi sunt etiam de intersecantibus spheram.

Septima conclusio.

Omnis circulus maior secans circulos quoscũqꝫ æquedistantes in sphera: & inclinatus super ipsos: diuidit eos omnes in duas portiones inequales præter circulum maiorem qui eis æquedistabit. Et vnaqueqꝫ portionum apparentium: quæ sunt inter circulum maiorem ex æquedistantibꝰ & polum manifestum: semicirculo maior est. At vero quelibet earũ: quæ sunt inter eundem maiorem circulum & polum occultum: est semicirculo minor. Coalternæ vero portiones circulorum æquedistantium & æqualium adinuicem æquales sunt.

Istam ꝓpositionem theodosij breuiter expono in terminis ꝛ hoc sufficiet: maior circulus inclinatus est zodiacus vel orizon obliquus: equedistãtes circuli sũt circuli imaginati inter duos tropicos quorum maior est equinoctialis: quos om̃es secat zodiacus vel orizon obliquus in portiones inequales preter equinoctialem. Et portiones que sunt versus polum arcticum apparentes supra sunt maiores semicirculo: nõ apparentes sunt minores eo: portiones vero apparẽtes versus polum antarcticum sunt minores semicirculo: ꝛ non apparentes sunt maiores semicirculo: sed coalterne portiones circulorũ equalium hinc inde sunt equales: q: portio patens ex vna parte equinoctialis ꝛ portio latẽs ad aliam partem equinoctialis ad tantã distãtiam equales sunt. Et q: in sphera mũdi arcus isti sunt arcus dierum ꝛ noctiũ artificialiũ in diuersis tẽporibus: sequitur igitur q̃ dies ꝛ noctes in sunt equales. Et ex ista propositione poterunt patere ea que accidũt circa inequalitatẽ dierum ꝛ noctium in diuersis anni temporibus.

Octaua conclusio.

Cum in sphera duo circuli maiores se inuicem secant: si ab alterutra earum sectionum ex vtroqꝫ eorum duo arcus æquales adinuicem separentur: quos punctus sectionis cõmunis continuat: rectas lineas qui eorum extremitates continuant: oportet esse æquales.

Verbigratia: sint duo circuli maiores secantes se in sphera scz equinoctialis ꝛ zodiacus: puncta vero sectionum sint puncta equinoctialia: accipiam tunc alterũ punctũ duarũ sectionum puta pũctũ arietis ꝛ sit a: ꝛ accipiam duos arcus equales in zodiaco cõterminatos ad a puta signũ piscĩũ ꝛ signũ arietis: ꝛ accipiam in equinoctiali duos arcus equales copulatos ad. a. ꝛ sint. b. a. ꝛ. c. a. ꝛ. b. a. correspõdeat signo piscium. a. c. signo arietis: tunc dico ꝙ si ducatur vna recta linea a principio piscium ad. b. ꝛ alia a fine arietis ad. c. dico ꝙ iste due linee recte sunt inter se equales. Fundatur ista demonstratio in secunda conclusione capli de lineis: ꝛ in tertia petitione de mẽsura angulorum i pmo lib. hutꝰ. Ex isto apparet ꝙ tanta est declinatio solis in signis australibus q̃ta est in septẽtrionalibus: ꝛ cũ sol est in fine arietis tanto declinat q̃to in principio piscium: ꝛ sic de aliis.

Nona conclusio.

Circulus maior in sphera si super alium circulum maiorem fuerit inclinat⁹: fuerintq̧ ex vna qualibet quarta circuli inclinati (cuius principium sit alterutrū punctorū duarū sectionum) duo arcus separati æquales cōtinui: arcus circulorum maiorū a polo alterius per extremitates horum duorum arcuum in ipsius circūferētiam cadētes: ex ipsa circūferētia arcus inequales abscindūt: quorum ille est maior qui erit ab eorum sectione cōmuni remotior.

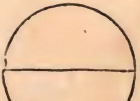
Verbigratia: zodiacus inclinatur sup equinoctialem maior circulus in sphera super alium maiorē: de zodiaco accipio vnam quartā illam scz que est a principio arietis vsq̧ in finem geminorū: ꝛ ex hac quarta volo separare duos arcus equales cōtinuos: ꝛ sint duo signa aries ꝛ taurus: volo tunc quod descendant tres arcus circulorū maiorum a polo mūdi: qui est polus equinoctialis: per tria pūcta illorum arcuum: scz per primū punctum arietis: ꝛ per primū punctum tauri: ꝛ per primū pūctum geminorum vsq̧ ad equinoctialem circulū: isti tres arcus sic descēdētes a polo mūdi in equinoctialem ꝑ tria puncta predicta abscindentes equales arcus ď zodiaco: abscindūt iū ab equinoctiali arcus inēq̄les: quorum ille est maior qui est a cōmuni sectione. i. a puncto arietis remotior. Ex quo pꝫ quod arcus equinoctialis qui abscinditur cū tauro est maior arcu equinoctialis q̄ abscinditur cū ariete: similiter arcus qui abscinditur cū geminis: maior est eo qui abscinditur cū tauro. Huius rei demōstratio pendet ex illa ꝓpositione Euclidis in primo libro: scz ꝙ eadem basis vel equalis maiori angulo opponitur in lineis breuiorib⁹ q̄ꝫ in longioribus: nā signum tauri ꝓpinquius est polo q̄ꝫ aries: ad maiorem vero angulum in polo mūdi sequitur maior arcus in circulo equinoctiali. Et hec est ratio quare signa cū equalia sint: tamē inequales habēt ascensiones: q: equales arcus de equinoctiali circulo habent necessario equales ascensiones: q: motus celi est super eius polos ꝛ est equalis ꝛ vniformis: hinc aūt est ꝙ cum equali arcu de zodiaco oritur quādoq̧ plus quādoq̧ minus de eq̄noctiali circulo sicut cōuincitur per hanc cōclusionem euidenter: si tamē vera sit opinio que distinguit ascensiones ꝛ duodecim domos celi per circulos a polo mundi venientes: ꝛ nō potius illa que predictos circulos ꝓtrahit a cōmuni intersectione orizontis ꝛ meridiani.

Quarti libri & totius compendii geometriæ finis.

Libellus de quadratura circuli editus

a quodam Religioso ordinis Fratrum minorum: quo intendit circulum quadrare quo ad lineam: & inuenire quadratum isoperimetrū circulo: licet area q̄drati sit minor area circuli.

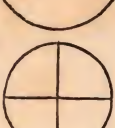
ARISTOTELES in eo qui de cathegoriis libro inscribitur dicit: quadratura quidē circuli scibilis est: scientia autē eius nōdum inuenta est. Et impleris q̧ locis repræhēdit multos & magnos qui hoc demōstrare conantes enormiter errauerunt. Hic vero quadratura circuli demonstratur: & primo præmittuntur. 4. conclusiones & ꝓbantur: secundo ex his inducitur & concluditur quinta principaliter intenta.



Prima conclusio.

Lineam orbiculariter ductam bina diametro in quattuor æqualia seccare.

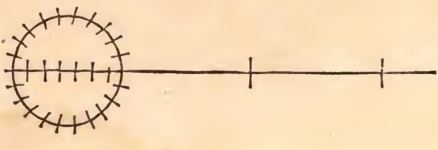
Diameter est linea recta ab extremo in extremum per cētrum ducta diuidens figuram in duas partes equales: vt pꝫ hic in ꝑma figura. Si vero due sint diametri sese intersecātes in centro ad angulos equales: diuidunt figurā in quattuor partes: vt hic pꝫ per secūdā figuram. Dicitur aūt diameter a dia qđ est duo ꝛ metros quod est mensura: quasi duorum mensura: scz duarum medietatum.



Secunda conclusio.

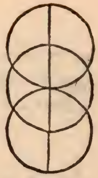
Lineæ orbiculariter ductæ lineam rectam æqualem dare.

Juxta mathematicorū sententiam ꝛ phisicā veritatem circulus diuiditur in. 22. partes: quarum vna remota scz vigesimasecūda parte: tertia pars summe remanētis est diameter circuli: scz septenarius siue septem: tripletur igitur diameter ꝛ addatur septima diametri pars ordinenturq̧ partes huius inrecto ꝛ hēbitur linea recta equalis circulari linee: vt hic liquidum est videre.



Tertia conclusio.

Lineam rectam in quattuor æqualia secare.



Qđ sic pʒ: fiat circulus vnus deinde circino nō restricto nec ampliato sed stāte vniformiter vt prius: ponatur pes circini in circūferētia ⁊ ducat̄ vt secūdus circulus cōstituatur: qui in duob⁹ locis inter secet p̄mū ⁊ intersecet̄ ab eo trāsiens ꝑ centrū p̄mi: de hinc ducat̄ linea recta ꝑ ambo cētra ab extremo in extremū vtriusqꝫ circuli: ⁊ vbi terminabit̄ hec linea in circūferētia secundi circuli ponat̄ iterū pes circini sub dispositione priori: ⁊ ducat̄ vt tertius circulus cōstituatur q̄ in duob⁹ locis intersecet secūdū ⁊ intersecetur ab eo cōtingēs p̄mū ⁊ centrū secundi: trahaturqꝫ predicta linea recta vsqꝫ ad circūferētiam tertij circuli: vt pʒ in figura presenti. Predicta igit̄ linea recta trāsiens ꝑ tria cētra ab extremo p̄mi circuli ad extremū tertij diuiditur in q̄tuor partes eq̄les: nā qualibet due partes predicte linee sunt in eodē circulo a cētro ad circūferētiā ducte: ergo sunt equales: ⁊ q̄m quecūqꝫ vni ⁊ eidē sunt equalia ipsa inter se sunt eq̄lia: ergo q̄libet pars linee in vno predictorū circulorū cōtenta est eq̄lis cuilibet alij parti linee in alio circulo cōtente. Idē pōt fieri alio modo: fiat circul⁹ vnus deinde pede circini nō diuersificati posito in circūferētia eiusdē circuli reliquus autē pes ipsius circini nō variati protendat̄ extra circulū supradictū: ibiqꝫ fixo cētro ducatur vt secūdus circulus cōstituatur cōtingēs p̄mum in puncto: positoqꝫ in puncto cōtingētie pede circini nō mutati ducatur alius pes circini vt tertius circulus cōstituatur inuicē secans duos predictos circulos transiens ꝑ eorū cētra: tunc trahatur linea recta ꝑ tria cētra q̄ secatur in .4. ptes eq̄les vt manifestū ē: nā q̄lʒ due ptes ⁊c̄. vt supra.

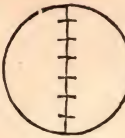
Quarta conclusio.

Ex quattuor rectis lineis æqualibus quadratum constituere.

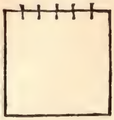
Hoc quidē manifestū est: ⁊ nihilominus pōt demōstrari sic: sint due linee recte sese in capite cōtingentes ex quarū cōtactu cōstituatur vnicus angulus rectus: deinde ponatur pes circini in cōtactu ipsarū linearū: reliquus vero pes in capite alterius linearū predictarū: ducaturqꝫ vsqꝫ ad caput alteri⁹ linee: nec circulus cōpleatur sed cōplet⁹ intelligatur: sicut pʒ in hac figura. Deinde ponatur pes circini nō variati in capite alterius linearū predictaꝝ v̄sus circūferentiā: que scʒ due linee supradicte sunt due semidiametri circuli prelibati: alter vero pes ponatur in cētro predicti circuli ⁊ ducatur cōstituēs circulū intersecantē predictū ⁊ se ꝑ illum in vno loco vsqꝫ ad locū ad quē ducta de cētro linea recta cōstituit angulū rectum cū semediametro circuli p̄mi: q̄ terminatur in cētro huius secūdi: vt pʒ in hac figura. Post hec ponatur pes circini nō diuersificati in capite alterius semidiametri p̄mi circuli versus circunferētia: reliquus vero pes ponatur in cētro eiusdē circuli p̄mi ⁊ ducatur vsqꝫ ad locū vbi terminatur linea ducta a cētro secūdi cōstituens circulū intersecātem primum ⁊ se ꝑ illum in vno loco: ⁊ tunc linea recta trahatur de cētro huius tertij vsqꝫ ad caput linee ꝓcedentis de cētro scđi: vt pʒ in hac figura. Deinde ponatur pes circini nō mutati in capite linee ꝓcedentis de cētro secundi circuli ad circunferētiam: alter autē pes ponatur in cētro tertij ⁊ ducatur vsqꝫ ad cētrū scđi cōstituens circulū intersecantē ipsos: scʒ p̄mum ⁊ scđm quenlibet in loco vno ⁊ se per illos: vt in hac figura plenius declaratur. Quattuor igit̄ linee recte in predictis quattuor circulis cōtente cōstituunt q̄dratum eq̄laterū: sunt enī equales sibi inuicem oēs: nā quelibet due sunt in eodē circulo ⁊c̄. vt prius: ⁊ nota quod ideo nō cōplentur actu dicti circuli: q2 cōpleti actu tollerēt euidētem sensibilitatē quadrati sub eis constituti.

Quinta conclusio.

Rem nouā mirabilē quadraturā circuli: velut inscrutabilē adpud doctores populi: olim scibilē puri cernūt oculi: vere demonstrabilem nūc in fine seculi.



Oīs figura plana vnica linea orbiculariter ducta cōtēta: cuius diameter transcendit precise quartam eiusdē figure semi partib⁹ tribus: est equalis quadrato cuius latus eiusdē circuli diameter transcēdit precise semipartib⁹ tribus: oīs circulus est figura plana ⁊c̄. ergo oīs circulus est equalis quadrato cui⁹ latus eiusdē circuli diameter trāscendit precise semipartib⁹ tribus. Maior sic pʒ quecūqꝫ ab eodē superātur equaliter inter se sunt equalia: si enī tetracubitū aureum ⁊ tetracubitum argenteum a pentacubito ligneo equaliter superātur q2 in vno cubito: ergo tetracubitum aureum ⁊ argētеum necessario equabuntur: q2 igit̄ quelibet quarta circuli ⁊ quodlibet lat⁹ huius quadrati a diametro circuli eq̄liter superātur .s. in semipartibus trib⁹: igit̄ quelibet q̄rta circuli ⁊ quodlibet latus q̄drati hmōi necessario sunt equales: ⁊ sic circulus ⁊ q̄drat⁹ hmōi sunt eq̄les: nā quorumcūqꝫ oēs ptes sibi inter se sunt eq̄les ⁊ ipsa iter se sūt equalia: minor ꝓpositio etiā vera est: vt apparet ex his q̄ dicta sunt in scđa cōclusione: si enī scđm q̄ plerīqꝫ mathematici scripserūt iuxta phisicā veritēat circulus diuidatur in .22. ptes remota vna parte: scʒ vigesimascđa: tertia remanentis scʒ septē est diameter circuli ⁊ q̄rta circuli cōtinet qnqꝫ ptes ⁊ dimidiū vnius: nā q̄rta .22. partiū est qnqꝫ cū dimidio siue qnqꝫ partes ⁊ dimidiū vnius partis: diameter ergo circuli scʒ septē trāscēdit precise quartā circuli scʒ qnqꝫ partes eius ⁊ dimidium in semipartibus trib⁹ .i. in trib⁹ dimidijs partib⁹ circuli. Premissis ergo ꝓpositionib⁹ vniuersalib⁹ veris recte dispositis in p̄mo modo p̄me figure sequitur necessario v̄lis cōclusio vera: scʒ q̄ oīs circulus est equalis quadrato cuius lat⁹ eiusdē circuli diameter trāscendit precise in trib⁹ semipartibus. Sensibilis aūt huius rei euidētia ⁊ facilis intelligētia fiet hoc modo: cōstituatur circulus cuius vis magni-



tudinis: eiusdem diameter diuidatur in septē partes equales p doctrinā datam ī tertia cōclusione: deinde cōstituat quadratum equilaterū p artē quarte cōclusionis: cuius quadrati latus precise cōtineat quinque partes ⁊ dimidiam diametri supradicte: sicque premissis oibus perspectisque diligenter: ⁊ intellectis prudenter: cognoscet indubitāter qm̄ hic circulus est equalis huic quadrato: ⁊ talis ⁊ tantus circulus est qualis ⁊ q̄tus est quadratus: sicut ex premissis est manifestū: patz etiā p sensum in hac figura.

Additio. Iste bonus religiosus erat auditor tātū ⁊ nō doctor in geometria: vt discursus ei⁹ nimis falsigrafus ostendit: q totus fundat in scda cōclusione que falsa est: vt pote includēs oppositum pme petitionis q̄tum ad secundā partē eius: q̄ hz q inter quelibet duo puncta linea recta est breuissima oium aliarum. Scda vo hec conclusio supponit q inter eadē duo puncta linea curua ⁊ linea recta sint equales: nā diuidit p circinū circumferētiam circuli in. 22. partes equales: deinde eodē circino nō variato numerat in rectā totidē partes: inferens q illa linea recta ⁊ illa curua sint equales: qz equali numero mēsurant ab eodem circino nō variato: qd tamē fłm est qz quelibet talis mensura circini plus accipit de linea curua q̄ de recta: g in eodē numero mēsurarū circini linea curua erit maior linea recta: quare suus discursus potius ē sillogismus ignorātie q̄ scientie: qz pcedit ex oppositis pncipiorum geometrie: eundē etiam defectū habuit demōstratio archimedis supius in fine tertii libri posita: sz differūt qz alter eorum vult q̄drare circulū q ad supficiē: alt q ad lineā: nā vtrūque sit īpossibile ē ex epso ō ysogimetria.

Alius libellus de quadratura circuli quē ædidit nostra hac ætate Carolus Bouillus natione gallus: quo intendit circuli aream quadrare cū archimedæ: sed putat nihilominus se lineam curuam circuli in rectam conuertere: & ī ne phemio sic habet.

Prima conclusio.

SI RECTA linea nullo suorum pūctorum fixo: tota in plano æq̄liter moueat: necessariæ suo motu paralellogrāmū describit.

Dicitur autem tunc linea equaliter moueri quando neque ad dextrā neque ad sinistram in suo motu declinat.

Secunda conclusio.

Quod si vt prius recta linea mota secundū sui ipsius q̄titatē feratur: ducitur in se ipsam: eritque descript⁹ eius quadratus.

Nam linea recta si non in seipsam: sed in aliam equaliter ducatur: pducet tetragonismum id est quadrangulum altera parte longiorem.

Tertia conclusio.

Si recta linea altero suorum extremorū fixo moueatur: circulum aut circuli portionem eodem motu describit.

Cuius circumferentiam sua latione reliquum extremum producit.

Quarta conclusio.

Quod si recta linea hoc pacto circa alterum suorum extremorū mota: vnius recti anguli spacio circūducat: quartā circuli partē quadrātemue describet: si vero duorū rectorū spacium cōficiat: semicirculum. si trium: tres circuli quadrantes: si denique totum circa punctum spacium (quod quattuor rectis est æquale) perfectum circulum suo motu absoluet.

Has quattuor ppositiones de quadrati ⁊ circuli descriptionibus pdocte supponēdas putauit in hac questione: neque earum pbationes apposuit: qz notissime sunt ⁊ puulgate apud doctos geometras.

Quinta conclusio.

Recta linea alteri suorum extremorum fixo qualitercūque circunducta: quod ex ea in rectam lineam: arcui reuolutionis æqualem: ducta producitur: duplum est ei quod ex eius reuolutione fit.

Hec supponit qd infra cōclusione. 21. pbandum asseritur. s. cuilibet linee curue: que est circumferētia circuli vel pars eius: rectā lineam equalē dare: illo g supposito: loquitur hic de paralellogramo ⁊ circulo a talibus lineis descriptis q se habent in dupla ⁊ sub dupla pportione: q̄tum ad superficies suas siue accipiat totus circulus siue pars eius: itaque eadē linea ducta in rectū p aliā duplā supficiem

includit ad eam quã ducta ingirum includeret: sed hoc etiã eget probatione que tamen nõ ponit hic.

Sexta conclusio.

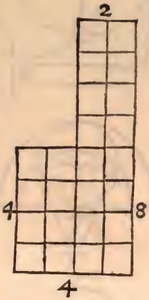
Vnde manifestum est quicquid fit ex circuli semidiametro in medietatẽ circunferentiæ: siue in lineam rectam medietati circunferentiæ æqualem: esse paralellogramum qui dato circulo necessario est æqualis.

Hec correlarie sequitur ex precedente: sed cõsequentia est ineuidens nec ꝓbatur. s. ꝙ eadem linea ducta in duas alias habẽtes se in dupla ꝓportione ꝓducat superficies habẽtes se etiã in dupla ꝓportione: vnde hec includẽs inèuidentiam precedentis est ineuidentior ea: cum tamen sit principium ꝓximum ad conclusionem de quadratura circuli intenta.

Septima conclusio.

Rursus paralellogramus ex ductu quarte partis diametri dati circuli in totam circunferẽtiam: aut quarte partis circũferentiæ in totam diametrum factus: eidem circulo est æqualis: qui vero fit ex ductu totius diametri in medietatẽ circunferentiæ: aut totius circunferentiæ in semidiametrum: circulo eidem est duplus: qui autem ex tota diametro in totam circunferentiam aut econtra: necessario eidem circulo quadruplus esse comprobatur.

Hec eodem modo sicut precedẽs se habet ad quintã: et consimiliter oẽs iste tres se habent ad cõclusionẽ hic principaliter intentã de quadradura circuli: qr ꝓxime ad ipsam antecedũt: et sumpte sunt ab archimede qui eas nunq̃ demonstratiue ꝓbare potuit: q̃uis in geometria practica sint vtiles ad opera artificum qui errorem aliquem insensibilem admittunt.



Octaua conclusio.

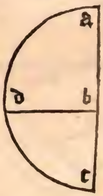
Si dati paralellogrami nõ quadrati inequaliũ laterũ mediũ ꝓportionale sumat: erit quod ex eo in se ducto fit quadratũ dicto paralellogramo æquale.

Hanc in tertio libro nr̃e arithmetice demonstratione probauimus: et in numeris habet euidentiam.

Nona conclusio.

Datis duabus lineis rectis inequalibus si simul addantur: atq; super totam ex vtrisq; coniũctam semicirculo descripto: & rursus a puncto cõmunis additionis vtriusq; recta perpendiculari ad circũferentiam extensa: erit huiusmodi perpendicularis inter propositas lineas media proportionalis.

Hanc euclides in sexto sue geometrie optime demonstrat et ponitur hic in fulcimentum precedentis.



Decima conclusio.

Circulus sup lineã rectã aut planã supficiẽ cõsistẽs: eandẽ i solo pũcto cõtigit.

Demonstrationem huius in scd̃o libro nostre geometrie caplo de circulis: et in quarto libro caplo de sphera posuimus: ponitur tamẽ hic vt fundamentũ sequentium: et potest habere duos sensus: vz de re indiuisibili: et de parte inadequata que tangit non primo.

Vndecima conclusio.

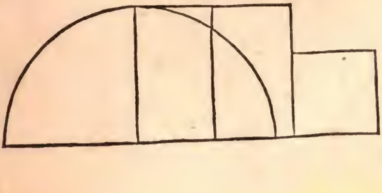
Si circulus super planam superficiem æqualiter in rectum moueatur: secundum rectam lineam procedet: q̃ suo motu eius circunferentia describet eidẽ circunferentiæ æqualem.

Prima pars ex terio nota est qr si mouetur in rectũ: ḡ secundum lineam rectam quã suo motu describit imaginarie. Sed pars secunda que est principalis neruus q̃drature circuli non demonstrat: neq; ex precedentibus sequitur manifeste: neq; ex sequentibus cõclusionibus elucidat: neq; ex terio est per se nota: nõ eñ est necessariũ si hec linea suo motu describit illã ꝙ sit ei equalis: sed hoc in multis fallit: et si limitetur hec regula de vna reuolutione precisa vt infra conclusione. 19. ad huc consequentia est satis dubia et eget probatione scientifica.

Duodecima conclusio.

Circulus sup rectã lineam æqualiter latus inter duas æquidistãtes mouet: cuius centrũ etiam rectã lineam mediam describit vtriusq; lateralium paralellã.

Licet hec non probetur ab auctore: tamen ex prima parte precedentis clarissime sequitur: et facile ab



omnibus concederetur vt rationi consentanea.

Tertiadecima conclusio.

Circulo æqualiter super rectam lineam delato: quodlibet eius punctū (præter centrum) ad lineam motui subiectam secundū circuli archum (quadrante minorē) deprimitur: aut ab ea sursum æleuatur: solum vero centrū (quod nusq̄ a medio discedit: nec æleuatur aut deprimitur) nullum suo motu describit archum sed lineam rectam.

Potest hec etiam similiter cōcedi vt pcedēs: cuius tñ pars pma infra cōclusionibus.19.et.20.declarabit.

Quartadecima conclusio.

Circuli æqualiter super lineam rectam delati: nullum punctum præter centrum rectam suo motu describit lineam.

Correlariū est pcedētis appertissimū: et fere nulla erat necessitas ipsum extra cōclusionem explicādi.

Quintadecima conclusio.

Si circulus sup rectā lineā cōsistēs: a pūcto cōtactus æqualiter super eam moueat: quousq̄ eundē iterū in eodē sui puncto cōtingat: erit recta linea vtriusq̄ mutuorum contactuum punctis intercepta toti eius circunferentiæ æqualis: inquā eodem motu ducit dati circuli diameter & paralellogramum describit.

Secūda pars facilis est: et ab Euclide in suo secūdo cōcessa: pma tamē huius pars est dubia et inuidens sicut vndecima cōclusio: neq̄ pbatur illarū duarum linearū recte.s. et curue equalitas sufficienter ex illa rotatione circuli sup planū: tum q: illa pbatio est sensualis et grossa cōpossibilis errori imperceptibili: tum q: si decima huius cōclusio ad pmū sensum accipiat de cōtactu in re indiuisibili: nō possunt esse duo cōtactus circuli ad lineam rectā imediat ne detur linea ex punctis indiuisibilib9 cōposita: q̄ per illam rotationē circuli super planum circulus nō cōtinue tangct lineam rectā sed discrete: relinquet igitur multas partes interceptas cōtactibus quas non tangēdo nō adequabit eis: tum deniq̄ q: si ad secundū sensum accipiat cōtactus: nulla erit pars circuli q̄tumcūq̄ detur parua: q̄ possit comēsurari vel adequari alicui parti linee recte: q: nunq̄ hec tota pmo tāget illā totam q: curue partis extrema nō tangit rectā: alias esset tota illa pars recta et nō curua qd est contra suppositum: lz q̄ sensuales artifices putēt q̄ iste due partes scdm se totas se tangāt: q: ita apparet ad sensum: sapientis tamen geometri ratio verius discernit theorice de his rebus agens et errorem cognoscens.

Sextadecima conclusio.

Quo fit vt si linea recta (quā perfecta reuolutione tota circunferentia absoluit) in eius diametrū ducat: nasceť inde paralellogramus dato circulo quadruplus: quem tamen totum vt dicimus idem circulus suo motu pertransit.

Prima pars huius inuidens ex.7.et.15.conclusionibus inuidentibus euidenter sequit. Secūda vero parum differt a secūda parte precedentis: hoc solo addito q̄ in toto illo motu due medietates circuli hinc et inde extra paralellogramum remanent.

Decimaseptima conclusio.

Dimidia circuli super rectā lineam reuolutio spacium absoluit eidem circulo duplum: qui est paralellogramus ex ductu rectæ lineæ dimidiæ eius circunferedtiæ æqualis: in ipsius diametrum productus.

Decimaoctaua conclusio.

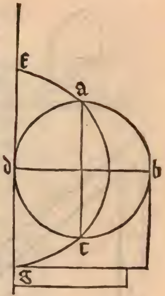
Circuli secundum quartā partem suæ circunferētiæ super rectam lineam reuolutio spacium pertransit dato circulo æquale: qui est paralelellogramus ex ductu diametri in lineam rectā q̄rte parti suæ circunferētiæ æqualē pductus.

He tres conclusiones tum ex.15.tum ex.5.6.7.superioribus sequuntur: ex quarum inuidētia ipse quoq̄ sunt inuidentes: propter deffectum probationis notatum in quintadecima huius.

Decimanona conclusio.

Punctum reuolutionis quartæ partis circunferentiæ circuli super rectam lineam in eadem linea inuenire.

Hanc p̄mo demōstrat auctor in toto hoc libello: sed ea cū sua ꝓbatione cōcessa: nō cōficitur eas lineas esse equales. s. ⁊ curuā que reuolutꝰ ⁊ rectā sup quā reuoluitur vsq ad illud punctum. Demōstratio sua hec est: facto circulo. a. b. c. cōtingēte lineam rectā. f. g. in puncto. d. diuidatur inquadrātes p duas diametros sese orthogonaliter secātes incētro circuli qd sit. e. itaq diameter. a. e. c. procedat a dextera in leuā: ⁊ diameter. b. e. d. a sūmo vsq deorsum: ⁊ hec augmētetur vltra punctū. d. extra circulum crescatq secundū quartā eius partem precise vsq ad punctū. h. sit ḡ punctus iste. h. centrū alterius circuli maioris cuius periferia transeat per. a. c. extrema alterius diametri: pueniatq ex vtraq parte ad lineam rectā contingētem circulum: ⁊ tangat eam in punctis. f. g. nec vltra ꝓcedat hec periferia q: hoc sufficit. Dicit ḡ puncta. f. g. esse terios reuolutionis quarte partis circuli sup lineam rectā: itaq punctus. a. secundū archum. f. a. eleuatꝰ a recta: ⁊ pūctus. c. secundū archū. c. g. deprimitur ad eam nusq ab eis declinādo: hoc inquā concesso nō sequitur euidenter supradictas portiones linearū esse equales scz. a. d. ⁊. f. d. vel. c. d. ⁊. d. g. quod tamen demonstrare erat hic summe necessarium.



Vigesima conclusio.

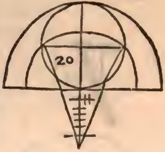
Eodē modo punctum reuolutionis mediæ circunferentiæ super rectam lineam in eadem assignare: quare etiam prōptum erit & trium quartarū circuli: & totius circunferentiæ reuolutionis puncta in recta linea notare.

Ex eadē demonstratione procedit hec conclusio cū precedente: q: prolongando semper diametrū per additionem continuam suarū quartarum: ⁊ describendo super centra illa cōtinue maiores circulos: ⁊ tandem applicando eos vsq ad lineam rectam: notabunt in ea puncta dictarum reuolutionum: sed his vt diximus concessis nondum exploratum erit supradictas portiones linearum recte ⁊ curue esse equales: sed hoc semper manet dubium in hoc discursu.

Vigesimaprima conclusio.

Date circūferētiæ toti: aut mediæ eiꝰ parti: aut q̄rtæ: rectā æqualē assignare.

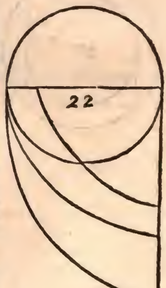
Hanc ex predictis dicit esse conclusam: sed certe quicqd sit de ꝯña antecedēs est dubium: quare sua argumētatio nō est demonstratio: ⁊ re vera tota vis scientie q̄drature circuli stat in hac ꝓpositione siue debeat quadrari circulus q̄tum ad lineam siue q̄tum ad superficiem: q: si quis demonstratiue sciret quāta linea recta correspondet linee circulari date: facile esset illā per tres circulos in quattuor partes equales diuidere: ⁊ inde quadratum circulo isoperimetrū facere: itē facile esset figuram rectilineam equalis capacitatis cū circulo inuenire ⁊ illam deniq quadrare: qd esset quadratum equalem circulo dare. Sed neq archimedes neq aliorum quispiam post eum hac propositionem hactenus nobis demonstrauit: sed solum grossis ⁊ sensualibus persuasitionibus probabilem fecit.



Vigesimasecunda conclusio.

Dati circuli diameter medietate circūferētiæ minor est: & q̄rta eiꝰ pte maior.

Hec euidenter sequitur ex tribus precedētibus: nā supposita earum ineuidentia pro vera scientia scz q illle linee sibi illis modis correspondentes sint equales: cōstat diametrum circuli maiorem eē q̄rta eius parte: que nō habet nisi quinq octauas eiusdem diametri: ⁊ minorem esse semicirculo qui habet decem tales octauas: diameter vero precise octo: erit ergo diameter circuli hac imaginatione supposita paulo minor tertia circuli ⁊ paulo maior quarta eius parte. Negat ḡ iste regulā cōem geometrie practice q̄ alter libellus cōcedebat. s. q circumferentia se habet ad diametrum sicut. 22. ad. 7. sed dicit iste q se habet sicut. 20. ad. 8.



Vigesimatertia conclusio.

Vnde quod fit ex tota circuli diametro in quartam circunferentiæ partē: aut mediam: aut totā circunferentiam: est paralelogramus nō quadratus: quorū primus est circulo æqualis: secundus eidem duplus: tertius vero quadruplus.

Prima huius pars ex predicta cōclusione ineuidēte euidēter sequitur: q: illā duo latera tetragonisimi semper sunt inequalia. Scda pars cū oibus premissis ad hoc antecedentibus est penitꝰ ineuidēs: q̄re ⁊ conclusio sequens que erat pncipaliter intēta in hoc libello non demonstratiue probatur cum ait.

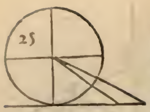
Vigesimaquarta conclusio.

Ex his dato quocūq circulo: facile est eidem æqualem assignare quadratū.

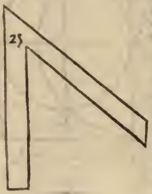
Tota ḡ hec ꝓbatio nō geometrica sed phisica est ex sensuali opatione materialiū artificū depēdens: q in suis regulis fere semp errāt a vera rōne geometrica: q: tū nō ē error sensibilis non currāt de eo sed pro vero accipiūt: q: hoc sufficit ad rectas artis sue opationes: q aūt tales sint ꝓbatiōes hic adducte a carolo ⁊ sumpte ab archimede: sequētes cōclusiones ostēdūt ad solā geometriam practicā ptinētes.

Vigesimaquinta conclusio.

Angulum omnibus quadrandis circulis vtilem inuestigare.



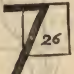
Iste angulus est quoddã instrumentũ artificum ligneũ aut ferreũ habens duos pedes inequales ad ad angulũ cõcurrentes instar duorũ laterũ trianguli gradati. Inuẽtio ⁊ formatio dicti anguli ex. 19. huius pẽdet: ducatur inquit Carolus linea recta a cẽtro circuli. e. ad punctũ. g. in linea cõtingente circulũ: qui punctus erat terĩus reuolutionis quarte partis circuli: hec itaq linea. e. g. facit angulũ acutũ cũ semidiametro. e. d. sup cẽtro circuli: ecce duos pedes anguli quorũ maior ex. 22. est. e. g. minor e. d. Iste ḡ angulus intercipit ex linea. f. g. cõtingente circulũ partẽ equalẽ quarte circũferẽtie: equalẽ dico sine errore sensibili qd̃ sufficit artifici: deinde qꝛ ex. 23. huius diameter circuli ductus in predictã partẽ linee recte cõficit q̃drãgulũ altera parte longiorẽ equalẽ circulo q̃tum ad aream: ⁊ ex. 8. ac. 9. huius inter diametrũ circuli ac dictã lineam alia media ꝓportionalis quadrat tetragonismũ predictum: ideo ab eodẽ centro circuli. e. vsq ad punctũ linee medie qd̃ sit. k. ducenda est alia recta faciens cũ eodẽ semidiametro alium angulũ acutum minorẽ priore: qui similiter ex linea contingẽte circulũ intercipit partẽ equalẽ lateri quadrati equalis circulo. Si ḡ ex ligno aut ere aut calibe fiat instrumentũ bipes angulare: habẽs in pte exteriore angulũ maiorẽ predictorũ ⁊ in parte interiore angulũ minorẽ eorũ: tale inquã instrumẽtũ erit vtile ad eliciendũ ex circulo quadratum sibi equalẽ: vt pꝫ ex dictis.



Vigesimasexta conclusio.

Dato cuicumq quadrato circulum æqualem assignare.

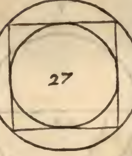
Hec est cõuersa precedẽtis que eiusdẽ instrumẽti officio qd̃ ꝓmittit artificialiter implet: applicato enĩ instrumẽto ad latera quadrati: circuli sibi equalis semidiameter facile inuenietur: hoc modo: angulꝰ exterior cũ pede breuiore instrumẽti adaptet̃ dicte vni coste quadrati. a. b. c. d. sic ꝙ in costa. a. b. hinc inde moueat̃ donec alter pes lõgior instrumẽti precise tãgat angulũ oppositũ q̃drati. s. angulũ. c. tunc fixo instrumẽto sup costã ab: in loco anguli signet̃ pũctꝰ. h. dico ꝙ pars illius coste. h. a. erit semidiameter circuli quesiti q̃ erit q̃drato eq̃lis: nã ex. 22. semediameter circuli ẽ minor latere q̃drati eq̃lis: ⁊ ex precedẽte inter pedes instrumẽti sub angulo interiore cõtinet̃ costa quadrati eq̃lis circulo ḡ ⁊c.



Vigesimaseptima conclusio.

Datum circulum in duos æquales circulos diuidere.

Hoc duobus modis fieri docet carolus. Primo inuentũ quadratũ circulo equalẽ in duos altera parte lõgiores p medium diuidendo: ⁊ quẽlibet eorũ primo in quadratũ deinde in circulũ conuertendo ex predictis: nã quilibet illorũ circulorũ minorũ erit maioris circuli medietas: sicut q̃libet illorũ quadratorũ minorũ erat maioris quadrati medietas. Et si vnus minorũ circulorũ super cẽtro maioris intra ipsum describat̃: erit circulus maior in duas medietates diuisus: quarum altera erit alteri circumscripta: hac eadem vis possent duo circuli ad seipsos addi queadmodũ in scd̃o libro nostre geometrie duos quadratos in vnũ conuertere docuimus. Idem aliter ⁊ sine quadratura circuli docet: inscribat̃ inquit dato circulo quadratus: eidemq quadrato rursus circulus alter inscribatur: hic prioris circuli medietas erit: nã perinde atq quadratus circulo inscriptus alterius quadrati circulum includẽtis medietas est: ita ecõtrario circulus ois quadrato inscriptus alterius circuli quadratũ includẽtis medietas erit. Hactenus libellus caroli de quadratura circuli ⁊ vice versa de circulatera quadrati. Cui etiam alium p similẽ libellũ addit de cubicatione sphere: ⁊ ecõtra de sphericitate cubi. s. ꝓportionaliter cõparando supficiem rotundã plane: sicut lineam circularẽ recte. Sed hec missa faciamus vbi geometriam speculatiuã dũtaxat tradere intẽdimus: nã talia ad geometriam practicã pertinent: que vt diximus cũ sit grossa ⁊ sensualis multos errores insensibiles nõ aduertit nec curat de eis: sic enĩ artifices fabriles costam quadrati diametro eius adaptãt sicut q̃nq ad septẽ facientes in eis proportionẽ rationalẽ: quod theorici geometre impossibile reputant vt in nostre geometrie libro tertio demõstrauimus: nimirũ ḡ si iidem practici predictis modis lineam curuã in rectã: ⁊ supficiem rotundã in planam cõuertant cũ aliquali errore: lꝫ insensibili. Est autẽ mea opinio ꝙ linea recta ⁊ curua cũ sint diuersarũ rationũ in genere q̃titatis vel qualitatis: nõ plus sint adinuicẽ cõparabiles q̃ angulus rectilineus ⁊ curuilineus aut mixtus: de quibus in scd̃o libro nostre geometrie in caplo de circulis diximus ꝙ nullo modo sint adequabiles: imo forte neq in sua inequalitate cõparabiles: quare sicut tpe Aristotelis ita ⁊ nostra etate q̃dratura circuli scibilis est nondũ tñ scia eiꝰ inuenta est: neq repperibilis erit dõnec certa proportio linee curue ad rectam demonstratiue probetur: qꝛ vt diximus in. 21. conclusione huius: ex illa demõstratione pendet tota circuli quadratura ⁊ quadrati circulatura siue ex parte linearum siue ex parte superficierum.



Totius geometriæ quadripartitæ & quadraturæ finis.

Petri Ciruelli Darocen̄. in perspectiuā cōem questiuncula præuia de sana intelligentia radiorum visualium.

QVIA SCIENTIAE mathematicæ nō puræ sed mixtæ (q̄ partim phisicæ sunt) res naturales sub mathematicis imaginationib⁹ ptractāt: vocātes eas numeros lineas supficies angulos &c. ideo circa perspectiuā (quæ earum prima sese offert) querendū videtur p eius elucidatione: quæ nam res sint radii visuales de quib⁹ tam frequēter & cōtinue ipsa mētionē facit. Ad hāc questionē sine argumētis dicim⁹ prio q̄ sicut i scientiis pure mathematicis vocabula & termini earū sunt simplicis cognotationis ad vnū tantū prædicamētum Aristotelicū ptinentes: ita etiam in mathematicis mixtis proprii termini earū sunt mixte cognotationis ex duob⁹ aut plurib⁹ prædicamētis simplicibus cōpositæ: vnde nullus talis terius potest præcisæ ptinere ad aliquod vnū prædicamentū ab Aristotele traditum: sed ptinet ad plura simul prædicamēta: vel potius ad aliquod vnū prædicamētū mixtæ cognotationis: quod tamē ab Aristotele nō est traditū: sed est ab oībus doctis logicis necessario cōcedēdū. Ergo iste terius radius visualis & oēs alii ad perspectiuā pprie ptinentes vt incidētia radiosa: pyramis visibilis: linea incidentiæ: linea reflexionis: & sic de aliis multis: oēs sunt mixtæ cognotationis & sup geometricā significationē addunt phisicam cōsignificationē: nā quilibet eorū supponit p re naturali: & cognotat primo geometricæ ipsam esse extēsam habereq; partē extra partem localiter situatām: secundo cognotat phisicæ q̄ res illa sit luminosa vel colorata visui perceptibilis: hoc igit̄ modo se habēt isti duo termini linea & radius: silr isti duo linea perpēdicularis & cathecus: nā priores eorū sunt geometrici: posteriores vero pspectiui termini. Secūdo est aduertēdū q̄ circa modū visionis nr̄æ fuit antiqua illa discordia philosophorū: nā stoici & oēs fere alii ante Aristotelē opinati sunt visionē nostrā fieri p ministerium radiorū cuiusdā lucis quæ in nobis est: quos ab oculis emittimus vsq; ad res visibiles cōtingendas: dicebāt em̄ oculum nostrū esse velut laternā quādam quæ lumē abscōditū intra se cōseruat atq; exterius irradiat. Aristoteles vero & oēs peripatetici post eum tenēt q̄ sicut alii sensus exteriores cognoscūt sua obiecta ab eis aliquid intus suscipiendo & nihil extra se emittendo: sic etiam visus noster se habeat incognoscēdo visibilia: nō ergo emittit radios visuales ad res videndas: sed potius suscipit ab eis aliquid cōferens ad causandā visionem. Quid autē illud sit quod visus noster recipit ab obiecto: non cōformiter dicūt oēs peripatetici. Nā philosophi parisienses cōiter dicūt q̄ sicut a corpore luminoso cōtinue diffundit̄ lux p aerē vel quodlibet aliud medium trāsparēs: sic etiā a corpore colorato illuminato effundit̄ & multiplicat̄ similitudo sui coloris: quā etiam intentionē coloris vocāt: dicētes q̄ colores sunt solū intētionaliter in medio diaphano: hāc igit̄ lucis vel coloris effusionē vocāt isti radios visuales: nā cū radi⁹ p aerē ad oculum peruenit tangitq; organū visiuū (quod etiam est corpus diaphanū) facit nos videre rem illā cuius est talis effusio lucis aut coloris. Anglici vero oxonienses sicut negant radios visuales ab oculis emicātes contra antiquos philosophos: sic etiam negant illas similitudines aut intētiones colorū cōtra parisienses: sed dicunt ad visionē sufficere

Platonici. Peripatetici. Parisienses. Anglici.

præſentiam obiecti erga potẽtiam: quibus etiam videtur fauere illud Auguſtini dictum cõmune: ꝙ ex obiecto & potẽtia paritur noticia. Sed quicquid ſit de veritate iſtarũ opinionũ phiſicæ loquẽdo: perſpectiua noſtra indifferẽs eſt ad illas oẽs: quia vt diximus de rebus naturalibus ꝑ imaginationes geometricas diſputat: quæ vniformiter ad quãlibet opinionẽ applicari poſſunt: vt radii viſuales dicantur ſiue luminis diffuſio ab oculo exiens: ſiue a reb⁹ ad oculũ veniens: ſiue etiam ſola præſentia obiecti viſibilis. Vnde nõ eſt neceſſaria cõſecutio vt ſi aliqs ſpecies viſibiles negauerit: ꝙ negare teneatur ꝑſpectiuam ſcientiam: ſicut etiam alias diximus ꝙ negãtes pũcta lineas & ſupficies in rebus naturalibus recte admittunt geometriam. Sufficit ergo ꝑſpectiuo ſi ſupponat a phiſico res viſibiles & ꝑ oculos cognoſcibiles eſſe luces & colores aut corpora lucida & colorata: nõ em̃ curat de diſtinctione viſibilium ꝑ ſe aut per accidẽs: ſed indifferẽter de vtriſq; vbiq; loquiť. Tertio eſt hic ſumme notandũ ꝙ diffuſio lucis aut coloris ꝑ mediũ diaphanũ ſi ponať realiter & phiſicæ loquẽdo: nõ fit ꝑ illas lineas indiuiſibiles quas imaginať ꝑſpectiuus ad angulũ cõcurrentes: & pyramidẽ viſibilẽ facientes: ſed re vera omnis illa diffuſio lucis & coloris eſt cõtinua & extenſa in longum latum & ꝓfundũ: quia cũ recipiaťin aere ſicut accidẽs in ſubiecto: neceſſario coextendiť ſecundũ extenſionẽ ſubiecti: eo modo quo albedo eſt in lacte: aut rubedo in ſanguine: vel eo modo quo croceus color extẽderet per aquã ſi crocus diſſolueretur in ipſa. Et ſicut prædicti colores in lacte ſanguine & aqua extenſi ſecũdũ tres dimenſiones ſunt quedã corpora omogenea: ita ꝙ quelibet pars totius coloris eſt eiuſdẽ & ſimilis naturæ cum toto colore eandẽq; habẽs virtutẽ in agendo: ſic dicendũ eſt de ſpecie aut diffuſione lucis & coloris in medio diaphano continue & vniformiter extẽſa. ſ. ꝙ ſit quoddã totũ omogeneum cuius quelibet pars eſt ſimilis naturæ & virtutis actiue cũ ſuo toto: vnde cum natura illius ſpeciei ſit repreſentare corpus lucidum aut coloratũ a quo proceſſit: adeo ꝙ ſi eſſet vnus oculus ita magnus qui poſſet totã illã ſpeciem in ſe recipere ꝑ illã videret corpus illud cuius eſt ſimilitudo naturalis: ſic modo i oculo paruo recepta vna particula illius ſpeciei: quæ eſt omogenea ſuo toti: repreſentat corpus illud & quãlibet partem eius: quia eſt ſimilitudo illius obiecti & omnium ſuarũ partium. Iſte eſt ergo realis & verus modus videndi phiſicæ loquẽdo & ſecluſis imaginationibus ꝑſpectiuis: ſuppoſitis tñ ſpeciebus viſibilib⁹ in medio & in organo receptis: quæ tamẽ ſi negarenť ſecundũ alias duas opiniones: patuit quis & qualis eſſet modus vidẽdi realis & phiſicus. Perſpectiua tñ ſcientia ſuppoſita veritate phiſica ſupradicta: nõ inutiliter adhibet imaginationes geometricas ad melius & certius docẽdũ modorũ vivẽdi varias differẽtias particulares: quas phiſicus qa vniuerſalis artifex eſt prætermittit. Sicut etiam aſtrologia ad melius intelligendas particularitates motuũ celeſtiũ introducit puncta quedã & lineas & ſupficies imaginarias: quæ licet in re nihil ſint: tamẽ imaginationes ille multũ iuuãt intellectũ ad faciliuscapiendũ ea quæ dicunť: eodẽ ergo modo ſunt accipiendæ oẽs imaginationes ꝑſpectiuæ quæ hac nr̃a præmonitione præmiſſa erunt intellectui ſine errore ꝙ̃ facilime. Tamẽ ad cõfuſionẽ tollendam totam hac cõem perſpectiuã in tres libros partiales diſtinximus: & quẽlibet iterũ librũ per capitula plura iuxta materiæ diuerſitatẽ ſecuimus: neq; tamen ꝓpterea theorematum numeros ab auctore poſitos abſtulimus: qui etiam gloſas eius nõ quidem cõtinue ſed ſparſim: vbi opus erat: additionibus noſtris lucidiores effecimus.

Breue compēdium Perspectiue cōis dñi Ioannis archiepi Cātuarieñ. de radiis visualib9 ac variis modis vidēdi: ex libris Halacē: Alchindi & alioꝝ cōpilatū. Cui etiā additæ sūt nō nullæ glosæ. P.C.D. Habet tres libros partiales: qb9 pmittit auctoris phemiū.

NTER phisicæ cōsiderationis studia lux iocundius afficit meditantes: inter magnalia mathematicaꝝ theoremata certitudo demonstrationis præclarius extollit inuestigātes. Perspectiua igit humanis traditionibus recte præfertur: in cuius area linea radiosa demōstrationum nexibus cōplicat. Quare in ea tam phisicæ quā mathematicæ gloria reppérit: vtriusq floribꝰ adornata. Cuius sentētias magnis dispersas ambagibus: in cōclusiua compendia coartauimus: mixtis iuxta qualitatem materiæ naturalibus & geometricis pbationibus: nunc quidem causas ex effectibus: nūc vero effectus ex causis conclusuri. Addemus etiam nō nullas cōclusiones quæ in nostris maioribus non habentur: sed ex dictis eorum planæ eliciuntur: prout de luce tractantes lux oīm deus dignabit nos illustrare: præsens opusculum in tres libellos partituros.

Liber primus nr̄e perspectiue de modis vidēdi per radios rectos: habet capitula septem in quibus sunt. 84. propositiones.

Caput primū de principiis pprijs huius scientiæ: quæ ab Aristotele vocantur suppositiones: a mathematicis petitiones: ab aliis deniq theoremata: & sunt numero duodecim.

Prima petitio.

1.

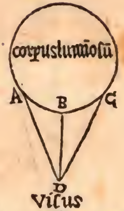
VCEM operari in visum ad se cōuersum aliqd impressiue.

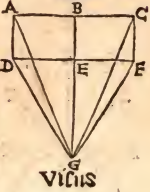
Principia cōia huiꝰ scientie sibis forme sunt cū eisdem in alijs scientijs: vnde cum in precedēte geometria nr̄a posita sint: nō fuit opus ea iterū hic reppetere. Hec vero perspectiue pncipia ppria ponimus sub modo infinitiuo: ea ratione qua ꝛ petitiones geometricas ad modū Euclidis posuimus: sed qꝛ non sunt hec pncipia p se nota: inductione pbāda sunt ad sensum ꝛ experientiam. Hec itaq pma petitio p effectus sic phatur: tum qꝛ oculus noster in videndo continue luces fortes solis aut ignis tandē languescens dolet ꝛ patit. Tum qꝛ lucis intense simulacra in oculo aliquādiu remanent post aspectum. Unde etiam sequit vt locum mi noris lucis faciant apparere tenebrosum: donec ab oculo euanescat maioris lucis vestigium: que nō fierent nisi impressione lucis in visum precuja.

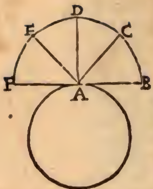
Secunda petitio.

2. Colorem illuminatum etiam impressiue operari in visum ad se directum.

Hec etiam pbat experimentis cōsilibus sicut de luce: qm lux ꝛ color illuminatꝰ sunt p se ꝛ ppria sensibilia visus. Amplius oculus sup viuū colorē intēse illuminatū fixa intuitione semel cōuersus: si postea ad debiliorē aut debilius illuminatū sese cōuerterit aspiciendū: inueniet pmū colorē scdo apparēter cōmisceri: vt pz i diebꝰ niuosis ꝛ alijs hmōi locis: qd nō fieret nisi vestigijs poris coloris in oculo derelictis. Ceterū de irradiatione coloris p mediū: quā hic videmur ex phisica scia supponere: apud phos est anceps ꝛ varia doctrina: q etiā de natura ipsius coloris diuersa ꝛ aduersa senserit. Dicunt eīn quidā eorū q color essentialiter est lux: q tn varijs modis se habēs varia sortit noia: nā lux in suo fonte. i. in corpe luminoso vere ꝛ pprie dr lux: in medio diaphano dr lumē vel splēdor: in corpe vero oppaco recepta vocat color: vñ ꝛ isti colorem diffinientes dicunt q color est lux oppacata: argumentum ad hoc assumētes ex coloribꝰ nubium celi ꝛ flāmarum ignis: qui vere ꝛ realiter nihil aliud sunt quā luces: vt patet in iride halone: galaxia: parelijs: virga: hiatibꝰ ꝛ voraginibꝰ ꝛ alijs huiusmodi.







Alij philosophi ꝓbabilius tenēt colores quēadmodum ⁊ sapores ac odores esse qualitates mixtorū causatas in rebus naturalibus ex mutua actione ⁊ passione ꝑmarum qualitatum elemētorū in ipsa mixtione corū. Hec argumentū de coloribus nubium ⁊ flāmarū cōuincit: q2 illi nō sunt veri colores sed solū apparentes: quod pz ex facili mutatione corū eisdē nubibus ⁊ flāmis cōtinuo ꝑmanētibus: quod nō accidit in veris coloribus corporū naturalium. Ergo super questione de irradiatione coloris clara est differentia philosophorum: nā dicerent ꝑmi ꝙ color suapte natura irradiat quia est lux: quare secundū eos cōsequēter loquēdo diceref: ꝙ vbi nulla est lux nullus est color alicuius corporis vt in loco obscuro vł tenebroso. Secundi vero ecōtra fatentur in tenebris esse veros colores corporꝝ eque atqꝫ odores ⁊ sapores: dicunt tñ quidā eorū ꝙ color ex sua natura nō irradiat: sed illuminatus a luce accipit virtutem irradiandi per medium: vbi ergo nulla est lux: l3 ibi sit verus color: ibi nullus color irradiat vt in loco tenebroso. Alij istorū tenēt ꝙ l3 color nō sit lux: tamē ex sua natura irradiat idest emittit spēs suas per medium sicut odor vel sapor ⁊ hoc tam in loco obscuro ꝙ̄ in loco illuminato: verū tamen dicūt ꝙ ille species non sunt sensibiles ab oculo sine speciebus lucis: itaqꝫ oportet ad hoc ꝙ color videaf simul venire ad oculū spēs lucis ⁊ coloris. Quicqd tñ sit diceref in hac qōne: nostre ꝑspectiue ꝓcessus nō impeditur: quia vt prediximus ipsa indifferēter ⁊ cōiter loquitur.

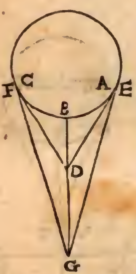
Tertia petitio.

Quēlibet punctum luminosi vel illuminati corporis colorati obiectum sibi medium diaphanum totum simul illustrare. 3.

Egimus in premissis duabus de luce ⁊ colore (que sunt per se ⁊ ꝓprie visibilia: ⁊ rationes formales oīm visibilium corporū) incōparatione ad organū visus: addimus iam alia ꝑncipia de corpore lucido ⁊ colorato: que sunt visibilia ꝑ accidens: incōparatione ad medium vidēdi: quod est diaphanū.i. trāsparens corpus: imo deinceps loquemur indifferenter de vtroqꝫ visibili per se ⁊ ꝑ accidens: eo ꝙ illa distinctio phisica impertinēs est ad hāc sciam sensualem. Iam ꝓbatur hec tertia petitio sic: quilibet eñ pūctus luminosi vel colorati illuminati pōt videri in qualibet parte medij sibi obiecti.i. presentis: sed videri nō posset ibi nisi irradiando super illud: quatenus radij eius ꝑ medium veniant ad oculum videntis: ergo omne tale corpus visibile illustrat radijs suis totum medium.

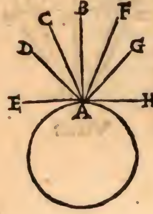
Quarta petitio.

Totum lumiuosum vel illuminatum coloratum in quolibet puncto medii sibi obiecti pyramidem sui luminis terminare. 4.



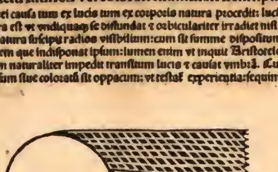
Hec ꝓpositio in modo loquēdi est cōuersa precedētis: q2 illa totalitatē attribuebat medio ⁊ ꝑtibilitatem corpori visibili: hec vero cōuertit locutionem. Et accipitur pūctus vtrobiqꝫ nō geometrice ꝓ aliquo i diuisibili: s3 phisice ꝓ qualibet parte corporis magna vł parua vsqꝫ ad minimū naturale indiuisibile. Pyramis vero radiosa corporis visibilis dicitur hic quidā cōcursus imaginarius duarū lineaꝝ ab extremitatibꝰ eiusdē corporis ductarū super quodlibet pūctum medij: ⁊ hmōi pyramides varianf in infinitū cōparato eodē corpore ad infinita puncta medij obiecti. Caueat ergo huius discipline auditor ab errore false opinionis: ne forte credat has pyramides realiter sic esse dispositas in medio: ⁊ ita actu diuisas sicut eas imaginamur geometrice: sed ꝙ sint ibi solū in potētia quēadmodū boni philosophi dicūt d figura mercurij in lapide vel ligno nōdū sculpto: sic eñ abstrahētiū mathematicorū nō erit mēdacium vt Aristoteles dicit: quod ꝓfecto accideret talia esse credētibus: vnde subdit ꝙ latent hec facientes seu ponentes ideas ⁊ mathematica separata. Nūc ꝓbāda est ꝓpositio assumpta: q2 si quilibet pūctus luminosi ex precedente illustrat quēlibet punctū medij: totū eñ hic sincathegorematice accipif ꝓ qualibet parte: ꝗ totum luminosum irradiat super quodlibet punctū medij: ⁊ illam irradiationē imaginamur ad figurā pyramidis: vt facilius manuducamus rudes discipulos ad intelligendū quomodo res tam magna vt mons possit videri ab oculo tam paruo: ꝗ ad hūc sensum inquolibet puncto medij are visibili terminaf pyramis radiosa. Et pro varietate distātie a corpore visibili ad quodlibet punctū medij imaginamur varias pyramides ⁊ a seinuicem differentes in longitudine ⁊ breuitatē: in latitudine ⁊ angustia earū. Nescio tamen si auctor huius perspectiue has pyramides realiter credebat: qui ex hoc ꝑncipio voluit statim illā cōclusionem inferre.f. incidentias radiosas per angularia foramina ⁊c. ⁊ ita posuit eam quintam in numero: nos vero a numero principiorum eam separantes inferius collocabimus.

Quinta petitio.

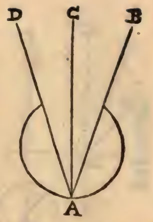


Oē pūctū lumīosi vel colorati illuminati hemisphericaľr sup mediū radiare. 5.

Huius rei causa tum ex lucis tum ex corporis natura procedit: lucis si quidem ⁊ coloris illuminati ea natura est vt vndiquaqꝫ se diffundat ⁊ orbiculariter irradiet nisi impediatur. Diaphanum etiam suapte natura suscipit radios visibilium: cum sit summe dispositum ad eos: nec contrariam habeat qualitatem que indisponat ipsum: lumen enim vt inquit Aristoteles est actus diaphani: quo contra oppacum naturaliter impedit transitum lucis ⁊ causat vmbrā. Cum ergo oīe corpus visibile sine luminosum siue coloratū sit oppacum: vt testaf experientia: sequitur ꝙ pūctus insuperficie eius sitvs



nõ possit se orbiculariter diffundere .i. irradiare ad totã sphærã sue actiuitatis: q: medietas spacij spherici descripti circa punctũ illũ precluditur sibi; quã abscondit opacitas corporis sui: restat ergo sibi diffusio hemisphærialis solũ modo. Sed hoc verũ est in corporibus visibilib⁹ planis & sphæricis conuexis: nã incõcauis minor sphere portio medietate relinquitur pũcto irradianti: eoq ipsa figura prohibeat lumen dilatari vsq ad medietatẽ sphere. Fũdat hec imaginatio in illo p̃ncipio geometrie .s. circa pũctũ quodlibet q̃tulibet occupãdo spacium & circulũ & sphærã describere: q̃ dici solet sphera actiuitatis ei⁹.



Sexta petitio.

6. Radios visibilium corporum impermixtæ idem medium illustrare.

Vocamus hic species visibilium radios vel lineas imaginatione geometrica: eo q recta via incedant in sua multiplicatione. Cũ ergo eidem medio diaphano simul plura visibilia diuersorũ luminũ & colorũ sepius presentẽtur: & p quartam petitionẽ hui⁹ quodcũq illorũ in quolibet pũcto medij piramidẽ sui luminis terminet: possent imperiti credere illas spẽs diuersorũ corporũ sic pmiscerit: vt ex eis vna tertia resultaret species: quẽadmodũ dici solet elemẽta misceri in reb⁹ naturalib⁹. Huic errori obuians hec ppositio asserit illas species non misceri: nã & accidentia diuersarũ naturarũ in eodem subiecto: vt albedo & dulcedo in lacte: licet sese penetrent nõ tamẽ miscentur ad tertiũ generationẽ: constat autem radios diuersorũ visibilium: q̃ simul sunt penetratiue in eodẽ medio: esse diuersarũ naturarum etiam si visibilia corpora sint eiusdẽ speciei predicamẽti substantie vel qualitatis: ergo radij illi non miscent sic q ex eis fiat aliquod tertium. Et hoc etiam experimento claret: lumina enĩ plurium candelarum non cõfundi in aere patet ex vmbris eiusdẽ opaci eis obiecti: que multiplicãtur secũdum numerũ candelarum: nã multe candele ad vnũ oppacum obiecte tot faciunt vmbras quot sunt candele. Idẽ preterea oculus in quolibet puncto medij positus distincte videt corpora diuersorum colorũ non solum specie sed etiam solo numero differẽtium. Ex predictis sex petitionibus habetur comparatio visibilis per se & per accidens ad organũ visus & ad medium seorsum: alie vero sex que sequuntur cõparabunt lumen ad medium simul & organum atq ad obiectum.

Septima petitio.

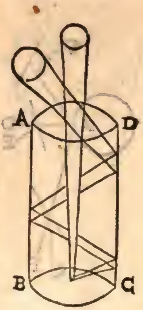
7. Lucem fortẽ orientẽ sup visum & medium: quedã visibilia oculo abscõdere.

Hoc experientia cõstat: tum q: stelle per diem nõ apparent in celo: & hoc non nisi q: lucis solaris vehementia occupat visum: ne radios stellarum debiliores percipiat: hoc enim cõmune est omni sensui q excellens sensibile occupat ipsum: vt Aristoteles dicit: ne minora sensibilia sentire valeat: & semper minores motus vel tactus sunt imperceptibiles sub excessu maiorum: in nocte vero absente sole sentit visus radios stellarum qui alterãt seu mouent ipsum: similiter in die homo existens in profundo putei videt stellas celi super caput eius apparentes in zenith: quia earum radij directi fortiores sunt super eum quã radij solis obliqui. Tum etiam quia magnus ignis in nocte existẽs coram homine prohibet sibi certam visionem eorum que sunt vltra ignem. Et in die veniens de agro nihil fere videt in domo propter excessum claritatis solis.

Octaua petitio.

8. Intensam lucem super quedam visibilia orientem ipsa oculo abscondere existenti in loco lucis temperate.

Huius & precedẽtis fere eadem est ratio .s. q motus maiores impediunt minores: cũ ergo obiectum visibile fuerit intense illuminatũ: visus inde recipit intẽsos lucis radios p reflexionem: qui prohibẽt eum sentire species colorum debiliores licet recte venientes ab obiecto visibili. Patet etiam idẽ experimento: nam tabula picta vel sculpta quando vehementer a sole illuminatur: oculus recipiens illius lucis reuerberationem non videt imagines vel sculpturas eius: imo & aliquando neq colores nisi valde confuse. Similiter multa sunt corpora lucida in terra que ad solem posita vel non apparent vel nõ lucent: vt candela accensa: ignis paruus: scame piscium: quercus putrida: oculus cati: & lucula vermis: que tamen in nocte vel in loco obscuro & apparent & lucent.



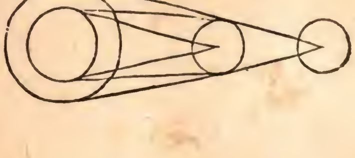
Nona petitio.

9. Lumen forte multa visibilia ostendere: quæ debile occultat.

Quãuis hec propositio videat cõtraria duab⁹ precedentib⁹: tamen eis est bene cõpossibilis: lux enĩ fortis sic abscondit visibile quando excedit eius pportionem in radiando: q: tunc occupat totã visus capacitatem: sed lux debilis similiter abscondit visibile quando deficit a pportione requisita ad hoc q eius color possit sensibiliter radiare: ergo tunc superueniens lux fortis: que tamẽ pportionem dictam nõ excedat: manifestat visibile: q: dat colori eius virtutẽ sufficientem irradiandi sensibiliter. Et experientia docet q multa in luce modica nõ videnẽ: que ad maiorem lucem adducta declarantur.

Decima petitio.

10. Igneam lucem ex materia flamea radiantem: maiorem in nocte quã in die: & a longe quam a prope apparere.



Hec sequit correlarie ex premissis: in die eñ illa lux apparet minor: q: maiore claritate solis circumfunditur que magis ea visum mouet: in nocte vero per totū suum ambitū libere presentat: ⁊ magis ac maior videtur. Itē de prope illa flāma visa in nocte discernitur ab aere circumstāte q̄uis illuminato: a longe vero nō sic flāma ab illuminato aere discernitur propter distātiam: sed totum illud confuse apprehenditur ad modum vnius grandis luminaris aut magne flamme.

Vndecima petitio.

11. Colores corporum naturalium diuersificari apud visum hominis: propter diuersitatem lucis super ipsos orientis.

Hoc etiam ad dicta cōsequit: q: vt diximus color efficaciam irradiandi vel mouendi visum ⁊ medium habet a luce: g̃ secundū diuersitatē lucis maioris aut minoris color ab ea illuminatus magis aut minus irradiat ⁊ oculo se ostendit. Et sicut oēs colores sunt in luce virtualiter ⁊ eminenter: ita debiliores vel imperfectiores colores sunt in nobilioribus sicut incōpletū in suo cōpleto: vt Aristoteles dicit de figuris q trigonū est in tetragono: ⁊ de aia q vegetatiuū est in sensitiuo: ⁊ sensitiuū in rationali: quare nimirū si quidā colores in luce forti appareant clari ⁊ scintillātes: in luce aūt mediocri videant turbidi ⁊ alterius nature. Unde iidem colores aliter apparēt in luce solis de die ⁊ aliter in luce lune aut candele de nocte: vt mōstrant illusiones eorū qui flores diuersorū colorū cōponunt in nocte ad lumen candele: eodē modo decipiunt sepius plumarii ⁊ alii hmōi artifices: pictores quoq in eiusdē vestis albe aut rubee pictura multas spēs faciūt coloris albi aut rubei scdm varias partes eius vario modo illuminatas. In tempore etiam eclipsis solis omes res colorate solita venustate priuantur: q: oēs colores tūc quasi mortificant. Amplius colores nubū in celo: lz nō sint veri vt diximus sed tantū apparētes: ꝑpter variam lucis irradiationē sup easdē nubes variant: qd etiam cōspicitur in flāmis lignorū ignitorū ex varia pmixtione flāme ad fumū. Deniq eadē diuersitas mōstrat in conchis hostrearum maris: in squamis piscium: in collo columbe: in ala corui: ⁊ aliis multis corporibus: quorum quodlibet: cum vnius tantū sit coloris: variis tamē lucis aspectibus varie illustratū sub diuersis colorum formis oculo presentat. Licet de collo colūbe qdā aliter putēt. s. diuersos reuera ibi esse colores ex diuersis pēnulis radiantes: quod tamē mōstratur falsum ex pēnis caude pauonis: quarū quelibet etiam secundum eandem sui partem varie illuminata varios protēdit colores.

Duodecima petitio.

12. Comprehensio rei visibilis a visu sequitur proportionaliter dispositionem lucis orientis super obiectum: medium: & visum.

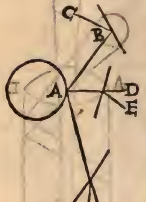
Hec ꝑpositio est quasi epilogus totius capli huius: ⁊ summa dictorū in eo: sequiturq ad ea correlarie: q: eñ in maiore luce color magis mouet ⁊ in minore minus: simplr videt ois efficacia coloris in mouendo medium ⁊ organū esse a luce: ⁊ voco motionē coloris eius irradiationem que est alteratio quedā diaphani. Eadē diuersitas attendit ex parte medii in defferēdo species colorū: ⁊ ex parte organi in recipiendo eas: atq in apprehendēdo rem per eas: quodcūq eñ horū trium vario modo illuminatū varias visionis modum in rebus coloratis. Dactenus de principiis perspectiue.

Capitulum secūdum de quibusdam conclusionibus generalibus ad totam hanc scientiam: quarum etiam vera noticia est supponēda in omnibus tribus libris huius compendii.

Prima conclusio.

13. RADIUS lucis primarie sitr & coloris in rectū semp porrigit: nisi diuersitate medii icuruet: se nihilominus lateralr diffundēdo.

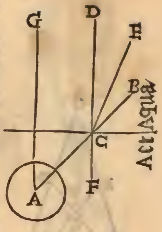
Dicitur aūt lux pmaria que directe ꝑcedit a corpore luminoso ad medium sibi presens: ⁊ vbi hec irradiatio nō attingit dr vmbra ⁊ lux secundaria siue accidentalis aut lateralis: que a luce pmaria deriuatur ac ꝑcedit ⁊ vndiq se diffundit. Eadē lz paulo latentior ē dīa radiorū coloris q simul ꝑcedunt cū radiis lucis: vt ptz qñ radius solis trāsit per vitrū coloratū: tunc eñ ꝑpter radii solaris vehemētiam color sensibilius irradiat sup medium ⁊ obiectum corpus. Hoc supposito ꝓbetur cōclusio: naturalissimus siquidē est luci ⁊ colori incessus rectus vt cōstat ex obstaculo opaco lineaaliter posito inter corpus visibile ⁊ visum: qd visionē eius impedit: neq huius recti incessus est querēda alia ratio nisi q: natura rei talis ē: ⁊ taliter a deo facta: vt vr sic imitetur illā summā rectitudinē increatam que est ꝓprie filius dei: in ol etiam motu naturali rectitudo expedit ⁊ facilitat operationē: quandoquidē via recta est olm breuissima ⁊ citius ducit ad finem. Impeditur tñ rectitudo irradiationis ⁊ fit violēter incessus lucis obliquus: qñ obuiat ei corpus densum: qd si sit opacum: resflectitur ac resilit radius ab eo vt a speculo: si autē diaphanum sed dissimile illi in quo est corpus luminosum aut coloratum: tunc radius lz transeat vlterius: tñ non recte sz quasi frangitur: ⁊ sic declinat a rectitudine vie quā inceperat ⁊ ꝑcedit oblique. Ex hac g̃ ꝑpositione patēt tres dīe radiorū visualiū. s. recti: reflexi: ⁊ fracti: penes qs distigunt tres libri hui⁹ ꝑpēdii ꝑspectiue.

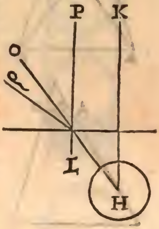


Secunda conclusio.

14. **Fractio radii lucis aut coloris fit ad perpendicularem in occursu medii densioris: super quod radius ille non est perpendicularis.**

De reflexione radiorũ a corpore speculari: q: facile intelligitur ex reflexione vocis aut soni q̃ ab Aristotele dr̃ echo: ⁊ ex resilientia corporis moti qđ obuiat resistenti: vt pȝ in ludo spherule: nihil dicemus ad presens: sed expectãdus erit liber secũdus huius pspectiue. Et lȝ de fractione radiorum agat in particulari liber tertius huius: q: tñ est difficilior eius cognitio: duximus hic prelibãda quedã eiꝰ gñalia pncipia. Pro quorũ declaratione sciendũ q̄ perspectiui imaginatione geometrica linearũ de lucis diffusione p medium loquunt̃: ⁊ q: vbi fit visio p media diuerse diaphanitatis apparet notabilis variatio in iudicio sensus: ad dandũ rationẽ illius dicunt ꝓpter diuersitatẽ mediorũ radios lucis ⁊ coloris frangi seu incuruari: dicentes q̄ gñalis ratio huius fractionis est diuersitas diaphanitatis mediorũ: nã minus diaphanũ medium magis: ⁊ magis diaphanũ minus resistit transitui radiorum per ipsum: quare cũ facilior fiat trãsitus p vnũ medium q̃ p alterũ: ⁊ lux eque cito trãseat p vnũ sicut per alterũ: necesse est: scđm regulas septimi phicorũ de velocitate motuũ cõsiderãda ex ꝓportione virtutis actiue ad resistentiam: q̄ radii lucis ⁊ coloris qñ trãseunt a medio rariore ad medium densius vniant̃ ⁊ fortificentur ad hoc vt sit ꝓportio illius virtutis ad resistentiam in vtroq̧ medio ⁊ eque cito fiat trãsitus. Verũ in hoc est dña radiorũ: q: ppendicularis est aliorũ fortissimus ideo ingrediens vel egrediens nõ frangit̃ neq̧ diuersitate medii ebetãtur: aliorũ vero radiorũ vnusquisq̧ tanto est debilior ⁊ tanto magis frãgitur quanto a ppendiculari est remotior: ⁊ tanto fortior quãto est ei ꝓpinquior ideoq̧ minus frangitur: qñ igitur occurrit medium densius ⁊ magis resistens: necessarius est radio obliquo fortior situs ⁊ directo ꝓpinquior: ideo declinat ad ppendicularẽ erigibilẽ a puncto ingressus sui sup medium secundũ: ⁊ hoc nõ p electionẽ sed instinctu quodã naturali: vt transitꝰ p medium scđm ꝓportionẽ transitui p primũ. V. g. a corpore luminoso existẽte in aere cadat sup aquã ppendiculariter radius. a. g. qui non frangitur: cadat vero oblique radius. a. c. q̃ si non frangeret̃ ꝓcederet vsq̧ in. b. sed frangitur in pũcto. c. supficiei aque ⁊ accedit ad ppendicularẽ. d. c. f. ⁊ cadit in. e. Voco autem radium ppẽdicularẽ q̃ nõ frangitur: nõ p cõparationẽ ad corpus luminosum a quo egreditur sed p cõparationẽ ad medium sup quod cadit: itaq̧ in supficiem eius cadit ad angulos rectos: eodẽ modo est dicendũ de radio obliquo q̃ frangitur. Hec tamẽ imaginatio mathematica lȝ ꝓsit ad manuducendũ phantasiam nouitiorũ ⁊ rudium: tñ docti phi sciunt rem aliter se habere: vbi nec sunt tales linee nec tales anguli neq̧ fractiones: sȝ lumẽ in aere est corpus cõtinuum vt in preambula q̃stione diximus. Rei ergo veritas phisica hec est: q̄ p medium magis diaphanũ lumẽ intensius diffunditur: ⁊ per medium minus diaphanũ quod iste vocat densius est minus intẽsum: q: est minus receptiuũ luminis: quare ad hoc q̄ in eo bene recipiatur quasi p antiparistasim fortificatur ⁊ intẽdit̃: ⁊ ad hunc sensum est applicanda predicta imaginatio mathematica ad hoc vt abstrahentium nõ sit mendacium.





Tertia conclusio.

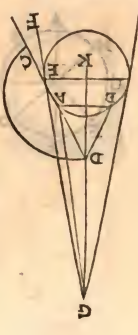
15. **Econtrario vero radius lucis vel coloris a perpendiculari se diuertit: cum medium subtilius occurrit.**

Persistendo in eadem imaginatione linearũ hec sequitur ex premissa: q: medium secũdũ minus resistit: ergo minor fortitudo sufficit radiis ad ipsum a densiori cadentibus: ⁊ q: natura radii est dilatare se inquãtum potest remoto impedimẽto: ideo frangitur radius obliquus a ppendiculari. V. g. sit visibile. h. existens in aqua: ascendat ab eo perpẽdicularis. h. k. recte: ⁊ radius. h. l. oblique: dico q̄. h. l. nõ ꝓcedit directe in. o. nec frangitur versus perpendicularem. p. l. sed ab ea diuertens cadit in q. Phisice vero pȝ intelligẽtia huiꝰ cõclusionis p oppositũ ad p̃cedẽtẽ: sȝ de hac materia satis ꝓ nũc vsq̧ ad tertium librũ: vt redeamus ad radios rectos de qbꝰ in hoc pmo libro pncipalior sit doctrina.

Quarta conclusio.

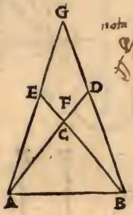
16. **In omni puncto medii quo est a luminoso remotior: eo in ipso recipitur radius multiplicior.**

Hec cõclusio ꝓbatur: q: punctus quãto plus distat a sole tanto in eum descẽdit lumen a maiori arcu seu portione solis: ⁊ econtrario quo ꝓpinquior est soli: eius lumẽ descendit a minori arcu: g̃ in pũcto remotiori est lumẽ multiplicius: sȝ ex distãtia debilius: qđ demõstrat̃ sic. Accipiant̃ in corpe spherico luminoso cuius cẽtrũ sit. k. duo pũcta opposita. a. b. ⁊ diffundat̃ lumẽ a pũcto. a. p hemispteriũ vt pȝ p. 9ntũ pncipium supra: cuius hemisperii diameter est linea. c. a. d. certũ igr̃ est q̄ a puncto. a. cadit lumen in puncto. d. ⁊ nõ in aliquẽ ꝓpinquiorẽ locum corpori luminoso: linea cũ. c. a. d. est contingẽs: q: inter eã ⁊ spheram nulla cadunt media: sicut pȝ ex sexta cõclusione capli de circulis in scđo libro nostre geometrie. Amplius si sumatur punctus sup. a. in corpore luminoso scȝ. e. radians p spacium obiectum: ⁊ terius radiationis sit linea cõtingens. f. e. g. certum est q̄ in linea. k. g. pũctus pmus ad quẽ peruenit lumẽ a pũcto. e. est. g. ⁊ in nullũ ꝓpinquiorẽ: sicut a puncto. a. in punctũ. d. sed in pũcto g. venit radius a puncto. a. ⁊ ab omni puncto luminosi mittente radium suũ in punctũ ꝓpinquiorẽ



mittitur radius in punctū remotiorē: τ nō econtra: vnde a toto arcu.e.a.b.o.cadit lumen in punctū.g sed in.d.nō venit nisi ab arcu.a.b.lux igitur in pūcto recepta tanto multiplicior est q̄to a luminoso remotior. Unde homo existēs in centro terre plus videt de sole q̄ si in sphera lune existeret: de spherico enim plus videtur a longe q̄ a prope: τ quanto ꝓpinquius tanto minus de eo videtur.

Quinta conclusio.



In puncto propinquiori fortior est lux vnius corporis quam in remotiori. 17.

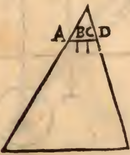
Multiplicitas enim luminis in puncto remotiori est ex cōfluentia radiorū oblique cadentium τ ꝓ cōsequens debilium: lux autē in puncto ꝓpinquiori fortitudinem habet ex maiori coniunctione cū suo fonte: q̄ maior est. Ex ista cōclusione sequit̄ ꝑ astrologia: q̄ in regionibus australibꝰ fit maior calor in hyeme q̄ in nostris septētrionalibus in estate: quia sol est eis propinquior quā nobis: cū in hyeme sit in opposito augis sue: sed in estate est in auge.

Sexta conclusio.

Pyramides breuiores: quia breuiores: partim esse longioribus ab eadem basi procedentibus fortiores: partim debiliores. 18.

Breuiores sū quidē pyramides: q̄ breuiores: et obtusiores necesse est: sicut patꝫ ex doctrina de triangulis in primo Euclidis: sed in obtusioribꝰ radij sup conos se intersecant ad obtusiorē angulū: τ quāto angulus conalis interior ē obtusior tāto magis eiꝰ latera lateribꝰ pyramidis incise mutuo appropinquant exterius. Uerbi gr̄a sit pyramis obtusa.a.b.c.τ ꝓtrahatur.a.c.in.d.τ.b.c.in.e igitur cū angulus.a.c.b.sit equalis angulo.e.c.d.q̄ contra se positꝰ ꝑ scḋam quarti capl̄i primi libri geometrie: necesse est tanto reliquos duos esse minores quanto hij duo sunt maiores ꝑ primā quarti capl̄i primi libri geometrie: τ quāto illi sunt maiores τ isti minores: tanto sibi sunt collaterales radij ꝓpinquiores: vt c.d.tanto ꝓpinquior est radio.b.c.τ ecōuerso quāto minor est angulus.d.c.b. Est aūt luci ꝓprietas: vt quanto est altera ꝓpinquior alteri: tanto sit fortior vtraq̄: igitur scḋm hoc fortiores sunt pyramides breuiores naturaliter: τ nō solū ex causa in precedēte cōclusione assignata. Sꝫ ecōuerso in pyramide longiori lux ad conū est adunata magis q̄ in breuiori: τ per hoc excedit breuiorē. Simpliciter tamen fortiores sunt breuiores. Unde naturaliter montes calidiores sunt quam valles. quāuis ꝑ accidens infrigidentur inquātum medio intersticio aeris propinquant.

Septima conclusio.



Cuiuslibet pyramidis radiosæ omnes radios in indiuisibili concurrere. 19.

Hoc intelligendū est solum de radiis imaginarijs iuxta modum quarte petitionis capl̄i precedētis. Si enim conus pyramidis habet latitudinē: ego diuidam eū ꝑ tres partes quarū prima sit.a.b.scḋa.b.c.tertia.c.d.ergo radius cuius terius est.a.b.nō cōcurrit sic cum radio cuius terius est.c.d.quod falsum est: quia lineas concurrentes necesse est sine medio esse: atq̄ huiusmodi radiorum concursum vltimum fieri in puncto mathematico.

Octaua conclusio.

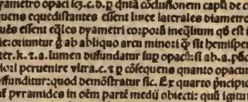
A luminoso concauo lumen efficatius recipitur in centro. 20.

Cuius ratio est q̄m ab omni cōcaui pūcto ꝑpendiculares radij: q̄ sunt ceteris fortiores: cōfluunt in centrum vt ꝓbari pōt ex capl̄o de circulis in scḋo lib. geometrie. Unde virtutes corporū celestium in centro mūdi τ iuxta ipsum efficatius oriuntur vel operantur: illicq̄ cōformior dicitur habitatio hominis cuius complexio propinquat simplicitati: vt est possibile: supremi corporis.

Nona conclusio.

Omne luminosum sphericum illuminat spheram minorem: similiter & cylindrum plus quam dimidium. 21.

Si enim maior est dyameter luminosi q̄ sit dyameter opaci: radij cadentes super extrema dyametri opaci nō oriuntur a terīs dyametri luminosi scꝫ.k.g.hoc enī si facerent angulos rectos causarēt vtrobiq̄ cū dyametro opaci scꝫ.c.d.ꝑ q̄ntā cōclusionem capl̄i de circulis in scḋo libro geometrie nostre: τ per cōsequens equedistantes essent linee laterales diametroꝝ tam in corpore luminoso q̄ in opaco: τ ꝑ cōsequēs essent eq̄les dyametri corporū inequalium qḋ est impossibile: ꝯña tenet ex quarta petitiōe geometrie: oriuntur ḡ ab abliquo arcu minori q̄ sit hemisperium verbi gr̄a ab.a.b.cum ḡ a punctis oībus inter.k.τ.a.lumen diffundatur sup opacū: si ab.a.pūcto peruenit in.c.necesse est ab omni pūcto superiori peruenire vltra.c.τ ꝑ cōsequens quanto opacum est ꝓpinquius luminoso: tanto latius lumen diffunditur: quod demōstratur sic. Ex quarto pͥncipio capl̄i precedentis a superficie luminosi porrigant̄ pyramides in oēm partē mediū obiecti: quū igitur minus sit opacum luminoso: τ ꝑ consequēs inter pyramides luminosas cōclusibile: necessario illustrat̄ plus medietate. Si enī pyramis latera sua extremis diametri.c.d.applicaret sequerent̄ duo incōuenientia vtrinq̄ enī angulos rectos cōstitueret sicut patꝫ ꝑ q̄ntā quarti capl̄i scḋi libri nostre geometrie: τ per ꝯñs essent equales diametri



corporum inequalium: scz luminosi z corporis opaci quod ē cōtra ypotesim. Et trigonus. c. d. z. plus q̄ duos rectos cōtineret z c. Fundantur hec demonstratio in tribus ꝓpositionibus geometrie: prima est diffinitio linearū equedistātium. Secunda q̄ oēs linee inter equidistātes lineas cadentes ad sibi angulos sunt equales: z hec sequitur ex precedēte. Tertia q̄ dyameter circuli ortogonaliter cadit sup lineam cōtingentie si sup punctū cōtactus ceciderit: que probata est in geometrie nostre libro scdo in capitulo de circulis conclusione quinta. Ex hoc ptz q̄ sol illuminat plus q̄ medietatem lune z terre.

Decima conclusio.

12. **Vmbrosi minoris luminoso minorē esse vmbram: sicut æqualis æqualem: & maioris esse maiorem.**

Hec ptz ex premissa qm̄ si luminosum maius est q̄ vmbrosum illuminat plus q̄ medietatē: si equale medietatem precise: si minus: minus medietate: z loquor de vmbris proiectis in plano: z q̄tum ad latitudinem vmbre: nam alias variantur figure vmbrarum.

Vndecima conclusio.

13. **Vmbrosum sphæricum luminoso minus: vmbram proicere pyramidalem: æquale columnalem: maius curtam euersam pyramidem infinitam.**

Ratio huius propositionis sumitur ex prehabitis qm̄ ex. 9. huius capli ptz q̄ vmbrosum luminoso minus: vt terra sole: illuminatur plus q̄ in medietate: radij aūt a luminoso cadētes in vmbrosum contingēter: equedistātes esse nō possunt: tangūt eñ circulū nō in extremis diametri sed in extremis corde alicuius minoris dyametro semicirculi: rectiq̄ anguli non erunt in cōtactu: sicut ptz ex. 6. capli de circulis in lib. 2. nr̄e geometrie: quā radij a maiori magnitudine descendant necesse est illos angulos esse minores quos cōstituunt radij ex parte corde predicte a luminoso remotiori: cōcurrunt enim necessario ad partes illas vt docet quarta petitio geometrie. Quod si equalia sibi sint vmbrosum z luminosum radij cadent necessario in extrema dyametri vmbrosi: z per ꝯñs equedistātes erunt nūq̄ cōcurrentes etiam si in infinitū producantur. Si aūt maius fuerit vmbrosum necesse est vmbram eē cōtrarie dispositiōis cū pma istarū trium: quare euersa erit: z curte pyramidis infinite scdm lōgitudinē: quā figurā calatoides appellāt: dico tamē luminosum z vmbrosum debere esse super idē planum.

Duodecima conclusio.

14. **Vmbram esse lumen diminutum.**

Sicut ptz ex quarto principio precedentis capli q̄uis opacum impediat transitum lucis directum z pncipalem nō tñ secundarium q̄ circūferentialiter se diffundit. In hoc autē differt vmbra a tenebra qr vmbra est lux diminuta: vbi est puatio lucis pmarie z deriuatio scdarie: tenebra vero est vbi nihil est luminis. Nescio tñ si aliquod corporū mūdanorū pōt oino lucis trāsitū impedire: quū nullum penitus natura perspicui sit priuatū: z adminus circunfulgētiam impedire nō pōt luciū secundarie: dicit enim Aristoteles in secundo de anima q̄ diaphaneitas est natura cōmunis oīm corporum tam superiorum q̄ inferiorum: sed de hoc infra capitulo quinto conclusione quinta.

Decimatertia conclusio.

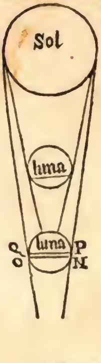
15. **Quāto sol est ꝓpinquior lunæ tāto eam magis illuminat intēsiue & extēsiue.**

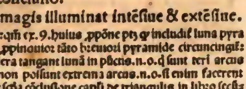
Quod intēsiue ptz ex. 5. huius: qd̄ extēsiue ꝓbatur: qm̄ ex. 9. huius ꝓpōne ptz q̄ includitur luna pyramidibus radiosis a sole proiectis: z quanto soli est ꝓpinquior tāto breuiori pyramide circuncingitur: imaginemur ḡ aliquā pyramidem lōgiorē cuius latera tangant lunā in pūctis. n. o. q̄ sunt termini arcus n. o. amplius latera pyramidis breuioris tangere non possunt extrema arcus. n. o. si enim facerent quū sint ab eadē basi: pyramides essent equales: ex scda cōclusione capli de triangulis in libro secūdo geometrie: nā hmōi latera sup maiorē basim maiores angulos facerēt: nec possūt tāgere extrema arcus maioris q̄. n. o. vbi gratia. p. q. qm̄ sic breuiorē pyramidē ꝯstituere nō possēt nisi vtrinq̄ latera lōgioris pyramidis secarēt: qd̄ ē ipossibile cū ab eisdē terminis vtrinq̄ ꝓcedat: tales eñ lineas ipossibile ē cōcurrere. Latet tñ luna pro illuminata: supior ei ē necvndetur portio eiꝰ modica donec a sole penitus elōgetur.

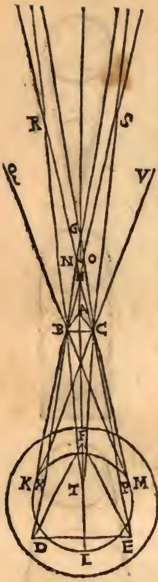
Decimaquarta conclusio.

16. **Incidentias radiosas per angularia foramina mediocris q̄titatis trāseuntes: in obiectis corporibus rotundari: eoq̄ semp fieri maiores quo remotiores.**

Hec cōclusio sequitur ex quarto pncipio q̄tum ad vtrāq̄ partē: ꝓbatur tñ secūda qm̄ radij in quo vis pūcto medij pyramidaliter terminati nō sistūt ibi: sed intersecādo se ꝓcedūt: ḡ qñ perforamē incidūt angulare: radij q̄ in foramine se intersecāt indirectum ꝓducti quū in tātam distātiam puenerint quāta est distātia ex alia parte solis: dilatantur ad q̄titatē solis: qm̄ si anguli cōtra se positi equales sunt ex secūda cōclusione quarti capli pmi libri geometrie: z latera ex vtraq̄ parte pyramidis equalia sunt: necesse est z bases equales: vt ptz ex pma capli de triangulis in scdo lib. geometrie. Causam autē rotunditatis incidētie diuersi diuersimode nixi sunt assignare. Quidā ḡ simpliciter causam attribuunt so-







lari rotunditati: vt sicut radius a sole: sic rotunditas a rotunditate. Ad hoc argumētū sensibile assūmentes: q: tēpore eclipsis solaris hmōi incidētie p foramina angularia fiunt nouaculares: scđm portionē quā abscindit luna a sole: ppter qđ rotunditas a rotunditate pueniet. Sed si hec causa sufficeret: sic incidentia ista rotunditatē acquireret sic ppe foramen sicut lōge a foramine: cuius cōtrarium videt. Aliū subtilius causam attingētes: solarē rotunditatē hmōi incidētie posuit causam remotā: radiorū aūt intersecationē causam ppinquā: p hunc modū. Accipiatur foramen triangulare. a. b. c. ꝛ accipiatur superficies triangularis in corpore solis. d. e. f. ꝛ sit basis pyramidis triangularis incidentis per foramen dictum: ꝛ latera sua lateribus dicti foraminis applicent̄ que concurrāt in puncto. g. vltra foramen. Amplius imaginemur in sole circulū non penitus circunscribentē triangulū dictū sed paulo minorē: ꝛ sit. k. l. m. circumferentiam suam fere angulis suis applicantē. Sic ab hoc circulo procedunt rotunde pyramides quarū nulla pōt ptingere penitus integra: vsq ad. g. angustia foraminis impediente: potest forsan aliqua pertingere pūctū aliquē foramini ppinquiorē: vel saltē in ipsa superficie foraminis cōtentū: Vbi gr̄a sit punctus. h. tunc angulus pyramidis terminate in. h. maior est quā angulus terminatus in. g. q: longe breuioris est pyramidis ex. 6. huius capli: certū autē est q radij pyramidis breuioris ratione maioris anguli: quē cōtinent: ducti in cōtinuum ꝛ directum secabūt radios pyramidis lōgioris: ꝛ q ante intersecationē fuerant cōtēti ꝛ inclusi: post intersecationē continentes alios ꝛ includētes erunt. Igit̄ quū predicta minor pyramis sit rotūda: sequtur vt post intersecationem predictā: incidētiam faciat rotūdā sicut pz in figura: eo modo q planicies pōt figuras solidas declarare: pz enī q radij pyramidis rotunde. k. l. m. cadūt in. h. ꝛ ibi sese intersecantes extra pyramidē triangularē se dilatant. Amplius si accipiant̄ radij a sole cētraliter egredientes: q sunt fortiores alijs radiando vt sunt. r. a. x. b. ꝛ. t. c. ipsi cadent intra dictā pyramidē rotundā secantes eam in punctis. r. s. igit̄ saltē post illā intersecationē erit talis pyramis rotūda. Sed certe hec imaginatio locū haberet etiam si sol esset magne figure quadrate: in ipso enī esset triangulus aliquis q posset foramen triangulare recte respicere: ꝛ circulus triangulum circumscribens: a quo posset pyramis rotunda procedere: ꝛ ita rotunditas solis nō esset causa ppinqua nec remota huius rotunditatis incidētie. Amplius secundū hoc pyramis rotunditatē haberet ꝛ acquireret subito. s. post intersecationē istarū duarū pyramidū m. n. o. vel. r. s. q: scđm hoc quicqđ esset vltra. n. o. vel. r. s. esset rotundū cōplete: similiter quicqđ esset citra ꝛ vltra triangulare foramen: esset triangulare: cuius cōtrarium est manifestū ad sensum: q: videmus lumen ipsum paulatim rotunditatē acqrere. Amplius radij. x. u. ꝛ. p. q. applicāt se lateribus foraminis: ꝛ sequunt̄ figurā eius: ꝛ certū est qđ isti oēs alios radios includūt: q tñ rotūditatē possunt radiositate recte generare: per modū igitur radiorū: vt dictū est: impossibile est causam rotunditatis perfecte repperiri: maxime q: ex. 4. petitione iste pyramides sunt imaginarie ꝛ solum in potentia. Dico ḡ istā intersecationē ad rotunditatē posse cōferre: sed non causam totā administrare. Sciendū est igitur figurā sphericam luci esse cognatam: ꝛ omnibus mūdi corporibus pncipalioribus cōsonam: vt pote nature maxime seruatiuam: que omnes suas ptes suo intimo pfectissime cōligit: vnde ꝛ stilla in rotunditatē incidit: ad hāc igitur lux naturaliter mouet̄: ꝛ eam pelata distantia paulatim acquirit. In tēpore aūt eclipsis fit predicta nouaculatio: q: impeditur ista actio totaliter: ꝛ secūdarie diffusio lucis in parte illa: vbi radij solares abscindunt̄: deficiente enī principali lumine: necesse est ꝛ secundariū deficere. Amplius si rotūditas esset causa ex intersecatione: tunc si sol eclipsaretur in parte orientali deficeret incidētia in parte occidentali: ꝛ non solū in eadem parte cū sole: quod falsum est. Est igitur causa cū precedētibus formalis: qm̄ figura spherica nō solū est cognata corporibus mūdi pncipalioribus: sed etiam eorum operationibus principalibus cū debita distātia. Resolutio ergo vera prime partis huius cōclusionis erit adiungere simul pmā ꝛ tertiam opiniones: lumē enī solis diffusum p medium diaphanum est vera silitudo solis ꝛ eius figurā representat rotundam: nisi alicubi impediatur: sed recedente impedimento paulatim ad suam naturam reuertitur.

Capitulum tertium de qualitate & dispositione organi sensus visus.

Prima conclusio.

OMNE corpus visibile radios habere. 27.

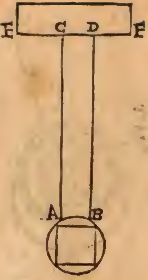
Radius enī nihil aliud est nisi speciei rei visibilis indirectum facta porrectio: corpora autē luminosa dicuntur principaliter radiare: quia radijs cetera illustrāt: ꝛ sol precipue cuius radij sensibiles sunt. Videtur autē hec ppositio epilogus omnium precedentium vt sit principium ad sequentia.

Secunda conclusio.

Visionem fieri per linas radiosas recte sup oculum initētes. 28.

Hec pz experimēto: qm̄ abscissis lineis rectis interpositione alicuius corporis opaci inter visibile ꝛ oculum cessat visio: ꝛ eo remoto fit visio. Idē etiam pbatum est in pma pclusione capli precedentis. Auctor tñ huius libri in suo comento exposuit hanc ppositionē ad sensum conclusionis scđe capli sequētis. s. q ex hac rectitudine radiorū fit vt tota species rei visibilis sit in toto organo visus ꝛ pars in parte scđm ordinē partium rei visibilis: alias vt inquit nō fieret visio distincta sed cōfusa: sed hec ima-

ginatio licet indoctis per bella videatur: procedit tamē ex oppositis principiorū tertij quarti ⁊ sexti: ideo potius generat ignorantiam q̄ scientiam vt inferius ostendemus.



Tertia conclusio.

29\. Oculus q̄ntitati capiendæ nō sufficeret vel nō cōgrueret: si rotūdus nō esset.
Ad multa citius capienda est oculo attributa rotunditas. s. propter facilitatē motus ⁊ reuolutionis. Itē si pars illa per quā immutatꝰ nō esset spherica: nō videretꝰ vnico aspectu nisi sibi equale: qđ ptꝫ: qm̄ visio est p lineas rectas super visum orientes ꝑpendiculariter: quarū cōcursus est in centro oculi vt docebitꝰ infra cōclusione tertia capl̄i sequētis. Si eīn esset supficiei plane: nō venirent sup eum ꝑpē diculares nisi a supficie sibi equali. Verbi grā sit ꝑ possibile oculi supficies plana. a. b. res visa. c. d. a puncto. b. ducatꝰ perpēdicularis sup. d. iterū a pūcto. a. extrahatꝰ alia ꝑpendicularis que cadat in. c. quū ḡ. a. b. ⁊. c. d. sint equedistātes: erit linea. a. c. ꝑpēdiculariter extracta ꝑ ypotesim equalis linee. b. d. q̄re linea. a. b. erit equalis linee. c. d. vt ptꝫ ex diffinitione equedistātium linearū: ⁊ ita res visa visus latitudinē nō poterit excedere: quare expedit vt oculus nō sit figure plane sed sphericee: in cuius centrum possint radij ꝑpendiculariter cadere a longe maiori lōgitudine. Amplius capacitati maiori cōuenit rotūditas: qm̄ figura spherica capacissima ē ysoperimetrorū. i. figurarū eq̄liter cōmēsurabilium.

Quarta conclusio.

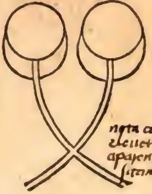
30\. Corpora diuersarū rationū necessario requirunꝰ ad oculum cōstituendum.
Hoc ptꝫ qm̄ illa pars oculi i qua viget potētia visiua est tenera ⁊ passibilis multū: qm̄ aquea est ⁊ tenerrime cōplexionis: aliter nō cōgrueret subtilitati spirituum visibilium a cerebro venientum: aliter etiā spēs sub esse suo in materiali ⁊ depurato minime reciperet: nec ꝑcipi posset tactus earū nisi in tenerrimo ⁊ subtilissimo corpore: hic aūt humor faciliter corrūperetur nisi alijs fortioribus circundaretur. Hinc dispositio talis est oculi: vt sit eius tunica exterior que dr̄ cōsolidatiua: fortis ⁊ pinguis ad retinendū oculū totū in dispositione sua iuxta duriciem eius. Intra quā est tunica que dr̄ cornea quia cornu silis est: ⁊ fortis q̄ aeri exponitꝰ: ⁊ est diaphana vt sit speciebꝰ peruia. Intra istā est tunica que dicitꝰ vuea: que est nigra ad vue silitudinē: vt obscuretꝰ in ea humor in quo viget visus: qui humor nisi aliquātulū obscuraretꝰ species in eo non possent apparere: ⁊ hec tunica est fortis ne refudet in ea humor contētus. Et habet in anteriori parte sua foramē circulare vt trāseant ꝑ eam species: cuiꝰ foraminis dyameter est circiter quantitatē lateris quadrati intra spherā vueam describtibilis. Intra istam tunicā est humor albugineus silis albugini oui diaphanus: vt ꝑ eum species ferātur libere: ⁊ talis humor est humidus q̄ humectat humorē glacialē: ne tela cum circundās siccitate corrūpatꝰ. Intimus humorū est humor glacialis glaciei silis humidus: vt sit a luce passibilis nō solū ꝑspicuitate: sꝫ etiam ratione modi substātie: ⁊ est subtilis vt faciliter moueatur: ⁊ est aliquātulū spissus vt species in eo figi possint: aliter eīn euanescerēt: ⁊ hic humor diuiditꝰ in duas partes: habet eīn anteriorē partē maioris sphere portionē: ⁊ toti oculo concentricā ⁊ equidistātem anteriori parti visus: habet etiam partē posteriorē que vitrea dr̄: que est subtilior anteriori parte: ⁊ he due circundātur quadā tela subtili: que aranea appellatur silis tele aranee: cuius officium est istū humorē fluidum cōtinere: ⁊ ita secūdū philosophos oculus habet tres humores ⁊ quattuor tunicas. Alij autē qui anatomiam diligētius ꝑspiciunt. s. medici: ponūt q̄ vuea habet ortū in pia matre sicut cornea a dura matre: que sunt due tele cerebrū circundātes: ⁊ subiungitur q̄ oculus cōstat ex tribus humoribus ⁊ septē tunicis: quarū prima est cōiunctiua siue consolidatiua. Corneam etiam diuidūt in duas partes: anteriorē vocāt corneam: interiorē vero scleroticam appellant: silr̄ etiam vueam diuidūt: cuius anterior pars vuea dr̄: posterior autem secundina: silr̄ aranea diuiditur cuius anterior pars dicitꝰ aranea: posterior retina. Sic tamē diuidere nō est cura huic philosophie: que solum cōsiderat ea que ad ecentricitatem vel concentricitatē partium oculi: ad fractionem vel directionem pertinent radiorum.

Quinta conclusio.

31\. Aliqua corporū oculū cōstituentiū a spheræ necesse ē deficere cōplemēto.
Verbi grā cōsolidatiua pinguedo. s. alba q̄ circūdat oculum si totū circūdaret: oculus nihil videret: q̄ ipsa diafanicitate caret: silr̄ vuea hꝫ foramen in anteriori parte: ⁊ silr̄ glacialis deficit a rotunditate.

Sexta conclusio.

32\. Oculorum dualitatem necesse est reduci ad vnitatem.
Duo sunt oculi ex benignitate creatoris: vt si vni accidat lesio alter remaneat. Origo autē eorum hec est: qm̄ ab anteriori parte cerebri oriuntur duo nerui cōcaui directe ad anteriorē partē faciei: qui p̄mo cōiungunꝰ ⁊ fiunt vnus neruus: ⁊ inde ramificatꝰ in duos neruos ad duo foramina cōcaua sub frōte: in quibꝰ dilatātur: ⁊ creatio oculorū fit sup ipsorum neruorum extremitate. Species ḡ visibilium per vtrūq̄ foramen recipiuntur: q̄ si iste species nō vnirētur: res vna due apparerent: sicut etiam ptꝫ si digito supposito ipsi oculo: oculus vnus a suo situ eleuetꝰ: res vna due vidētur: qm̄ spēs ꝑ duos oculos recepte in cōi neruo nō cōiungunꝰ: necesse ḡ est in comuni neruo species vniri: quod est ꝓpositū.



Septima conclusio.

Sphærarum oculũ cõstituentium necesse est aliquas esse mutuo eccentricas. 33.

Hoc pʒ: qm̃ quã species rei visibilis pyramidaliter supra oculũ oriant᷑ vt pʒ ex quarto ꝑncipio capĩ primi: cuiꝰ conus pyramidis est imaginabilis in cẽtro oculi: si nulla diaphanitatis esset diuersitas: radij in cẽtro illo cõcurrẽtes ⁊ vlterius ꝓcedẽtes se in cẽtro secarent: ⁊ dextra appareret sinistra: ⁊ sinistra dextra: qua ꝓpter machinata est natura vt anterior glacialis idẽ centrũ haberet cũ cornea ⁊ cũ humore albugineo: ne species ꝑ ipsas trãseuntes frãgerẽtur: anteq̃ peruenissent ad vim sensitiuam: que etiam in glaciali viget humore. Deinde occurrẽte sibi interiori glaciali: que est eis eccentrica: siue humore vitreo q̃ subtilior est q̃ anterior glacialis: disgregãtur radij ⁊ frãgunt᷑ a perpẽdiculari: ⁊ hinc iam non per multiplicationem specierum sed per viam spirituum deferuntur species vsq̧ ad locum iudicij interioris scʒ ad neruorum concursum.

Octaua conclusio.

Omnium tunicarum & humorum centra vna continet linea. 34.

Hec probatur ꝑ effectũ: qm̃ nõ aliter posset lux tunicas oẽs ⁊ humores regulariter introire: nec aliquis radius alicubi posset nõ fracꝰ remanere: ⁊ ꝑ cõsequẽs nõ posset esse certitudo per deportationem oculi super visibile ab extremo ad extremũ: quod falsum est: vt patebit infra.

Nona conclusio.

Oĩm radiorũ orientium sup̱ visum: vnũ solũ necesse est transire nõ fractum. 35.

Cuius ratio est quoniam super sphæras eccentricas impossibile est plures vna linea esse perpendiculares: pyramis ergo radiosa sub qua res videtur tota frangitur in ingressum interioris glacialis: excepta illa linea que transit per omnia centra: que axis appellatur.

Capitulum quartum de visione & modo eius.

Prima conclusio.

VISUM vigere in glaciali humore. 36.

Hoc experimentis docetur: quoniam si alicui tunice vel humori lesio fiat: glaciali saluo: recipit curam per medicinã: ⁊ sanatur ac restituitur visus. Ipsa vero corrupta corrumpitur visus irrecuperabiliter.

Secunda conclusio.

Visionem fieri per hoc quod in glaciali est ordinatio speciei: sicut exterius rei. 37.

Hec ꝓpositio duplicẽ patit᷑ intelligẽtiam. s. mathematicã ⁊ phisicam. Pro ꝑma supponamus q̧ oĩs magnitudo siue magna siue parua est diuisibilis in ꝑtes aliquotas oĩm denolationũ: hoc est in duas medietates in. 3. tertias in. 4. quartas ⁊c. vnde cõiter dr̃ q̧ tot sunt partes minime quot maxime magnitudinis: ꝗ nõ obstãte paruitate organi visus. i. humoris glacialis tot habet partes quod ⁊ corpus visibile exterius quantũcũq̧ magnum: ⁊ ita poterit species eius sic recipi in oculo q̧ tota sit in toto ⁊ pars in parte eius: ⁊ ordinatio partium organi ⁊ speciei correspondeat ordini partium rei visibilis: maxime quia species illa est valde subtilis ⁊ spiritualis ⁊ vt dicit Aristoteles recipitur in oculo sine materia. Ex hac igit᷑ imaginatione deceptus auctor huius libri dixit de facto ita esse in re q̧ in eadem oculi parte nõ recipiunt᷑ species diuersarũ partium obiecti visibilis: alias cõfunderẽt se ille forme: ⁊ oculus rem nõ distincte videret: huius tñ oppositũ dictum est in tertio ⁊ quarto ⁊ sexto principijs ꝑmi capĩ huius libri. Sed posita est hec imaginatio ad introductionẽ rudium quibꝰ satis est q̧ vel sic rem cõcipiant. De sapientibus vero dicitur in scdo phisicorũ q̧ abstrahentium nõ est mẽdacium: qꝛ lʒ hec imaginẽtur ea tamẽ nõ credũt ita se habere: ⁊ sic nõ decipiunt᷑. Phisica ꝗ ⁊ vera intelligentia huius ꝓpõnis erit q̧ species rei visibilis in oculo recepta est talis nature q̧ est tota in toto oculo ⁊ tota in qualibet parte: ⁊ q̧ eius speciei quelibet pars suapte natura totum obiectũ ⁊ quãlibet eius partẽ representat: vel si a diuersis obiecti partibꝰ diuerse imprimãtur oculo species partiales: tamẽ quelibet earũ recipit᷑ in oĩbus oculi partibus: nec adinuicẽ ꝑmiscẽtur nec se cõfundũt vt in sexta petitione dictum est: ⁊ hoc modo recepte species ille ita distincte obiecti partes representãt sicut si reciperentur in ꝑtibus organi diuersis vt ꝑtẽdit imaginatio mathematica predicta. Et hãc intelligẽtiã in fine huiꝰ optie. i. in. 3. lib: caplo. 2. cõclusione scda expressit iste doctor iam correctus ab errore suo.

q̊ uider̃ aucto rẽ seipsum falere.

Tertia conclusio.

Rei visibilis compræhẽsio fit per pyramidem radiosam. Appræhẽsionis autem certitudo fit per axem supra visibile transportatam. 38.

Pyramis enĩ radiosa siue species a visibili oculo impressa: rem oculo representat: sed visionis certitudo fit per rotationẽ oculi sup̱ rem: que basis est pyramidis: lʒ enĩ tota pyramis sit perpendicularis sup̱ centrũ oculi. i. anterioris glacialis: nõ tamen supra totũ oculũ: vnde sola illa perpendicularis que axis dicit᷑: qꝛ nõ frangitur: rem efficacius representat: ⁊ alij radij quãto sunt ei ꝓpinquiores tãto sunt

potiores et fortiores in representando. Ad hoc igitur oculus rotatur vt res que sub pyramide representatur simul oculo per hanc perpendicularem successiue orientem perspicatius discernatur. De hac certitudine est intelligendum quod dicit auctor libri de visu: quod nullum visibile simul totum videtur: sed per imutationem pyramidis. Dicitur etiam communiter loquentes: quod omne visibile videtur sub angulo in forma triangulari. Et loquuntur hic de angulo trianguli imaginarij secundum communiter loquentes: per quem intelligitur speciei visibilis extensio.

Quarta conclusio.

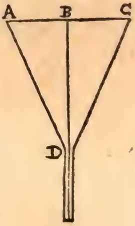
39. Non sub quocunque angulo rem videri. *sed recto minore*

Non est visio sub angulo acutissimo. i. angulo contingentie: quia iste angulus vt probatum est in geometria capitulo de circulo: est indiuisibilis: angulus autem sub quo aliquid videtur est diuisibilis: quia diuiditur per axem mediam. Amplius determinata est anguli magnitudo sub quo potest esse visio: quia diameter foraminis vuee sicut docet anatomia: est quasi latus quadrati quod describitur intra spheram vueam: quod si ab extremis huius foraminis linee ad centrum eius ducantur: constituent super eum angulum rectum: hoc patet quoniam ab angulis quadrati linee recte secant se orthogonaliter: igitur si in centro vuee esset visio: videretur sub angulo recto precise: si diameter foraminis esset latus quadrati precise. Nunc autem centrum oculi quod est anterioris glatialis interius est quam centrum vuee: quia vuea minor est quam cornea: et secat corneam: nam foramen eius cornee applicatur: quare maximus angulus sub quo fit visio radiosa est minor recto: nisi foramen vuee sit paulo maius quantitate predicta: nec loquor hic de visione per radios extra pyramidem radiosam super oculum orientes: de quibus infra videbitur.

Quinta conclusio.

40. Visionem fieri sub curta pyramide visui proportionata: & angulo inchoato.

Hec ex predictis patet quoniam radij pyramidis omnes excepto vno occurente interiori glaciali franguntur a perpendiculari: vt dictum est in vltima conclusione precedentis capituli: nec vlterius in conum constringuntur: quamuis igitur radij ad angulum inclinentur: non tamen angulariter applicantur: nisi imaginatiue tantum: imo quum peruenit species ad humorem vitreum. i. interiorem glacialem: procedit secundum legem spirituum magis quam secundum legem diaphaneitatis: incuruatur enim secundum viam spirituum vsque ad neruum obticum.



Sexta conclusio.

41. Declinatio radiorum angularis iuuat ad comprehensionem quantitatis.

Duplex est declinatio angularis radiorum altera ad angulum altera ab angulo: et de vtraque vera est propositio. De prima patet quoniam quanto radij ad acutiorem angulum declinant: tanto species amplius adunantur et constringuntur: necesse est per consequens nisi aliquid aliud impediat: vt rei quantitas ex hac declinatione melius videatur in oculo: sed hoc ad cognitionem quantitatis non sufficit: vt infra patebit. De secunda etiam probatur quia ex secunda huius capituli per dispositionem speciei in glaciali habetur cognitio rei: ergo species debet esse extensa: quod non esset si radij ad angulum concurrerent in puncto.

Septima conclusio.

42. Per radios qui oblique super oculum oriuntur: visio vigoratur & ampliatur.

Vigoratur inquam quoniam licet per solos radios perpendiculariter cadentes certa et distincta fiat visio principaliter: tamen certum est quod quilibet punctus in visibili signatus videtur per radium suum oculum perpendiculariter tangentem: dominatur enim motus perpendicularis et iste oblique incidens cooperatur. Amplius extra pyramidem radiosam aliqua videntur: nam pyramidis angulus breuioris latitudinis est quam se habeant res que vno aspectu videri possunt: radij quare istorum super oculum venientes aliquo modo tangunt et mouent oculum per radios in ingressu oculi fractos: et ad centrum declinantes vt talia debiliter ab oculo aduertantur: illa autem que sunt oculo facialiter obiecta: efficatius presentantur quia tam recte quam flexe apprehenduntur. Quare autem punctus representatus per radios tam diuersos in vno loco appareat: in tractatu de radijs fractis tangetur scilicet in tertio libro huius capitulo finali.

Octaua conclusio.

43. Operationem visibilis in visum esse dolorosam.

Hoc probatur quoniam operatio cuiuscunque visibilis in visum est vnius generis: quare operatio vehementium luminum in oculos sit lesiua sensibiliter ac dolorosa: sequitur omnes operationes luminum esse tales: quamuis non percipiatur. Et hoc est argumentum huius posterius capitulo de qualitate visus: et rationabile videtur: quoniam nullum est visibile tantum oculo delectabile: quin per continuam inspectionem ipsum afficiat fatigatione: cuius fatigationis causa videtur esse precedens inspectio. Hoc quidem sapit iste positus: quamuis alij posterius naturalia tractantes dicant quod sensibile est perfectio sensus: in actu quare sentiendi non est aliquid tristitiam inducens: nisi sit imoderatum. Nec videtur cogere ratio predicta si excellens sensibile inducit dolorem: quare et mediocre: motus enim vehemens grauat: motus vero mediocris delectat et iuuat. Restringitur igitur quod hic dicitur ad visionis cuiuscunque prolongationem: et non ad quamcunque breuem inspectionem: siue intuitionem. Vel intelligitur solum de per accidens: naturales autem loquuntur de per se: nam simul cum specie rei visibilis venit ad oculum alia qualitas lesiua vt calor: species autem non ledit. *restringit hec propositio*

Nona conclusio.

Mathematicos ponẽtes visum fieri p radios ab oculo micãtes frustra conari. 44.

Uisio enĩ sufficienter fit per modũ prescriptum: p quem saluari possunt oĩa que sunt circa visum apparentia maxime si fiat visio per radios rectos: secus de reflexis & fractis: ergo superfluum est ponere sic radios &c. Hoc dico auctoris pspectiue vestigia sequẽdo: q̄ꝙ aliud doceat alchindus de aspectib⁹: quod platonici etiam senserũt: aliud pbi sapere videtur in multis locis: aliter Augustinus q̄ innuere videtur ꝙ virtus aĩe aliquid in lumine oculi operet. Pro huius tñ & sequẽtis ppositionis elucidatione scito ꝙ triplex fuit antiquoꝝ opinio de modo vidẽdi: pma epicuri ponentis radios exire ab oculo vsq; ad rẽ visibilẽ. Secunda platonis ponẽtis ꝙ radij ab oculo exeuntes obuiant radijs a visibili ortis in medio. Tertia aristotelis ꝙ soli radij a visibili veniunt ad oculum.

Decima conclusio.

Radios quoscunq; ab oculo micantes: & orientes super visibile: ad visionem impossibile est sufficere. 45.

Quod si ponãtur radij ab oculo exire sup rem visibilẽ quasi contingendã: aut redeunt ad oculũ: aut non: si nõ redeunt: visio per eos nõ fit: quũ aĩa a corpore nõ exeat. Si redeunt qualiter? nunquid animati sunt? nunqd oĩa visibilia specula sunt reflectendo radios? Amplius si redeunt aut cũ specie rei visibilis aut sine ea: hoc secundũ dici nõ põt: qr sine specie rei non fit visio: si aũt cum forma rei visibilis: sic frustra exeunt: qñ lux ipsa vel forma seu species visibilis virtute lucis in totũ medium se diffundit: ergo non est necesse vt ipsa aĩa radijs quasi nuntijs vtatur. Amplius qño aliqua virtus oculi vsq; ad sidera protenderetur: etiam si totum corpus in spiritus resolueretur. Amplius oẽs alij sensus cognoscũt intus suscipiendo & nõ extra mittendo aliquid: ergo similiter & sensus visus.

Vndecima conclusio.

Lumen oculi naturale radiositate sua visui conferre. 46.

Oculus enĩ vt dicit Aristoteles nõ solũ patitur sed etiam agit quẽadmodũ splendida corpora: lumẽ ergo naturale necessarium est oculo ad alterandas species visibiles: & efficiendũ eas pportionatas virtuti visiue: qñ ex luce solari diffundũtur: sed ex lumine oculi cõnaturali: oculo contẽperantur: hinc dixit Aristoteles ꝙ quum motus lucis ad exterius fortis est: disproportionalis & non bona fit visio quantũcũq; motus ad interius fortis etiam sit: sicut ptꝫ in radio solis qui obruit visum: nec patitur se pportionari visui. Sic igit ptꝫ ꝙ aliquo modo fit emissio radioꝝ: sed nõ modo Platonico. s. vt radij ab oculo emissi quasi in forma visibili imergantur: & intincti reuertant oculo nunciantes. Aliqd tamẽ operant radij vnius hoĩs in visum alterius predicto modo: qñ visus est in omnibus aĩalibus eiusdẽ rationis: quũ ergo quedã aĩalia p lumẽ oculoꝝ suoꝝ sufficiant coloribus virtutẽ multiplicatiuã dare: vt ab eis nocte videri possint: sequitur vt lumen oculi aliquid operetur ad visum: sed an aliquid vlterius faciat: non diffinitio: huius auctoris: vt dictum est: sequendo vestigia.

Capitulum quintum de medio videndi & conditionibus eius.

Prima conclusio.

SINE luce nihil videri. 47.

Hoc probat: color enĩ sine luce nõ põt efficaciter radiare: qñ primum in omni genere est causa oĩm posteriorum: prima autẽ radiositas est lucis: & ideo oẽs alie ab ipsa causatur. Color ergo efficaciter radiare nõ põt: nisi luci admixtus.

Secunda conclusio.

Visũ nihil cõprehẽdere: nisi i pportiõali distãtia p̄sentatũ. 48.

Distantia siquidẽ vel remotio visibilis requiritur ad visionẽ: si enĩ res visibilis oculo supponat: lux super ea nõ pfunditur: & p ɔ̃ns nõ potest mouere visum: ꝙ si ipsum visum sit luminosum: dico vt in precedẽte cõclusione tactũ est: qñ visibile per lumen oculo cõtẽperatũ fit & pportionatũ. Si aũt sit nimis remotũ visibile ab oculo euanescit spẽs eius & nõ videt: aut secũdũ alios euanescit radius visualis ab oculo exiens: & in diuersis qdẽ cõplexionib⁹ hoĩm diuersimode. Vñ qdã senes melius vidẽt in maiori distantia q̄ in minori: qñ lumẽ oculoꝝ suoꝝ multũ sed nõ clarũ ẽ & in disgrediendo serenat: & seneratũ speciei rei visibilis supfundit vt efficati⁹ moueat. Alij aũt sunt q̄ hñt lumen modicũ & serenũ & illi a pximo vidẽt. Alij aũt multũ & clarũ: & illi a remotiori vidẽt. Sup oẽs aũt alios illi q̄ oculos pfũdos hñt ceteris pib⁹ a remotiori vidẽt: qr radij luminares ab oclo micãtes nõ ita disgũgunt sicut ab oclis eminẽtib⁹: ꝙ si adiũcti siue adunati fuerint forti⁹ sup visibile porrigunt.

Tertia conclusio.

Sola videri recte facialiter obiecta. 49.

Hoc ptꝫ ex predictis: visus enim fit principaliter per pyramidẽ radiosam a basi opposita sup visum perpendiculariter orientem: fit etiam visus p radios extra pyramidẽ super oculum oblique orientes: sed super oculũ oriri nõ possunt qui in supficiem oculi non cadunt: sed ex aduerso eius oculo se representãt. Et dico videri recte: qñ reflexe in speculis aliqua aliter videntur: vt infra libro scdo dicetur.

Quarta conclusio.

50. **Nihil videri nisi proportionaliter quantum.**

Cuius ratio est quoniam vt supra pz: visus fit per pyramidē radiosam cuius basis est res visa: ergo necesse est quod videtur esse quantū ꝛ extensum. Dico aūt ꝓportionaliter quātū: non ergo diminutū: qꝛ tale non sufficeret oculum dolorose ꝛ sensibiliter iprimere: vt dixit octaua precedētis capituli. Corpus etiam excedentis magnitudinis vno aspectu videri non potest: vt patet ex tertia precedentis.

Quinta conclusio.

51. **Visum non fieri nisi per medium diaphanum.**

Cuius ratio est: qꝛ spēs non multiplicanᷓ nisi per diaphana corpora: quorū subtilitas cōgruit formis multiplicādis sine materia ꝛ sine materialib⁹ cōditionib⁹: vt cōueniens ē ad hoc ꝙ oculo iprimanᷓ. Et quāuis oīe corpus sit susceptiuū influentie corporis celestis: certum est nullum corp⁹ oīno carere perspicuitate: quum sit cōis natura corpori supercelesti ꝛ inferiori. Hinc est ꝙ nulla densitas ꝓhibet omnino transitū celestium virtutum ꝛ specierū: quis nos lateat: hinc lynceus dicuntur videre ꝑ medium parietem: ꝛ hoc idem dicitur de quibusdam hominibus qui vident in profundum terre.

Sexta conclusio.

52. **Omne visibile necesse est medium & organum in densitate transcendere.**

Cuius ratio est qꝛ nihil potest esse coloratū vel luminosum nisi densum. Amplius nec glacialem mouere potest: si visibile eam in perspicuitate excederet. Amplius sine luce nihil videtur: ꝙ si illud qđ videtur perspicuum esset vt aer: in eo figi non posset lux: sine cuius mixtione nulla species potest radiare siue videri: vt patet ex prima huius capituli: mouent enim simul lux ꝛ color.

Septima conclusio.

53. **Omnia quæ videntur tempore comprehendi.**

Immutatio eni visibilis sensibilis nō fit nisi in tēpore: sicut docent illusiones sensuum in veloci quorūdā trāsportatione. Amplius discretionē aut diuisionē rei nō nisi in tēpore fieri: pz qꝛ in corpore velociter circūgirato: punctus videtur esse circulus. Amplius celū velocissime mouetur nec tamē percipitur nisi in tpe perceptibili. Amplius ꝗuis secundū quoſdā immutatio possit fieri instātanea: hoc tñ ab ista pōia ē extraneū: vt īfra demōstrabiᷓ. Quicqđ tñ sit de ṽitate hui⁹ q̄stionis: certitudo tñ de visibili nō fit nisi ī tpe: trāsportatione axis radialis siue pyramidis sup rē visā: vt pz ex tertia ꝓcedētis capꝉi.

Octaua conclusio.

54. **Visionem non lucide fieri sine congrua sanitate oculi.**

Idcirco diciᷓ ꝙ error visus aliquādo est a causa exteriori ꝓpter egressum a proportione in aliqua cōditione ad visum necessaria: vt distātia vel oppositione vel hmōi alia apprehensione. Aliqñ ex causa interiori sicut ocli debilitate ꝛ paucitate spirituū vel inflatiōe ocli: ab extraneo humore vꝉ alia lesione.

Capitulum sextum de cōditionibus obiecti visibilis.

Prima conclusio.

55. **VARIAS & multas esse intentiones visibiles: & quasdam primario quasdam secundario comprehendi.**

Quidā distingunt duplex obiectum visibile materiale. s. ꝛ formale: materiale est res que videtur: formale est accidens quo videtur: ꝛ hoc duplex alterum ex parte rei visibilis vt lux vel color: alterū ex parte visus vt species lucis vel coloris recepta in oculo. Apud aristotelē vero visibile materiale diciᷓ visibile per accidens: visibile formale ꝑmo modo est visibile per se: visibile formale secundo modo neq͵ est visibile per se neq͵ per accidēs qꝛ nō videtur. Sꝫ visibile per se est duplex ꝓprium. s. ꝛ cōmune: ꝓprium vt lux aut color: cōmune vt figura magnitudo ꝛč. Hic autem cōmuniter loquimur de visibili formali siue sit ꝓprium siue cōmune: ꝛ vocamus ipsum intētionem visibilem. i. dispositionē rei visibilis de qua ꝑ visum iudicamus. Si quidē sunt vigintidue intentiones visu cōprehēsibiles: lux: color: distātia: situs: magnitudo: corporeitas: figura: mot⁹: cōtinuatio: discretio vꝉ separatio: numerus: quies: asperitas: lenitas: diaphanitas: spissitudo: vmbra: obscuritas: pulcritudo: turpitudo: spissitudo: diuersitas. He sunt ꝓncipales intētiones sunt ꝛ alie scđarie q̄ sub illis cōtinentur: sicut ordinatio sub situ collocatur: ꝛ scriptura siue sculptura sub ordinatione aut figura: rectitudo ꝛ curuitas sub figura. Amplius multitudo ꝛ paucitas sub numero: equalitas ꝛ augmentum sub similitudine ꝛ diuersitate: alacritas ꝛ risus ꝛ huiusmodi comprehenduntur sub figura faciei: ꝛ sic de aliis multis. Principaliter tamen mouent visum lux ꝛ color suis speciebus oculum sigillantes: ꝛ ex consequenti alias prenominatas visui representantes: quia sub eisdem qualificantur.

Que an realiter sint distincte a luce & colore ad hanc doctrinam est impertinens: licet de eis distincte loquimur.

Secunda conclusio.

Non omnes intentiones visibiles comprehendi sensu spoliato. 56.

Dico sensum spoliatum solum sensum exteriorem: quia quedam apprehenduntur non solo sensu: sed cooperante virtute distinctiua & argumentatiua quasi imperceptibiliter immixta: quedam etiam adminiculo scientie acquisite. Verbi gratia quum apprehenduntur duo indiuidua esse similia: ipsa similitudo neutra formarum est nec comprehenditur solo sensu: sed collatione vnius ad alterum. Similiter de corporum differentia: & aliarum rerum. Amplius scriptura non comprehenditur solo sensu sed per distinctionem partium quam facit virtus distributiua: mediante visiua. Similiter res assuete quum videntur statim cognoscuntur non tamen nisi in relatione speciei recepte ad habitum memorie: & hoc quasi per ratiocinium.

Tertia conclusio.

In distinctione intentionum visibilium ratione impceptibiliter argumentari vel operari. 57.

Noticia si quidem sensus exterioris non est absoluta: sed concreta que multa simul comprehendit: ideo nullum visibile cognoscitur sine distinctione intentionum visibilium: vel sine collatione rei recepte ad vniuersalia principia cognitorum prius a sensibilibus abstracta: que fieri non possunt absque ratiocinio: sed tempore non indiget perceptibili vis discretiua in his communiter apprehensis: quia arguit per aspectum ad sibi notissima: nec arguit per compositionem & ordinationem propositionum: vis enim distinctiua nata est arguere sine difficultate: que etiam aptitudine naturaliter exeritur: vnde etiam in pueris apparet: quod magis pulcra minus pulcris solent preponere: non nisi naturali ratione facta comparatione eorum.

Quarta conclusio.

Lucem & colorem comprehendi sensu spoliato. 58.

Per hoc enim tantum apprehenduntur quod vltimum sentiens his tingitur: id est organum visus his afficitur: vel potius speciebus eorum que suapte natura talia obiecta representant.

Quinta conclusio.

Inter lucem & colorem simul oculum mouentes solam discernere virtutem distinctiuam. 59.

Tangunt si quidem pupillam & mouent sensum secundum eandem partem: ergo in sensu confuse recipiuntur: & ita per sensum distingui nequeunt: ergo non distinguuntur nisi per experientiam de luce & colore habitam per scientiam eorum acquisitam.

Sexta conclusio.

Quiditatem lucis & coloris solo sensu minime comprehendi. 60.

Hoc vocabulum equiuocum est: vno enim modo quiditas coloris hic dicitur species coloris: que discernitur non nisi per rationem arguentem ab actu videndi ad formas consuetas. Similiter & lucis quiditas id est natura determinata: hoc est an sit lux solis vel lune: vel ignis: scientia dignoscitur non sensu: quum tamen color inquantum color: & lux inquantum lux: sensu spoliato capiantur.

Septima conclusio.

Nullam intentionem visibilem: preter lucem & colorem: solo sensu comprehendi. 61.

Hoc patet quia quiditas coloris inter omnes differentias visibiles immediatissima est colori: sicut quiditas lucis luci: si ergo quiditas non solo sensu capiatur: multo fortius nec alie quecumque intentiones visibiles: sed per distinctionem siue distinctam argumentationem & scientiam: ex quo patet quod solum lux & color: & non quiditas lucis & coloris sunt proprium obiectum visus.

Octaua conclusio.

Colorem in eo quod color prius comprehendi sua quiditate. 62.

Hoc ex premissis patet: quia color in eo quod color per se facile capitur: quiditas autem eius non nisi per scientiam & argumentationem. Hoc etiam patet experimento: quia coloratum in luce subobscura positum coloratum esse cernitur: & tamen coloris quiditas ignoratur. Unde patet quod quiditas coloris hic alio modo accipitur quam prius scilicet pro determinata coloris natura: vt sit sensus propositionis quod prius cognoscit visus colorem esse quam sciat quis color sit: id est prius confuse quam distincte.

Nona conclusio.

Sola distantia mediocris visui est certificabilis: & hoc per corpora interiacentia continuata & ordinata. 63.

Distantia si quidem rei visibilis a visu non comprehenditur sed ratiocinatione colligitur: docuit hoc philosophus. Si enim clausis palpebris res non videtur quam videtur aptius: sequitur & similiter colligitur vt illud quod videtur non sit visui adherens: & hoc est in anima certum sine necessitate argumentationis iterande in quibet visione. Dico quod comprehensio quantitatis distantie accipitur a quantitate corporum interiacentium: Vbi gratia nubes in terra plana existentibus videntur celo contiguari

in terra montuosa videntur terre ꝓpinque: quia alicubi montium altitudinem non excedunt. Certificatio igitur distãtie nubium causatur a cõprehensione corporis interiacẽtis: quod si corpora interiacentia ordinata nõ sunt sed cõfusa: certificari nõ poterit apprehensio quãtitatis distantie. Amplius si nõ sit distãtia mediocris nõ pertinget visus vsqꝫ ad plenã distinctionem corporũ remotorum interiacentium: propter debilitatem speciei visibilis ex distãtia: sicut colligitur ex dictis supra capitulo. 2. cõclusione. 5.

Decima conclusio.

64. Certificari quãtitatẽ distantiæ per resolutionem interiacentis spacii ad magnitudinem mensuræ experimentaliter notæ.

Si enĩ corpora interiacentia sunt secundũ totũ et partẽ inequaliter disposita et incerta: nunquã ex ipsis certificabitur incerta distãtia: ergo necesse est in ea aliquod certum inuenire cuius quãtitatis noticia per experimentũ sit nota: ad quod totum spacium resoluatur: sicut ad pedẽ vel ad quãtitatem corporis mensurantis: vel ad aliquid quod sit notum imaginationi mensuratoris vel cõprehensoris.

Vndecima conclusio.

65. Distãtiam orizontis maiorẽ apparere: quã alterius partis hemisperii cuiuscunqꝫ.

Hoc patet ex premissis: si enĩ ex corporũ interiacẽtia distantie quãtitatis dignoscitur: vbi maior magnitudo interiacere videtur; necesse est vt etiã maior distãtia videatur: sed inter orizontẽ et vidẽtẽ interiacere videtur maior latitudo quam inter vidẽtẽ et zenit: ergo incõparabiliter plus distare videtur orizon quam alia pars celi quecunqꝫ.

Duodecima conclusio.

66. Orizontem apparere terræ coherentem.

Cuius ratio est quia nõ cõprehenditur aliquo modo spaciũ inter vltimã partẽ terre visibilẽ et ipsum celũ.

Decimatertia conclusio.

67. Longitudinem radiorum a visu compræhendi.

Voco longitudinem radii spatium vel distantiam per quã multiplicate sunt species a re visibili vsqꝫ ad oculũ: et hanc distantiam sentit visus hominis. Quod patet experimento in speculis vbi creditur res esse in extremitate linearũ radialium: quas totas extimat porrigi secundũ cõtinuũ et directum: et secundũ illas iudicat esse visibile cõtra partẽ que visum mouet: vnde species mouens oculũ nõ solum ostendit oculo ipsum obiectũ sed etiam mediũ radiũ: cuius ipsa species est extremũ: in quo tamen radio figi nõ potest aspectus: quia totus ille radius similitudo est alterius. Unde patet quod ista cõclusio est limitanda. s. quod nõ cognoscitur lõgitudo radii sensu spoliato. i. solo sensu exteriore: ex ipsa enĩ speciei recepte in oculo intẽsione aut remissione arguit ratio distãtiam rei visibilis maiorem vel minorẽ. Ex hac tamen propositione radiorũ egredientiũ fortissimũ posset sumi argumẽtũ: quia oculus melius cognoscit quod suũ est quam alienũ.

Decimaquarta conclusio.

68. Situm oppositionis rei visæ distinctione compræhendi.

Intentio si quidem situs tria includit: oppositionẽ rei diametralẽ: et positionem respectu oculi secundum rectitudinẽ et obliquitatẽ: et ordinem partium rei ad inuicẽ. Primus ergo modus distinctione cognoscitur: res enim per hoc opposita facialiter esse comprehẽditur: quia forma eius super visum perpẽdiculariter erigitur: quod esse nõ posset: nisi opponeretur. Amplius quum opponitur videtur: latet autem quum non opponitur.

Decimaquinta conclusio.

69. Situm obliquitatis compræhendi ex compræhensione diuersitatis distantiæ extremorum rei visibilis.

Quum enĩ certificatur distantia secundũ quod docet. 13. propositio huius capituli: necesse est vt si extrema inequaliter distare repperiantur: quod tunc res oblique respiciens oculum iudicetur.

Decimasexta conclusio.

70. Certam situs differentiam ex ordine speciei in oculo compræhendi.

Sicut enim ex ordine speciei comprehenditur ordinatio rei distincte vt supra ex secunda cõclusione quarti capituli: sic et ordinatio partium cognoscitur.

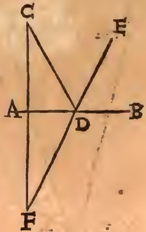
Decimaseptima conclusio.

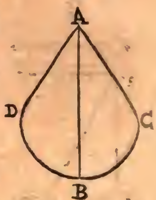
71. Figuram rei visibilis ex duabus vltimis situs differentiis compræhendi.

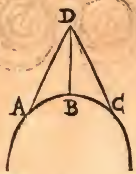
Verbi gratia ex maiori distãtia medii quam extremorum cõprehenditur concauitas: et econuerso cõuexitas: et omnes figure incisionis comprehenduntur ex cõprehensione ordinis partium rei visibilis.

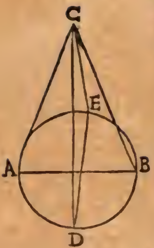
Decimaoctaua conclusio.

72. Figuram rei visibilis multum distantis minime certificari.









Cuius rõ ẽ q: nec distãtia certificari põt: ꝛ ꝑ ꝯñs nec sit⁹ nec figura: q: nõ cognoscit̃ inequalitas lineaꝝ.

Decimanona conclusio.

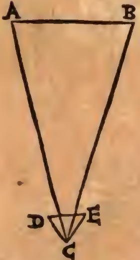
Quantitatem anguli sub quo res videtur: minime sufficere quãtitati rei visibilis capiendæ. 73.

Loquit̃ hec cõclusio de angulo imaginario linearũ: per quẽ phisice debet intelligi speciei recepte in oculo intẽsio vel remissio tanta vel tanta. Stãdo ğ in imaginatione mathematica cõclusio ꝓbatur: si in circulo ducãtur diametri se se secãtes orthogonaliter: ponatur ꝙ vna diameter sit fere directe obiecta oculo: reliqua vero nõ: ꝛ per ꝯñs oblique oculũ respiciens: sub longe minori angulo apparebit: sicut pꝫ in figura: nec tanto minor iudicatur quãto angulus suus est angulo alterius minor: sic enim non appareret circulus sed oblonge figure globus: quod falsum est.

Vigesima conclusio.

Compræhensionẽ quãtitatis rei ꝑcedere ex compræhensione anguli pyramidis radiosæ: & ex basis cõparatione ad q̃titatẽ anguli: & lõgitudinẽ distãtiæ. 74.

Sola igitur cognitio quãtitatis anguli nõ sufficit ad quãtitatẽ discernẽdã: cõfert tamẽ ad hoc sicut pꝫ ex quinta ꝓpositione capĩ quarti supra: angulus quidẽ comprehẽdit̃ ex dispositione forme in oculo: sed q: etiam ipsi radij ab oculo cõprehenduntur: vt docuit. 13. ꝓpositio huius: nõ est certitudo noticie quãtitatis nisi refferẽdo angulũ equalẽ cũ inequali lõgitudine radiorũ ad basim inequalem: q: in aliquiétũ est lineas ab angulo ꝓcedentes tanto amplius abinuicẽ distare: quãto remotius ꝓtenduntur ꝛ per ꝯñs tanto maiorẽ basim cõtinere. Quod autẽ virtus apprehẽsiua quãtitatis ad longitudinem distantie respiciat: nec solũ ad angulũ: pꝫ experimento: q̃ñ si monoculus aliquẽ parietẽ magnum aspiciat: ꝛ q̃titatẽ ei⁹ certificet: deinde oculo suo manũ anteponat: ipsa manus videbit̃ sub eodẽ angulo vel sub maiori q̃ paries visus sit: nec tñ tanta ei apparebit: q̃tus paries apparet: q: minus distat.



Vigesimaprima conclusio.

Certificatio quãtitatis fit completiue per motum axis. 75.

Apprehensio per ipsum certior est: ꝛ ideo defertur axis per basim ꝛ super spacium ꝛ intra angulum sub quo res videtur: sicut apparere potest ex tertia quarti capituli supra.

Vigesimasecunda conclusio.

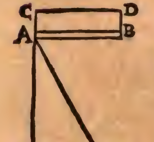
Nulla quantitas rei immoderate distantis est oculo certificabilis. 76.

Re enim multũ distante: axis qui suo motu certificat visum in parte parua rei visibilis trãslat⁹ nullũ facit angulũ sensibilẽ in centro visus: q̃ñ vt supra pꝫ: res multũ distantes sub acutioribus videntur angulis: ꝛ ideo translatio axis intra acutum angulũ modica: non est visui perceptibilis: nec satis efficacis apprehẽsionis: amplius nec certificat̃ q̃titas spacij interiacẽtis vt docet ꝓpositio. 9. huius capĩ.

Vigesimatertia conclusio.

Distinctionem visibilium colligi ex distinctione radiantium formarum. 77.

Quando enĩ species oculum mouentes sunt diuerse: ꝛ res diuersas necesse est apparere: nisi distãtia ab oculo diuersitatem earum abscondat. Et per oppositum intellige qñ apprehenditur continuitas que est nona intentio: ꝛ ex hoc intellige qualiter apprehendatur numerus qui est decima intẽtio.



Vigesimaquarta conclusio.

Motus appræhenditur ex diuersificatione situs rei motæ ad aliud immotũ: vel ad ipsum visum. 78.

Quã diu enĩ hꝫ eundẽ sitũ ad aliũ imotũ: ꝛ ip̃m imobile videt̃. Et q: visus nihil videt nisi sub forma prescripta: ideo ꝑcipit̃ motus quũ apud cẽtrũ visus immoti variat̃ angulus declinationis sensibilr.

Capitulũ septimũ de erroribus qui accidũt vidẽdo ꝑ radios rectos.

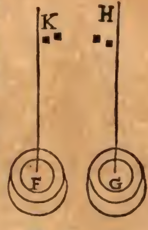
Prima conclusio.

OMNE visibile ad vtrũq3 oculũ i maiori pte cõsiliter situari. 79.

Quod pꝫ q̃ñ qñ res vtroq3 oculo inspicitur: vtriusq3 pupilla ad rẽ dirigitur: ꝛ axes duoꝝ oculoꝝ in eodem pũcto rei vise figuntur q̃ opponitur cẽtro vtriusq3: ꝛ vno moto alter cõsimiliter mouetur: alij autẽ radij singulorum oculorũ habent in maiori parte situm consimilem respectu axium: ꝛ ideo res apparet in maiori parte vna ꝛ eodẽ modo disposita vtriq3 oculo: quoniam sicut supra patuit certitudo rei visibilis est per axes.

Secunda conclusio.

Ex variato sensibiliter situ visibilis respectu duoꝝ axium: ip̃m duo apparere. 80.

Si eni visibile ad vnũ axem sit dextrũ ad alium sinistrũ sensibili diuersitate: apparet vnũ duo. Verbi grã si figantur axes duorum oculorũ. f. g. in punctis. h. k. diligenti intuitione apparebit. k. duo similiter r. h. q₂ vtrunq₃ est vni axi dextrũ ₇ alteri sinistrũ: ꝯña pꝫ ex dictis supra capl'o. 3. cõclusione. 2. ₇ capl'o. 4. cõclusione. 3. ₇ capl'o. 6. cõclusione. 13. Amplius si ex eadẽ parte respiciant axes sed ex magna declinatione ad partẽ vnã: fit sensibilis variatio anguli quẽ cõstituit radius sub quo videt̃ res tãte declinationis cũ vtroq₃ axe: apparet siliter vnum duo: verbi gratia. m. pũctus ex eadẽ parte respicit vtrunq₃ axem. a. c. ₇. b. d. tamen propter magnã varietatẽ anguli. m. a. c. ₇. m. b. d. fit diuersificatio situs in oculo ₇ apparet vnũ duo: alijs etiam modis apparet vnũ duo sicut supra ostẽsum est.

Tertia conclusio.

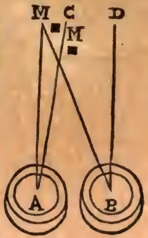
81. In apprꝺhẽsione visibiliũ ixta sensum: sciam & rõnẽ vel syllogismũ variari.

Verbi gratia in luce ₇ colore q̃ sensu cõprehendũtur erratur ex distãtia: multi eni colores iuncti ex distantia videntur vnus color: siliter ₇ in luce debili vnus color videt̃ alius esse. Nõ si dixeris sensum nõ decipi circa ꝓpriũ obiectũ. Scito ꝓprium obiectũ esse colorẽ tãtũ ₇ lucem: nõ autẽ aliq̃ speciem lucis ₇ coloris q̃ solo sensu minime capiunt̃: vt supra dictum ẽ. Siliter ₇ secundum distãtiam: ad scientiam ₇ rationem accidit deceptio: vnde mota aliquando videntur quiescentia ₇ econuerso.

Quarta conclusio.

82. Stellas in orizonte maiores apparere quam in aliqua alia parte celi.

Hoc ꝓbatur ex. 9. cap. 6. quia magis distare videntur quãdo sunt in orizonte: ₇ q₂ ex equali angulo ad maiorẽ distãtiam relato: res maior esse iudicatur: vt pꝫ ex. 19. cap. 6. quã in orizonte sub eodẽ angulo repꝛesentãtur oculo sub quo alibi in celo: ₇ sub maiori spatio videantur presentari: cõcluditur in orizõte rẽ apparere maiorẽ. Uñ secũdũ veritatẽ si distantia esset maior (quod astrologi cõcedunt. s. q₂ est excessus medietatis terre) angul⁹ esset minor: ₇ res videretur esse minor: nõ autẽ sic est q₂ ille excessus est insensibilis respectu tante distante: ideo angulus equalis ad apparens maius spatium relatus rem indicat esse maiorem: ad hoc etiam est interpositio vaporum de qua tangetur infra.



Quinta conclusio.

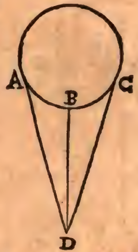
83. Corpora sphꝺrica ex distantia apparere plana.

Quũ eni sphericitas vel cõcauitas discerni nõ possit: nisi ex cõpꝛehẽsa inequali distantia partium rei vise ex. 17. capĩ. precedentis: necesse ẽ in hmõi ꝑceptione visum deficere immoderatione distãtie: si igĩ nulla pars rei vise plus distare videat̃: necesse est visus dispositionis apparere totã supficiem rei vise.

Sexta conclusio.

84. Quadratas magnitudines in distantia apparere oblongas.

Cuiuius ratio est: qm̃ excessus radiorũ cadentium in latera quadrati oblique respicientia oculũ: non est ꝓportionalis ꝓportione sensibili ad radios cadẽtes in lat⁹ quadrati directe oculũ respicientis: ꝑ cõparationẽ ad totã distãtiam: visus q̃ non sufficit discernere obliquitatẽ lateris qð oblique videtur: ₇ sub lõgioꝛib⁹ radijs ₇ minori angulo: ₇ ideo tale lat⁹ appꝫ min⁹. Nõ si angul⁹ q̃drati recte opponat̃ visui: apparebit quadratũ rotundũ: visu ob distãtiam nõ compꝛehendente vel discernente angulum.



Primi libri perspectiuꝺ finis.

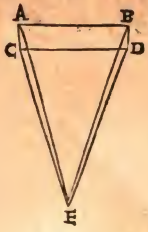
Liber secundus Perspectiue cõis de radiis reflexis: habet capita. 5. in quibus sunt propositiones. 56.

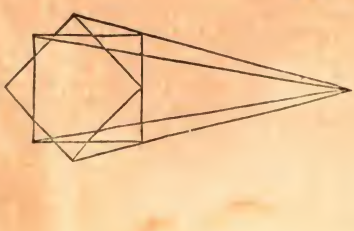
Capitulum primum de natura & proprietatibus reflexionis.

Prima conclusio.

1. VCES primarias & secũdarias puras & coloribus imixtas a densorum corporum superficiebus reuerbirari.

Hoc ꝑ experimẽtũ pꝫ in speculis ferreis ₇ hmõi alijs. Amplius ꝓpter reflexionẽ radiorũ a supficie terre color intensior ẽ ꝓpe terrã q̃ in medio aeris interstitio. Et siľr in vallibus ad q̃s dẽsitas vtriusq₃ mõtis radios reflectit. Cuius ratio est: qm̃ radius lucis ₇ coloris per diaphanũ aptus natus est incedere: ₇ occurrente corpore dẽso vel parũ diaphano virtus radiationis ₇ influentia radiosa nõdũ terminata: quum indirectũ trãsire nõ possit: in reflexionẽ ducitur diffusionis cõpulsu: nõ solũ occurentibus corporibus epacis ₇ terrestribus: verũ etiam perspicuis minori genere ꝑspicuitatis: cuiusmodi est aqua ₇ vitrũ. Jmo forte ab omĩ corpore sublunari fit reflexio q₂ nullum est tam diaphanũ q̃n aliquomodo sit densum ₇ opacũ: nã de aere Aristoteles dat





exemplū in quodā hoīe q̄ suam faciem ante se videbat in aere. Unde radius solis quo ad sui nobiliorē partem reflectitur ab aqua ⁊ cum hoc secundū aliquid sui aquam ingreditur lustrans eam: vnde aliquis in aqua existens videre potest solem ⁊ lunam.

Secunda conclusio.

Reflexiones solas a regularibus superficiebus factas oculo sentiri. 2.

Dico superficies regulares illas que sunt leues terse nitide ⁊ dispositionis vniformis i situ partium suarū: verbi gratia planas: cōcauas: cōuexas: ⁊ hmōi. Irregulares autē sunt supficies corporū aspero rū in quibus alie partes alijs supeminent nec omnes equaliter situantur: nā in talibus radius vel lux cadens dispergitur ⁊ distrahitur: ne regulariter oriri super oculū possit. A superficiebus aūt regularibus eodē modo reflectitur ordinate: quo in ipsis recipitur scđm pyramedes radiosas: ⁊ ideo q: visus nō fit sine pyramidibus radiosis: p tales ⁊ non alias supficies contingit specularī: sicut eñ radij si essent in directum porrecti: ostenderēt oculo illud cuius sunt: sic ⁊ reflexi illud ostendūt: sed alio modo. s. debiliore ⁊ preposteroꝛ: essentiale est eñ radijs corpora declarare quorū sunt similitudines.

Tertia conclusio.

Luces reflexas similiter & colores debiliores esse directe radiantibus. 3.

Cuius causam prebet nō solum elongatio a fonte imo magis debilitas ex obliquatione: rectitudo si quidē cognata est processui lucis: sed etiam in omi opere nature dirigit ⁊ expedit naturā: omis enim motus tanto est fortior quāto est rectior: ⁊ per oppositum rectitudine sublata: necesse erit languescere ex parte vigorē. Et hec est ratio quare lumen solis transiens p vitreas coloratas colorem ipsum facit sensibiliter radiare ⁊ tingere opacū sibi obiectum: ꝑpter fortitudinē scꝫ radij solaris quasi directe radiantis: nō aūt hoc pōt radiꝰ a solido reflexus: fortitudo eñ lucis necessaria ē colori nō solū mouēdo ipm: sꝫ etiā mouēdo cū ipso medium: in q̄ excedit radij fortitudo vitrū penetrātis: q̄uis aliquātulū frāgat.

Quarta conclusio.

Reflexiones factas a superficiebus fortiter coloratis: nihil aut tenuiter visum mouere. 4.

Dico visum mouere. i. repꝛesentare ei res quarū sunt species. Cuiꝰ ratio est vt ꝑmo patuit q: lux directa fortior est q̄ reflexa similiter ⁊ color: q: si ipsa supficies sit regularis ⁊ multū polita: res in ea videri poterunt non tamen vt sunt sed colore speculi vestite.

Quinta conclusio.

Luces & colores a speculis reflexos res quarum sunt species oculo ostēdere. 5.

Quod ptꝫ q̄m species genita a re visibili essentialiter habet rem ostendere cuius est similitudo: q̄m in se ipsa esse fixum nō hñs. i. de se visibilis nō exist ēs: necessario ducit in alterum cuius est: q̄uis ergo reflectatur: manet sibi essentia sua: ⁊ ideo rem ostēdit: in alio tamē situ: cuius ratio infra patebit.

Sexta conclusio.

Angulos incidētie & reflexionis equales esse: radiūq̄ incidētē & reflexum in eadem superficie esse cum linea erigibili a puncto reflexionis. 6.

Dicitur angulus incidentie quē constituit radius cadens super speculū: cū supficie speculi ex vnā parte vel ex alia cū linea imaginabiliter erigibili a pūcto reflexionis. Angulus autē reflexionis est quē cum eadē cōstituit radius reflexus. Equalitas autē angulorū experimento colligit: ⁊ ratione vt cōꝑ probatur: q̄m si radius incidēs trāsire posset in ꝑfundū speculi: cū linea ꝑpendiculari erigibili sup pūctū reflexionis in ꝑfundū ducta: cōstitueret angulū equalē angulo incidentie: q: anguli cōtra se positi sunt equales ex secūda cōclusione quarti capitꝰ pmi libri geometrie: q: g codē modo resilit quo trāsiret necesse est ad equalē angulū reuerberari: vnde si perpendiculariter cadit in speculū in se reflectit: si oblique: reflectitur in partē aliam: sicut etiam in motu corporali ptꝫ q̄m aliquod ponderosum descēdēs motu recto in solidū corpus: vel proiectū linealiter si recte proiicitur p eandē lineam reuerberat: si oblique p cōsimilē resilit in opposirā partē. Amplius perpēdicularis radius fortior est alijs: nō solum ꝑpter conditionē radij absolutā: sed propter modū oriendi super rē obiectā: sicut ptꝫ ex declaratione scđe cōclusionis scđi capitꝰ pmi libri huius: fortitudo igitur radij cadentis est scđm q̄titatem anguli radij quē cōstituit radius in cadendo: sed fortitudo radij in reflectendo est scđm fortitudinem radij in cadēdo: igitur motus reflexionis sequitur motū incidentie. Amplius dictas tres lineas esse in eadē superficie ptꝫ: q: radius incessui rectitudinis: vt est possibile: se cōformat: q̄m vt dictum est in principio scđi capituli pmi libri huius innata est luci rectitudo: q: si superficiem istam egrederetur: dupliciter a rectitudine deficeret: ⁊ resiliendo ⁊ diuertendo.

Capitulum secundum de diffinitione & diuisione speculi.

Prima conclusio.

7. DIAPHANEITATEM speculi essentiam non intrare: et tamen per accidens aliquid conferre.

Si enim res in speculo ostenditur per radios reflexos: vt iam patet: sola leuitas superficiei est necessaria speculo: & perspicuitas per quam species in profundum ingreditur speculi impedit & non expedit visionem: nisi prouideatur impedimento: quoniam reflexio est a denso: quia densum: propter quod specula consueta vitrea sunt plumbo subducta. Non sic: vt quidam fabulantur: diaphaneitas esset essentialis speculo: non fierent specula de ferro & calibe: a diaphaneitate remotissimis: nec eam de marmore polito: cuius tamen contrarium videmus. In ferro autem & aliis huiusmodi propter intensionem nigredinis non est efficax speculatio. In quibusdam tamen lapidibus debilis coloris sicut sunt adamas vel carbunculus multo clarior est speculatio quam in vitro.

Secunda conclusio.

8. In speculis vitreis plumbo abraso nihil apparere.

Cuius ratio est quoniam licet in vitri superficie fiat aliqua reflexio: tamen quando vitrum ex aliqua parte non obumbratur transit per ipsum lux directa: que reflexam vincit fortitudine sua: sicut patet ex tertia precedentis capituli: quod si apponatur pannus obscurus vel niger vel huiusmodi aliquid: poterit videri quia tunc nihil directe transit per vitrum quod sit magne in radiando efficacie.

Tertia conclusio.

9. Superficies regulariter speculares septiformes esse.

Formam speculi hic vocamus improprie figuram eius planam vel curuam &c. Est enim speculum planum: & sphericum tam concauum: quam conuexum: est pyramidale tam intra quam extra politum: est etiam colimnale politum extra: & intra. Et in his septem differentiis plano scilicet spherico: concauo: conuexo: pyramidali interiori & exteriori: similiter colimnali interiori & exteriori: fiunt per singula diuersa apparitionum genera vt patebit. Quedam autem sunt superficies irregulares: scilicet partim plane partim conuexe vel concaue que quamquam sint polite: in eis tamen apparent facies distorte propter irregularem reflexionem a superficiei diuersitate.

Quarta conclusio.

10. Materia speculi est lenitas intensa: forma vero perfecta politura.

Hic dicitur lenitas magna partium continuitas carens poris sensibilibus omnino: vnde lignum & huiusmodi corpora non possunt esse specula. Politura vero dicitur omnis asperitatis ammotio: si igitur sit corpus lene multum intense politum: erit speculum essentialiter. Ad hoc tamen vt speculum lucide visibilia representet: exigitur vt non sit coloratum colore sensibili: requiritur etiam vt nec puluere nec anhelitu nec humore sit respersum: & hoc est quod dicunt: oportet speculum esse tersum.

Quinta conclusio.

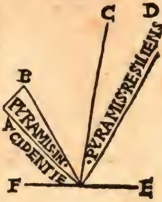
11. Res in speculis apparere vniuersaliter debilius quam recte.

Cuius ratio est quoniam vt patet ex tertia precedentis forme reflexe debiliores sunt: & ideo debilius representant: & debiliter mouent: propter quod homo vix sue forme recordatur. Amplius color speculi immiscetur luci reflexe & eam obfuscat: propter quod facies apparet tincta: latet et faciei macule propter debilitatem reflexionis.

Sexta conclusio.

12. In quolibet puncto speculi obiecto luminoso duas lucis terminari pyramides: vnam incidentem: aliam resilientem.

Prima pars huius patet ex quarta primi capituli libri primi: & quia lux reflectitur a polito: sequitur secunda pars propositionis: vt etiam pyramis inde a quolibet puncto reflectatur: sed iste pyramides sunt imaginarie.



Septima conclusio.

13. A quolibet puncto luminosi: in quelibet punctum speculi obiecti radium incidere.

Hec etiam sequitur ex tertio principio primi capituli libri primi.

Octaua conclusio.

14. A quolibet puncto luminosi porrigi piramidem: totam speculi superficiem occupantem.

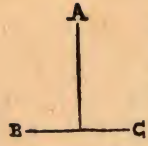
Hec similiter sequitur ex tertio principio primi capituli libri primi.

Nona conclusio.

15. A superficie speculi infinitas fieri completas reflexiones forme visibilis.

Hoc patet ex prehabitis: verbi gratia sit res visa plana: & speculum planum: tota species rei vise non solum recipitur in tota superficie speculi: sed in qualibet parte eius. Et quamuis partes speculi non concauantes a quibus potest fieri reflexio sint finite: per diuersam tamen compositionem cum aliis partibus sunt infinite partes concauantes. Quomodo igitur secundum modum incidentie sit reflexio: oportet infinitas fieri reflexiones a quolibet speculo:

b Ita videtur bona figura ad comprehendendum quod auctor vult scire sit speculum a b diuisum ad imaginationem per medium in puncto c. et illa pars b c diuidatur per partes proportionales proportione dupla minores terminatas versus c medium et a c diuidatur eodem modo singulas clare constat quod ibi in speculo a b sunt infinite partes equales et [illegible] communicantes in quibus omnibus possunt fieri infinite Reflexiones completas eius dem imaginis ut intelligenti clarum est deducere



rectâdũ enĩ pyramidê aliam ⁊ aliã fit visio in quolibet pũcto alio ⁊ alio. Nõ tñ ꝓpter hoc sunt infinita actu sꝫ solũ in potẽtia: qꝛ hec oĩa sunt vnũ corpꝰ lucis: reflexiones aũt cõplete sunt: q̃ rem totã ostẽdũt.

Decima conclusio.

Radium super speculum perpendiculariter orientem in se reflecti. 16.

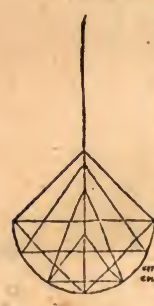
Hec sequitur ex. 6. capĩ precedẽtis: qm̃ si per aliam lineam reflecteretur: ꝑ minorẽ angulũ resiliret: ⁊ non essent equales anguli incidentie ⁊ reflexionis.

Vndecima conclusio.

Lucem reflexam per aggregationem fieri fortiorem luce incidente. 17.

Omnis si quidẽ virtus vnita plus potest quã dispersa ⁊ similiter radij quum sparguntur debilitãtur: ⁊ quum adunanẽ fortificãtur: ⁊ ad aliquẽ effectũ magis sufficiunt radij reflexi adunati: q̃ directi dispersi. Hinc est q̄ in speculis concauis sphericis ad solem positis ignis incẽditur: si enĩ directe speculũ radijs solis opponatur: radios oĩes partim sup vnum pũctum: partim sup eandẽ lineam incidere necesse est: oĩes enĩ radij ab eodẽ circulo speculi reflexi cadunt in punctũ vnũ: qꝛ talium sunt equales anguli incidentie: erunt igitur ⁊ reflexionis: sed radij a diuersis circulis cadunt in eandem lineam sꝫ super diuersa puncta eius. Quod radij igitur directi ignem non generant: ex hoc prouenit q̄ radij solis cõcurrere non possunt: nisi fracti aut reflexi.

Duodecima conclusio.



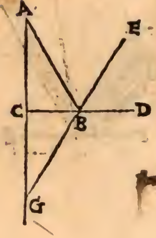
Lucem speculo incidere & reflecti per lineas naturales 18.

Linea si quidẽ radiosa naturalis est: nec saluatur radij essentia nisi in latitudine: ⁊ quia apparitio in speculis mutatur secundum diuersitatem figure speculi: planum est q̄ a puncto mathematico non fit reflexio: quia illius nulla est secundum superficies diuersificatio vel figura.

Decimatertia conclusio.

Formas apparẽtes in speculis ꝑ impressionẽ ĩ speculis factã minime videri. 19.

Credunt enĩ hoies nõnulli q̄ res in speculis appareant ꝑ idola q̃ speculis imprimãtur: ⁊ res quasi in idolis appareant: idola tñ ipsa ꝑmo videri. Et iste error geminatur: quidã enim dicũt ipsum idolũ imprimi ipsi speculo: ⁊ ibi esse ac visum mouere. Quod multiplr̃ falsum esse ostẽdiẽ: qm̃ in speculis ferreis ⁊ adamantinis vidẽtur res in quibꝰ nulla est perspicuitas receptiua impressionis. Amplius si res imprimeretur in speculo: diffunderet se in speculo vndiqꝫ ⁊ posset res videri in oĩ parte medij respectu speculi: qđ falsum est: nõ enĩ videtur res nisi oculo existẽte in eadẽ superficie cũ pũcto viso: ⁊ puncto reflexionis: equalibus existẽtibus angulis incidẽtie ⁊ reflexionis vt in sexta precedẽtis capĩ dictũ est. Amplius q̃titas idoli nunq̃ excederet q̃titatẽ speculi qđ falsum est. Amplius si idolũ imprimeretur speculo appareret in speculo: ⁊ nõ vltra speculum: qđ falsum est: apparent enĩ idola in cõcursu imaginario radij visualis cum catheco vt statim declarabitur. Amplius ꝑspicuitas nihil facit ad essentiam speculi ꝑ se vt supra docuit ꝑma ꝓpositio huius capĩ. Idcirco dicũt alij idolũ nõ imprimi speculo: sed vbi res apparet in cõcursu radij cũ catheto. s. vltra speculũ vbi apparet idolũ. Quod et falsum est: quoniam in aqua turris apparet esse in terra tantũm q̃tum est in aere: ⁊ si ponaẽ mons eneus in loco apparitionis: ita liquide apparet ac si esset ibi aer vel aqua: igiẽ ibi nihil imprimitur. Quid est igitur idolũ seu imago speculi: dico q̄ sola apparitio rei extra locum suum. i. res apparens in alio loco ab eo in quo est. Verbi grã aliquando oculus: vt supra patuit: vnũ indicat esse duo: qđ est qꝛ res apparet nõ solũ in loco suo: sed etiam extra locũ suum: ita est in ꝓposito q̃tum ad hoc: qꝛ res in speculo secundũ veritatẽ videẽ: sed in situ erratur ⁊ aliquãdo in numero: vt infra dicetur.

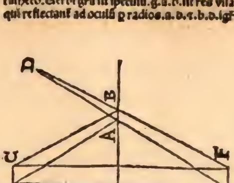


Capitulum tertium de speculis planis.

Prima conclusio.

IN SPECVLIS planis & aliis ĩ maiori parte imagines apparere in concursu radii visualis cum catheto. 20.

Cathecus est linea ꝑpẽdicularis ducta a re visa sup̃ sup̃ficiem speculi plani seu spherici. In cõcursu ḡ imaginario radij visualis sub quo res videtur cũ perpẽdiculari ducta a re visa sup̃ superficiem speculi apparet esse id qđ in speculo videtur. Cuius ratio colligi põt ex. 13. ꝓpositione sexti capĩ ꝑmi libri huiꝰ: ipsa siquidẽ lõgitudo radiorũ oculo presentatur: sed qꝛ pars radij que reflectiẽ mouet visum imediate: illa etiam mediante visus apprehẽdit partẽ radij incidentem in speculũ: ita q̄ totus radius presentatur oculo quasi precedẽs: in cõtinuum ⁊ directũ: reflexionẽ enĩ oculus aduertere nõ põt: qꝛ nihil apprehendit nisi partẽ radij que visum afficit: necesse igitur est rem que in speculo videtur: si supra speculũ est: sub eo apparere in concursu imaginabili radij cum catheco. Verbi grã sit speculũ. g. a. b. sit res visa. k. c. oculus vidẽs. d. cadant ḡ radij. k. a. c. b. a re visa qui reflectanẽ ad oculũ ꝑ radios. a. d. ⁊. b. d. igiẽ res. k. c. videẽ cõtinuari ꝑ radios. k. a. ⁊. c. b. radijs. a

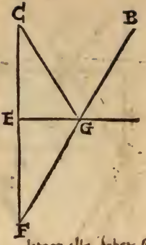


d.ꝛ.h.d.igitur.k.a.ꝛ.c.h.videntˀ porrigi in ꝓfundū speculi sub eisdē angulis sub quibꝰ reflectuntur: qꝛ anguli contra se positi sunt equales: ꝛ cadit.d.a.in.e.ꝛ.d.b.in.f. Et in perpendiculari predicta si-ue catheto res eodē modo apparet quo in situ ꝓprio: dico in speculis planis: quia rectius est ibi ap-parere: ꝛ hec est ratio auctoris in lib.5.cap̄.2. secus aūt in speculis cōcauis: vt infra dicetˀ i suo caplo.

Secunda conclusio.

21\. Altitudines in speculis suppositis euersas apparere.

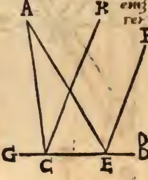
Hec pꝫ ex ꝓxima: hoc tū refert ꝙ in speculis planis res visa tantū apparet in ꝓfundū q̄tum de sup-eminet: qḋ demōstratur. Cadat eīn cathetus a pūcto viso.c.ꝛ sit.c.e.f. sitqꝫ radius sub quo.c. videtˀ.b.g.f. radius cadēs a re visa.c.g. certū est igitur in trigonis.c.e.g.ꝛ.f.e.g.ꝙ latera.g.e.ꝛ.g.c. sunt equa-lia lateribus.g.e.ꝛ.g.f. sicut pꝫ ex ꝓxima: ꝛ angulus.e.g.c. equalis est angulo.e.g.f. qm̄ cōtra se po-siti sunt equales: ꝛ anguli incidētie equales sunt angulis reflexionis: ḡ basis.e.c: equalis est basi.e.f res igitur tantū appareret vltra speculū vel sub ipso q̄tum est supra. Qḋ si oculus videt se ipsum: idē accidet q̄uis perpēdiculariter radius oriatur: qm̄ vt dictū est: radius ip̄e cōprehēditˀ. Amplius linea perpēdicularis nō est scḋm esse naturale sed imaginarium: declinat igitˀ radius scḋm veritatē: ꝛ ita ꝓ-cedet demōstratio vt supra: in alijs tū speculis aliter est vt patebit infra in capitulis sequentibus.



Tertia conclusio.

22\. In speculis planis facialiter obiectis facies apparere præposteras: & sinistra dextris opposita permutatim.

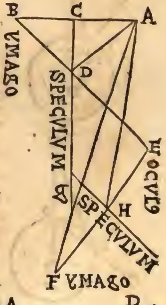
Huius propositionis p̄ma pars pꝫ ex premissa: ex eodē eīn sequitur vt superius appareat inferius: ex quo sequitˀ vt anterius appareat posterius. Amplius scḋa pars sequitur qm̄ in eodē speculo eadē res apparet sibi opposita: res autē opposite habēt dextra sinistris opposita permutatim. Quare aūt res appareat sibi opposita ex hoc est qꝛ pars radij mouēs oculū dirigitur in oppositū: ꝛ ꝓpter hoc totus radius velut in partē illam quasi porrectus accipitur ꝛ per cōsequēs res in extremo eius videtur.



Quarta conclusio.

23\. In speculis planis vnam solam imaginem permutatim apparere.

Sit eīn res visa.a.in speculo.b.g.e.ꝛ sit oculus.f. sitqꝫ visio p radium incidētē.a.e.ꝛ radium reflexum e.f. dico ꝙ punctꝰ.a.nō pōt reflecti sup punctū.f.ab alio puncto speculi q̄ ab.e.ꝙ si potest detur pun-ctus in quē cadat radius.a.c. igitˀ reflexio est ad equalē angulum: quū igitur angulus incidentie.c.sit maior angulo incidentie.e.qꝛ est extrinsecus ad eum in triangulo.a.e.c. erit angulus reflexionis ei cōiunctus maior angulo reflexionis.e.ḡ impossibile est cōcurrere radios.c.k.ꝛ.e.f. sup punctū vnū ex parte.k.ꝛ.f angulus eīn.b.c.f.cū angulo.g.c.f. valet qḋ duo recti: ḡ angulus.b.c.k. qui est maior angulo.b.e.f.cū eodē angulo.g.e f. valet plus q̄ duo recti: ḡ ex alia parte concurrent linee.f.e.ꝛ.k.c. per quartā petitionē primi geometrie. Amplius si est alius punctꝰ reflexionis q̄.e.nō in longitudi-ne speculi sicut ponitur sed in latitudine: ḡ erit ducere ꝑpendicularē ab oculo equedistantē perpendi-culari erigibili ab alio puncto: ꝛ ita ab vno pūcto plures erunt perpendiculares ducibiles quod est impossibile: ꝛ procedit hec demonstratio in reflexione radij respectu vnius oculi.



Quinta conclusio.

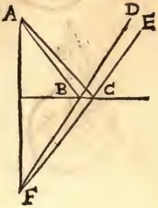
24\. In speculo fracto: mutato situ partium: diuersas imagines apparere.

Hoc per experimentū pꝫ qꝛ si partes speculi fracti ad eundē situm coaptentˀ qui erat ante fractionē: nō plures apparebunt imagines in fracto q̄ nō fracto: plurificatio eīn apparationū nō est ꝓpter fra-ctionē sed ꝓpter situs partium mutationē. In speculo eīn cōcauo integro plures apparent imagines vt infra patebit: sed qꝛ vt docuit caplm precedēs a qualibet parte speculi fit reflexio sed in partes di-uersas: ex mutatione situs partium fractarū fieri pōt vt sit reflexio ad eandē partem: ꝛ per ꝯñs simul diuersas imagines apparere: ꝛ nō plures res sed vnam ostēdere. Amplius ex cōsimili causa accidit quādo speculū ponitur in aqua: tunc ex eodē luminoso plures cōtingit apparere imagines: fit enim reflexio a supficie aque: ꝛ qꝛ lumē radiosum intrat aque ꝓfundum: necesse est igitur vt occurrēte spe-culo inde reflectatur: ꝛ ita iuxta diuersitatē situs partium ꝛ supficiei speculi necesse est aliud eiusdem luminosi idolū apparere. Et sic credo cū sole nō stellā aliquā apparere: sicut multis videtˀ ꝛ mihi fal-so etiam aliqū videbatur: sed ipsius solis ex diuersitate supficierū aque ꝛ speculi diuersa idola ḡnari. Idola tū hoc mō plura nō hꝫ aliqḋ corpꝰ nisi sit valde luminosum: qꝛ lumē aquā ingrediēs debile ē: ꝛ reflexum iterū a speculo debilꝰ vt vix possit nisi sit fortissimū originaliter ipressionē sensibilē ḡnare.

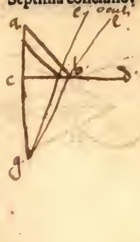
Sexta conclusio.

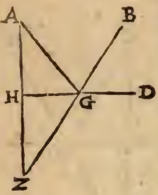
25\. In speculo plano duobus oculis vnam apparere imaginem.

Cuius ratio est quoniam lꝫ a diuersis punctis fiat reflexio ad vtrūqꝫ oculū: tamen radij reflexionis secāt se ꝛ cōcurrunt in catheto ꝛ terminatur aspectus vtriusqꝫ oculi ad idem pūctum: sicut pꝫ aptan-do demonstrationem conclusionis prime huius capituli vtriqꝫ oculo.



Septima conclusio,





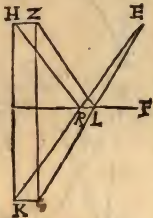
In omni ſuperficie reflexionis quattuor præcipue puncta contineri: & quod extra illam eſt minime videri. 26.

Di quattuor pūcti ſunt centrum viſus: pūctus apprehenſus: terius axis. i. perpendicularis lineę recte ducte a centro viſus in ſpeculum: ⁊ punctus reflexionis: nec videtur quod extra ſuperficiem iſtam eſt: ſicut patet ex quarta propoſitione huius capituli.

Octaua concluſio.

In ſpeculis planis inuenire punctum reflexionis: 27.

Hoc nihil aliud eſt quā inuenire: vbi angulus incidentie ⁊ reflexionis ſunt equales: ſit em̄. a. pūctus viſus. b. centrū oculi ſpeculū. d. g. h. ducatur cathetus ab. h. ⁊ pducatur vltra ſpeculū quātū eſt. a. ſupra ſpeculū vſq; in. z. ⁊ ducatur linea recta. b. z. p punctū ſpeculi. g. q̄ eſt punctus reflexionis: ducatur etiam radius. a. g. angulus em̄. z. g. h. equalis eſt angulo. d. g. b. q2 ei oppoſitus: iterum etiam equales ſunt anguli. h. g. z. ⁊. h. g. a. vt ſupra p3: igitur eq̄les ſunt anguli. h. g. a. ⁊. d. g. b. igitur a pūcto. g. eſt reflexio ⁊ nō ab aliquo alio. Cōtingit tamē vnū apparere duo in ſpeculo plano: pp̄ter elongationem viſibilis ab axe ſicut ⁊ in viſibili directio ſupra oſtenſum eſt accidere.



Nona concluſio.

In ſpeculis planis figuræ & quantitatis veritatem apparere: 28.

Sit ſpeculū planū. f. l. r. cui ſup eminéat lōgitudo. z. h. ⁊ ducātur radij. z. l: ⁊. h r. reflexi ad oculum. e. ducātur ⁊ catheti a punctis. h. ⁊. z. vl3. h. k. ⁊. z. o. q̄m igitur catheti eque diſtātes ſunt: erit imago in terminis cathetorū eiuſdē q̄titatis: cuius eſt. z. h. ḡ q̄titas eadē apparet que eſt directe ⁊ figura eadē: q̄m quelibet pars tantū apparet ſub ſpeculo q̄tum eſt ſupra ſpeculū vt ex prehabitis p3: neceſſe eſt igitur partes inuicē eundē ordinem retinere quē ſecūdū veritatem habēt. Cōtingit tn̄ rem in ſpeculis planis apparere minorē q̄ ſit: ex eiſdem cauſis ex quib⁹ in viſu directo ſc3 ex diſtātia. Hoc igitur verum eſt q̄ minor error accidit in his ſpeculis: ſc3 in ſitu tātū ⁊ in his que ſunt omi ſpeculo cōmunia: ſicut ſupra patuit in tertia propoſitione capti p̄mi huius libri ⁊ in alijs nōnullis.

Capitulum quartum de ſpeculis ſphæricis exterioribus.

Prima concluſio.

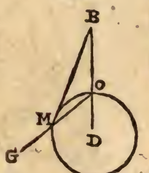
IN SPECVLIS ſphæricis extra politis omnes accidūt errores: qui in planis. 29.

Cōmunes quidem cauſe errandi ſunt: tum quia lux debilitatur ex reflexione: tum q2 res apparet extra locū ſuum: ſibi ipſi oppoſita vt ſupra viſum eſt: accidunt etiam plures errores q̄ in planis vt patebit.

Secunda concluſio.

In ſpeculis ſpæricis exterioribus apparet imago in concurſu radii cum catheto: id eſt linea ducta in centrum ſphæræ. 30

Hoc pbari pōt per experimentū ⁊ ex cauſis naturalib⁹: vt ſupra p3 in ſpeculis planis. In hoc tn̄ eſt diuerſitas q2 in planis: vt ſupra viſum eſt: res ſemp apparet tantum ſub ſpeculo: q̄tum eſt ſupra: hic aūt imago aliquā. lo apparet in ipſa ſpeculi ſupficie: aliquādo intra: aliqñ extra. Uerbi gr̄a ſit pūctus viſus. e. oculus. g. punct⁹ reflexionis. n. centrū vero ſphere. d. planū ē q̄ locus imaginis eſt. k. Qd̄ ſi ponatur viſibile in. b. apparebit imago in. o. Et ſi adhuc ponatur viſibile pp̄inquius ſphere apparebit extra ſpheram: vt p3 pertractanti. Punctū autē reflexionis eſt facile inuenire precipue vbi equaliter diſtant oculus ⁊ res viſa a ſphera: alias in inueniendo pūctū maior eſt prolixitas vel difficultas q̄ vtilitas: ſicut p3 inſpicienti capitulum de imagine apud halacē. Ex hoc etiam apparet q̄ imago in his ſpeculis eſt propinquior ſpeculo q̄ res viſa: quod non eſt in planis: vt ſupra patuit.



Tertia concluſio.

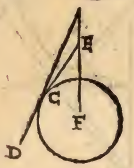
In ſpeculis ſphæricis exterioribus partes rei: ſicut ſunt: ordinatas apparere. 31.

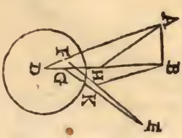
Uerbi gratia ſit res viſa. a. b. centrū ſpeculi. d. oculus. e. planū eſt q̄ radius. e. h. cōcurret cū ppendiculari in pūcto. f. ⁊ radius. e. k. in pūcto. g. erit igit imago. g. f. minor quidē re viſa vt patebit in cōcluſione. 5. huius: tamē partes incōfuſe apparēt ⁊ ordinate vt patuit ſupra lib. p̄mo huius caplo quarto concluſione ſecūda. Qd̄ ſi res viſa ponatur in eodē ſitu cum diametro ſicut. a. b. tunc idem iudicium apparebit: ſicut patet ductis lineis ad. a. b. nam ſicut in. a. b. ſequitur ibi.

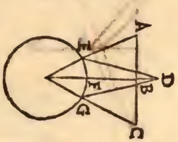
Quarta concluſio.

In ſpeculis ſphæricis: recta in maiori parte curua apparere. 32.

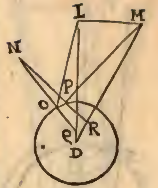
Hoc intellige de curuitate nō ad centrū ſpeculi inflexa: ſed a ſpeculo auerſa. Uerbi gr̄a: ſit res viſa. a. b. c. oculus. d. qui nō ſit in eadē diametro cū re viſa: ⁊ reflectatur ad oculū p. d. e. d. f. d. g. apparet igr̄ curua: q̄d ad ſenſum demōſtrari nō poteſt in plano: ſed in ſolida figura faciliter apparebit experimē-







tatori. Cuius ratio eſt qm̃ in oĩbus ſpeculis figura imaginis ſequit̃ modũ ſuperficiei reuerberãtis: ſit eñ a ſupficie reflexio ſecundũ modũ ſuperficiei: ſed qꝛ res viſa apparet: opꝫ vt ⁊ curuitas rei appareat: nõ in reflexione ad ſpeculũ: ſed in auerſione a ſpeculo: ad hoc facit qđ dictũ eſt in cõcluſione. 15. ⁊. 17. ſexti capĩ pmi libri huius. Et hoc eſt intelligendũ qm̃ viſus nõ eſt in eadẽ diametro cum re viſa ⁊ centro ſphere. Etiam ex cauſa ſiliĩ apparet ꝙ in ſupficiebus irregularibꝰ ſicut in ſpeculis qbuſdã valde diuoſis facies apparẽt monſtruoſe. In predictis tamẽ ſpeculis aliquãdo recta apparẽt nõ recta: vlꝫ ſi linea viſa ⁊ centrum ſphere ſint in eadem ſuperficie cũ ipſo viſu. Verbi grã ſit res viſa. l. m. oculus. n. puncta reflexionis. o. p. centrũ ſphere. d. planum quod idolum eſt. q. r.



Quinta concluſio.

13. In ſpeculis ſphæricis imagines in maiori parte minores eſſe rebus viſis.

Huius ratio a duobus ſumit̃: pmo qm̃ vt ſupra viſum eſt: cõcurſus radiorũ cum catheto in ſphericis propinquior eſt oculo ꝙ̃ in planis: radiĩ autẽ ab eodẽ pũcto ꝓcedentes quanto magis ꝓtenduntur tanto habẽt extrema magis diſtãtia: ⁊ ecõtrario quãto minus ꝓtendunt̃: tãto minus diſtãt extrema: ergo ſicut demõſtratum eſt in planis equalẽ eſſe imaginẽ rei viſe: eodẽ modo ſequit̃ in ſphericis minorẽ eſſe. Scđo qm̃ a maiori ſuperficie fit reflexio in planis ꝙ̃ in ſphericis: ſicut ꝓbat auctor libri de ſpeculis: cuius cauſa eſt: qm̃ radiĩ a cõuexis reflexi: magis diſgregant̃ ꝙ̃ a planis ꝓpter declinationem circuli a quo eſt reflexio: vt igit̃ radiĩ ad viſum cõcurrant: opꝫ a breuiori ſuperficie fieri reflexionẽ: ⁊ per cõſequẽs rem apparere minorẽ. Et hec eſt intẽtio auctoris libri de ſpeculis: que intelligẽda eſt in maiori parte: qm̃ in aliquo ſitu cõtingit rem apparere in his ſpeculis eiuſdẽ ꝙ̃titatis: ⁊ in aliquo maioris ſicut ꝓbatur in. 6. pſpectiue: cũ vlꝫ imago nõ equediſtat rei viſe: quũ etiam facit angulum acutũ cum radio cuius caſus eſt ꝓpinquior centro: ⁊ ſic quũ ꝓpinquior ẽ põt imago eſſe equalis vel maior: ⁊ hoc latuit auctorẽ libri de ſpeculis: ꝓpter ſitum ſi quidẽ obliquũ rei reſpectu ſpeculi cõtingit vnũ radium reſpectu alterius breuiari: vt ex aliquo inceſſu poſſit imago excedere rem vel ei equari.

Sexta concluſio.

14. In ſpeculis cõuexis: quo minora ſunt: eo in eis minores imagines apparere.

Cuius ratio eſt manifeſta: quoniam quanto ſphera eſt minor: tanto concurſus cum catheto eſt cẽtro propinquior: ⁊ locus imaginis anguſtior: quo minori ſemidiametro obuiare dignoſcitur.

Septima concluſio.

15. In ſpeculis columnaribus extra politis: eoſdem accidere errores qui in planis & ſphæricis.

Hic eſt ſermo de columna rotunda que in longitudine conuenit cum planis: in rotunditate cũ ſphericis: ideo vtrorunqꝫ errores participat.

Octaua concluſio.

16. In ſpeculis columnaribus tripliciter fieri reflexionem.

Poteſt enim fieri reflexio a lõgitudine columne: vel a trãſuerſo: vel a medio ſitu inter vtrunqꝫ obliquo: quum autẽ fit reflexio a lõgitudine cõtingit ſicut in planis. ſ. cũ linea viſa eſt equediſtans linee longitudinis colũne: ⁊ tũc eſt locus imaginis concurſus radiĩ cum perpẽdiculari ducta ſuper colũne longitudine: ⁊ tunc apparet res ſicut in planis: hoc excepto: quod qꝛ reflexio fit a linea naturali: opꝫ rem curuã apparere: ſicut ſupra de ſpeculis cõuexis viſum eſt. Quod ſi fiat reflexio a tranſuerſo colũne vt fiat reflexio a linea circulari equidiſtanti baſibus colũne: erit locus imaginis cẽtrum circuli reflexionis: ⁊ apparitio ſimilatur quodãmodo ei quod in ſphericis eſt predictum: vt locus imaginis aliquãdo appareat infra circulum: aliquãdo extra: aliquando in ipſo circulo: res tñ minor apparet quã in ſphericis. Quum vero a medio fit reflexio: accidit etiam variatio de ꝙ̃titate: inquãtum ſectio colũne magis accidit ad longitudinem vel latitudinem columne: ⁊ poteſt eſſe locus imaginis ſimiliter vel vltra vel citra ſpeculum: vel in ipſo ſpeculo.

Nona concluſio.

17. In ſpeclis piramidalibꝰ extra politis: mltiplicari reflexiões ſicut ĩ colũnaribꝰ

Hoc pꝫ qꝛ põt fieri reflexio a lõgitudine pyramidis: vel a latitudine: vel a medio: ⁊ ſcđm hoc diuerſificant̃ apparitiones: ſicut in colũnaribꝰ: ⁊ mõ pdicto etiã diuerſificat̃ locus imaginis: ⁊ figura rei apparẽtis. Hoc tñ differt: qm̃ in his apparet imago pyramidata: eadẽ ratione qua colũnaris in colũnaꝛ vnius rei tñ ab vno pũcto ſupra vnũ locũ fit reflexio: ſicut in colũnaribus ⁊ aliĩs exterius politis.

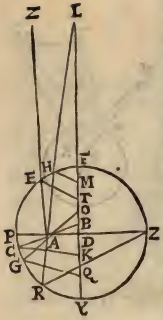
Decima concluſio.

18. In ſpeculo pyramidali ꝗ̃ locꝰ reflexionis ẽ cono ꝓpinqor: eo imago minor.

Hoc pꝫ ex his que ſupra habita ſunt de ſpeculis ſphericis cõuexis ꝓpoſitionibꝰ. 5. ⁊. 6. huius capĩ.

Capitulum quintum de ſpeculis ſphæricis interioribus.

Prima concluſio.



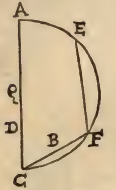
IN speculis sphæricis cõcauis: qm̃ possibile ẽ radiũ ꝑpẽdiculari nõ cõcurrere: necesse est aliter q̃ȝ in p̃missis locũ imaginis apparere. 39.

Verbi gratia esto speculum concauum .f.p.y. cuius centrum sit .d. ⁊ ducatur semi diameter .d.p. ⁊ sit in ea oculus .a. ducaturq̃ȝ alia diametrus istam orthogonaliter secans: quę sit .y.f. ducaturq̃ȝ .a.e. ęquedistans .f.y. signenturq̃ȝ puncta in .y.f. diametro .m.t.k.q. manifestum erit q̄ .a.e. non concurrit cum perpendiculari cum sit ei ęquedistans: vnde si visibile ponatur in .m. reflectitur a puncto .n. ⁊ concurrit cum perpendiculari extra speculum in puncto .l. si in .t. reflectitur ab .e. ⁊ non concurrit cum perpendiculari: si in .k. reflectitur a puncto .c. ⁊ concurrit cum perpendiculari in puncto .b. in .q. vero reflectitur a puncto .g. ⁊ concurrit cum perpendiculari in pũcto .o. Quod si sumatur in diametro .d.p. punctus .ȝ. ⁊ ipse reflecti poterit a puncto .r. ⁊ non concurrit .a.r. radius cum perpendiculari .p.d. nisi in ipso oculo. Ergo locus imaginis puncti .m. est vltra speculum in .l. ⁊ locus imaginis .k. retro oculum in .b. locus imaginis .q. retro oculum in .o. locus .ȝ. in ipso oculo: locus imaginis .t. in ipso speculo. Quia enim .t. diuisibilis est pũctus: secundum superiorem sui partem deberet apparere vltra speculum: secundum inferiorem vero infra: quia autem forma est vna necesse est vt appareat in medio loco scilicet in ipso speculo in puncto .e. In hijs diuersitatibus apparitionum nusquam apprehenditur veritas imaginis nisi quum eius locus fuerit extra speculũ: aut inter visum ⁊ speculũ: vnde q̃ apparent in ipso oculo vel retro caput: nõ apparẽt cũ certificatione rei visibilis: qm̃ visus nõ est natus acquirere formas nisi obiectas facialiter.

Secunda conclusio.

Res existens in centro speculi concaui non videtur. 40.

Reflexione dico videri non potest: quoniam radij ab ea perpendiculariter cadunt super superficiem speculi: redeunt ergo in se ipsos: ⁊ ita ad nullum punctum declinant extra centrum: quum igitur oculus sit extra centrum: non videbit id quod in centro est.



Tertia conclusio.

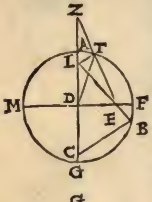
Oculus existens in centro speculi concaui sphærici videt se tantum. 41.

Hęc sequitur ex pręmissa indirecte: quoniam quum res extra centrum posita radios habeat super superficiem speculi cadentes oblique: sequitur etiam vt radij ad partem oppositam reflectantur: ⁊ non in ipsum centrum: ęquales enim sunt anguli incidentię ⁊ reflexionis.

Quarta conclusio.

Oculus existẽs in semidiametro speculi concaui sphærici nihil videt eorum quæ in illa semidiametro continentur. 42.

Sit enim diameter .a.q.c. ⁊ sit oculus in parte diametri .q.c. in in puncto .d. Dico igitur q̄ impossibile est aliquem punctum linee .q.c. redire in .d. q̄ si potest: cadat linea .c.f. planum est q̄ reflectetur ad ęqualem angulum: ⁊ erit linea reflexa per consequens chorda ęqualis portionis sicut est .e.f. quod esse non potest ex parte ista: ergo necesse est vt in partem aliam reflectatur.



Quinta conclusio.

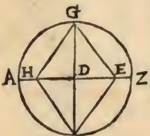
Quilibet pũctus diametri speculi cõcaui q̃tumcũq̃ȝ ꝑductæ põt eẽ locus imaginis. 43.

Verbi gratia sit circulus .a.m.g. sitq̃ȝ diameter .a.g. centrum sit .d. summatur alia diameter .m.f. sitq̃ȝ oculus .e. Planũ est quoniam .l. videtur in .ȝ. si anguli .d.t.l. ⁊ .d.t.e. sunt ęquales: similiter ⁊ pũctus .c. reflectitur a pũcto .b. ad .e. ⁊ videtur in .l. ⁊ ita secũdum diuersam situationem rei visibilis potest videri in parte diametri quantumcunq̃ȝ productę: dum tamen proportionetur quantitati speculi.

Sexta conclusio.

Punctum visum in speculo concauo sphærico: a pluribus locis speculi reflexum: possibile est vnicam habere imaginem. 44.

Quãuis enim a pluribus locis fiat reflexio simul: nõ tñ ꝑpter hoc necesse est diuersas apparere imagines: qm̃ oẽs radij visuales talis speculatiõis in eodẽ pũcto cõcurrunt cũ catheto: ⁊ hoc intelligit̃ cẽtro visus ⁊ reuisa existẽtibus in eodẽ diametro: tũc enim possibile est vt a quolibȝ puncto circuli fiat reflexio: vnica tñ existẽte imagine. Verbi gr̃a sit speculũ .a.b.ȝ.g. ⁊ sit diameter .a.ȝ. in qua sit .h. res visa: ⁊ .e. cẽtrũ visus: dico q̄ reflexio est a puncto .g. qm̃ triãgulus .h.g.d. est ęqualis triangulo .g.d.e. vt patet ex lateribus ⁊ angulis q̃ sunt sup .d. ⁊ erit locus imaginis pũctus .e. Silr̃ fit reflexio a pũcto .b. eadẽ rõne: ⁊ ẽ idẽ locus imaginis: imo fit pari rõne reflexio a toto circulo q̄ ꝑ lineã .b.g. itelligit̃: ⁊ tñ ẽ vnica imago scȝ .e. dico circulũ quẽ sup diametro .a.ȝ. imaginalr̃ imota describeret .g. pũctus orbiculariter motus.



Septima conclusio.

Re visibili & visu extra sphæram existentibus in diuersis diametris: ab vno solo puncto fit reflexio. 45.

Verbi gratia sit.c.punctus visus.h. oculus.d.centrum sphere: et ducantur linee.h.d.et.c.d.planum est q superficies.h.d.c.secat spheram speculi concaui in circulo.a.b.g.q.igitur.c. nō reflectit ad.h. nisi ab aliquo puncto hui⁹ circuli sicut patz supra ex ꝓpositione sexta capli primi hui⁹: certū etiā est q nō fit reflexio ab arcu.g.b.ad.h.quia linea reflexa.a.c.ad.h.cadit supra ipsum speculū exterius: reflectitur ḡ ab arcu.q.a.in cuius extremis teriantur radij.c.d.h.d. In hoc autē arcu vn⁹ solus est punctus a quo possit fieri reflexio scz.z.q̄ est terius linee.l.d.diuidētis triangulū.h.d.c.per equalia: et ducant linee.c.z.h.z. sequitur eīm vt triangul⁹.c.d.z.sit eq̄lis triāgulo.h.d.z.sed.h.d.et.c.d. sunt equales linee et per ꝯñs angulus.d.z.h. eq̄lis ē angulo.d.z.c. Quō si.h.d.linea sit minor q̄.c.d.vel econuerso: re visa et oculo inequaliter distātibus: nihil refert: ducta eīm contingente.k.f.vel etiam linea secante circulum et etiam istas lineas ad equalitatē: idem sequitur. Nec potest ab alio pūcto arcus q.a.fieri reflexio: q si potest sit.o.et ducantur linee.h.o.et.c.o.planum est q linea. h.o. est minor vel econuerso quā.c.o. quum altera earum sit propinquior centro: amplius.h.o.minor vel econuerso est quam sit.h.z. eadem ratione: sumaturq3 linea.o.d.m.diuidens triangulū.h.o.c.per equalia: ergo quum.h.z.l.et.c.z.l.sint trianguli similes: eadem erit proportio.c.z.ad.h.z.que.c.l.ad.l.h. erit etiam proportio.c o.ad h.o.sicut.c.m.ad.m.h.quod est impossibile: igiť illud ei quo sequitur scilicet a puncto.o.fieri reflexionem. Hę tamē demonstrationes currunt quū duo puncta scilicet rei vibilis et visus sunt extra spheram et supra contingentē ductam a termino linee diuidentis angulū diametrorū per equalia.

Octaua conclusio.

46. Possibile est idem in speculo concauo duas habere imagines.

Intellige q ad hoc vt res duas habeat magines duo requiruntur: primum est vt sit reflexio a pluribus partibus speculi sup oculū: scdm est vt locus imaginis sit alius et alius scdm diuersitatē reflexionum: alius in q̄ et ali⁹ sensibili distātia. Et iuxta hoc scdūm diuersitatē situs ad speculū pōt res habere duas magines vel tres vel quattuor et nō plures. Verbi gr̄a sint due diametri speculi se othogonaliter secantes.b.d.q.a.d.g.ducať iterū tertia diameter.c.d.z.q̄ diuidat angulū.b.d.g.per equalia: et a puncto.e.termino diametri medie ducantur due perpendiculares sup duas diametros primas scz.e.c.et.e h.erit ergo triangulus.e.c.d. equalis triangulo.e.h.d.q si oculus ponatur l.h.et visibile in.c. reflectetur forma.c.a puncto.e.ad.h.et erit locus imaginis in.e.quoniam.e.h.eque distat.d.c. Amplius reflecti potest a puncto.z. quoniam trianguli.c.d.z.et.h.d.z. sunt equales: sicut faciliter probari potest: quum.d.z.sit linea cōmunis: et anguli cōtra se positi sunt equales: angulus etiam.q.d.a.diuiditur per equalia. In hoc autem situ non potest fieri reflexio a pluribus partibus speculi sicut patet repetendo demonstractionem precedentis propositionis: locus autem secunde imaginis est.f.

Nona conclusio.

47. Possibile est idem in speculo concauo tres habere imagines.

Quia si accipiantur duo puncta in diuersis diametris: quorū vnus sit intra speculū: ali⁹ in ipsa circūferentia speculi vel extra: describaturq3 circulus hec duo puncta cū cētro speculi cōcludēs: tunc si circulus iste secet circulū speculi in vno loco tm̄ (licet hoc sit impossible in circulis se intersecātib⁹) erit reflexio ab vno arcu tm̄: qui opponitur oculo et rei vise: si in duob⁹ secet: poterit esse reflexio ab vno pūcto arcus interiacētis diametros: aut a duobus: aut a trib⁹: et aliqū a quattuor vt demōstrabiť statim.

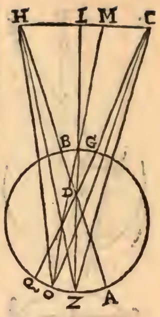
Decima conclusio.

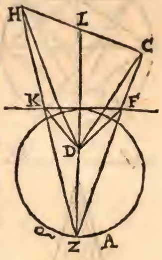
48. Possibile est in speculo concauo vnius rei quattuor imagines apparere.

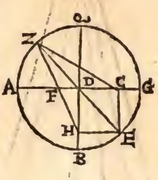
Verbi gratia sit speculum vt supra.a.b.g.q.sitq3 centum.d.sumanturq3 due diametri.a.g.q.b.sitq3 tertia.c.z.diuidens angulum ab illis contentum per equalia: sumanturq3 punctus.c.in diametro.q.b. propinquior circumferentie quam punctus.c.in illa de duabus imaginibus sumebatur: et in.a.g.sumatur linea.a.h.equalis.q.c. dico ergo q.c.reflectitur a puncto.e. et a puncto.z.sicut patet ex prehabitis. Amplius preter hoc reflectitur ab aliis duobus punctis: verbi gratia a puncto.c. extrahatur perpendicularis que cōcurret necessario cum.z.e.extra spheram in puncto.o.quoniam niam angulus.d.e.c.est acutus qui cadit in vltimū sphere igiť oportet lineam perpendicularē extra spheram incidere: igitur ad inueniendum alia duo puncta reflexionis describatur circulus.d.c.h. qui necessario cadet in.o.et quum hic circulus minor secet maiorem in duobus punctis que sunt.l.m. ducantur linee.h.m.d.m.c.m.et.c.l.d.l.h.l. et angulus.c.l.d. equalis erit angulo.d.l.h. quoniam isti anguli cadunt inequales arcus: in quartas scilicet circuli maioris quas abscinderent linee ducte a punctis.c.h.si plus extenderentur: quare iste linee cum circumferentia circuli equales angulos equalium scilicet portionum faciunt ex caplo de circulis in secundo libro geometrie: et similiter cum cathetis.d.l.d.m.igitur.c.poterit reflecti ab.l. Item eadem ratione angulus.d.m.h.equalis est angulo.d.m.c.igitur.c.poterit reflecti a puncto.m.et ita quattuor habebit imagines punctus. c.

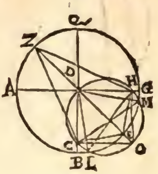
Vndecima conclusio.

49. In solis speculis concauis res confusas & dubias apparere.

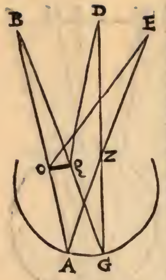








Cuius ratio ē: qm̄ in solis his speculis res apparet ī oculo vel retro oculū: visus aūt nō ē nat' acq̄rere formas nisi rerū facialiter obiectarū: ꝛ ideo res q̄ aliter apparēt: dubias ꝛ cōfusas necesse ē apparere.



Duodecima conclusio.

In speculis concauis res nunc conuersas: nunc euersas apparere. 50.

Hoc ex libro alkindi de speculis facile demōstratur: qm̄ radij in aliquo situ cōcurrūt: ꝛ in aliquo nō: quū autē concurrūt: illa que sunt intra cōfluentiam radiorū apparent euersa: quū vero extra: apparēt sicut sunt. Verbi gr̄a radi'.b.a.reflectitur ad.e. radius autē.b.g.ad.d. quū igitur radij intersecātur in pūcto.z. oportet res que sunt intra intersectionē aliter apparere: q̄ que extra sunt: qm̄ que intra sunt apparent sicut in planis euerse eadem ratione: que vero extra apparēt sicut sunt. Et sic hmōi demōstratio est iuxta illud pncipiū: sub eleuatioribus radijs visa eleuatiora apparere: q̄uis eīn in cōcursu cathetorū.e.o.ꝛ.d.q. idolū videatur euersum: tn̄ validior est imutando visum ipsa dispositio radiorū oculum mouētum q̄ cathetorū: que linee sunt imaginabiles: quod si nō hoc auctor huius libri de speculis intellexit: credo q̄ errauit. Si quē vero prolixior delectet hui' demonstratio: sextū cōsulat pspectiue. Sed si que est intra cōfluentiam eius: punctus inferior videtur sub eleuatiori radio ꝛ ecōuerso: ergo plane videt euersa: cuius euersio pꝫ ducendo cathetos alias vltra speculum.

Decimatertia conclusio.

In speculis concauis res aliquando pares: aliquando maiores: aliquando vero breuiores apparere. 51.

Hoc laboriose ꝛ prolixe demōstrātur in.6.perspectiue: sed breuiter colligitur ex premissa: qm̄ que intra confluentiam radiorum sunt: maiores apparent q̄ sunt: que vero extra sunt: scḋm diuersitatem situs apparere possunt maiora vel minora vel equalia: iuxta q̄d remotiora vł propinquiora sunt ab intersectione: ꝛ ex hoc apparet quod quāto a speculo remotiora sunt tanto maiora apparent.

Decimaquarta conclusio.

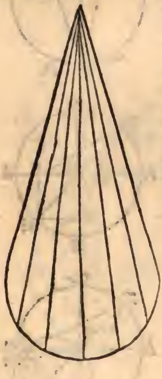
In speculis concauis ex diuersitate situum quedam apparere recta: quedam curua: quedam conuexa. 52.

Hoc latuit auctorē libri de speculis: qui in om̄i situ apparentibus: curuitatē attribuit: huius autē cōclusionis diuersitas diffuse demōstratur libro.6.capl̄o.6. huius autem veritas pꝫ per oppositū ad ea que dicuntur circa quartā ꝛ quintam cōclusiones capl̄i precedentis.

Decimaquinta conclusio.

In speculis colūnaribus intra politis eosdem errores accidere: quos in speculis sphæricis & concauis. 53.

Hoc diffuse demōstratur libro septimo capl̄o octauo: quod qꝛ satis est pbabile nō oportet in eius demonstratione laborare: ꝛ intellige errores in omnib' predictis scꝫ in numero istarum imaginū: ꝛ situ: ꝛ rectitudine ꝛ curuitate apparitionum.



Decimasexta conclusio.

In pyramidalib' cōcauis oēs errores accidere: q accidūt ī colūnarib' cōcauis. 54.

Etiam istud demonstratur in sexto libro capl̄o nono ꝛ satis liquet ex predictis.

Decimaseptima conclusio.

In speculis concauis ad solem positis ignem generari. 55.

Quod speculū si sit portio sphere: generatur ignis in cētro eius qn̄ cōuertitur directe ad solem in cōcursu radiorum reflexorū cū radio incidente. Secus est autē in speculis cōcauis scꝫ figure oblonge irregularis factis p artem traditā in libro de speculis comburentibus: in illis enim reflectuntur radij omnes extra locū incidentie prope vel longe iuxta hoc quod speculū est magis vel minus cōcauum: omnes autē radij a tali speculo reflexi coocurrūt ad punctū vnum: ad aerem disgregandū ꝛ inflamandum. In speculo autē cōcauo spherice figure non fit reflexio omniū radiorum in pūctum vnum: sed ab aliquo circulo vnde debiliter exurit: vt pꝫ supra cōclusione vndecima capl̄i scḋi libri.2. huius.

Decimaoctaua conclusio.

Stellas quasdā ex reflexione radiorū solarium ad ipsas apparēter scintillare. 56.

Quum eīn stelle sint corpora solida equalis superficiei: necesse est vt habeant supficies speculares: reflectunt q̄ radios solares: sed qꝛ continue mouētur corpora celestia: variatur continue angulus incidentie: ꝛ p consequens reflexionis: sensibilis autē variatio facit quandā vibrationis apparentiam. Hoc autem halacen auctor perspectiue nō dicit: sed est opinio quorūdam pħorū in scḋo de celo. Mihi autē videtur non totā causam scintillationis esse oculorū defectui a scribendā: nec conatus quicq̄ nec radiorū inuolutio hoc oīno efficere videt: quū videamus supficies deauratas soli oppositas: ꝛ multe

ta forti luce suffusa scintillare: que summa facilitate oculo presentantur. Amplius visus deficit tantum in cōprehensione quorūdā planetarū sicut aliarū stellarum. Amplius canicula ⁊ alie quedam inter stellas fixas clariores videtur q̄ alie: vbi nec visus plus conatur nec reuerberat magis q̄ in alijs: & defectus visus q̄uis ad hoc cōferre possit: nō tn̄ sufficit. Sz fortasse dices si specula sūt stelle: & vidēdo stellas debemus videre solē. Item eadē ratione planete scintillare deberent. Ad primū dico q̄ si totum celū esset speculū: oculus tn̄ in centro existēs videret se tantū sicut p₃ ex tertia ꝓpositione huius capl'i: q: ergo equales sunt anguli incidētie ⁊ reflexionis: radius a sole cadens in stellā reflectitur vel in se si ꝑpendicularis est: vel in aliam partē celi: si nō est ꝑpendicularis: & nō in terrā. Ad secundum respondeo q̄ planete nō scintillant q: ꝓpe sunt: radius eni solis cadens sup corpus stelle fixe ꝓpter remotionem stelle facit angulū magnum incidētie in stella: ⁊ p cōsequēs angulū magnū reflexionis: ita q̄ ꝓpter elongationē radij a stella potest visus aduertere aliquo modo diuersitatē luminis stelle ⁊ solis reflexi a stella. E cōtrario autē in corporibus planetarū q: prope sunt: angulus minor est q̄ angulus incidentie ⁊ reflexionis cum superficie stelle: ⁊ propter hoc aspectus noster non distinguit inter lumen ipsius stelle ⁊ lumen solare reflexum a stella.

Secundi libri huius perspectiuæ finis.

Liber tertius perspectiue cōis: de radijs fractis: habet capita duo in quibus sunt conclusiones. 22.

Capitulum primum de vera scientia radiorum fractorum.

Prima conclusio.

1\. SOLVS perpendicularis porrigitur recte: alterius diaphaneitatis medio occurrente.

Ista ꝓpō p₃ ex declaratione p̄me scde ⁊ tertie cōclusion' ū capl'i scdi p̄mi libri hui' vbi ēt diximus de his radijs qd verū ⁊ reale: ⁊ quid imaginariū sit credēdū nec decipiamur: imaginamur eni spēs lucis ⁊ coloris velut quasdā lineas ⁊ angulos aut pyramides ad faciendas demōstrationes modo geometrico.

Secunda conclusio.

2\. Fractio radii in ipsa contingit tantum superficie medii secundi.

Cuius ratio est: qm̄ lux in omni diaphano recte mouetur q̄tum est in se: & incuruatio vel declinatio a rectitudine esse nō potest nisi in contiguatione duorū diaphanorū. Vtrū si in eodē corpore cōtinuo sit diuersificatio secundū rarum ⁊ densum sensibiliter diuersum: an in tali diaphano lux habeat decliuē incessum satis ē ꝓlixa q̄stio: credo tn̄ ptē affirmatiuā veriorē q̄uis auctor iste cōtrariū sentire videat.

Tertia conclusio.

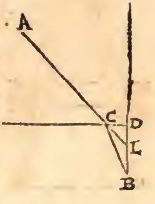
3\. Anguli fractionis diuersificantur secundum diuersitatem declinationis: & differentiam diaphaneitatis secundi medii.

Huius ratio p₃ ex predictis: qm̄ due sunt cause fractionis: vna a parte radij: debilitas sc₃ eius ex declinatione: ⁊ alia a parte medij diuersitas sc₃ diaphaneitatis: ⁊ q: quanto maior est declinatio: tanto maior est debilitatio: sequitur etiam vt iuxta hoc maior sit fractio. Amplius ex parte medij: q: quāto densius est tanto magis resistit: sequitur vt ꝓportionalis nō fiat transitus in medio densiori nisi cū maiori fractione q̄ in medio rariori. Et ideo quo densiora sunt media secūda: eo res necesse est apparere maiores vel minores: sicut infra docebitur.

Quarta conclusio.

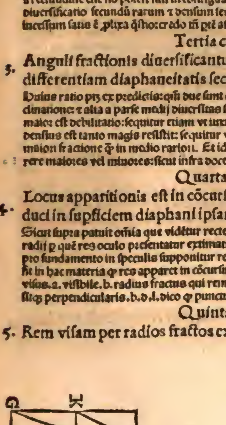
4\. Locus apparitionis est in cōcursu perpēdicularium a re visa imaginabilium duci in supficiem diaphani ipsam cōtinētis: cū pyramide sub qua res videt.

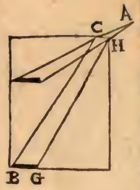
Sicut supra patuit oīa que videntur recte apparēt facialiter obiecta visui: ⁊ ꝓpter comprehensionē radij p quē res oculo presentatur extimatur res esse in fine ipsius radij in cōtinuum ꝓduci. Sicut & pro fundamento in speculis supponitur rem apparere in cōcursu radij cum catheto: sic in proposito sit in hac materia q̄ res apparet in cōcursu radij cū perpēdiculari erigibili a re visa. Verbi gratia sit visus. a. visibile. b. radius fractus qui rem visui ostendit. b. c. qui in. c. frangitur ⁊ inde procedit. c. a. sitq₃ perpendicularis. b. d. l. dico q̄ punctus. b. apparet in. l.



Quinta conclusio.

5\. Rem visam per radios fractos extra locum suum necesse est apparere.





Illud ex predictis patz: si enim in cōcursu perpēdicularium & radiorum visualium apparet res visa: & hic cōcursus est extra locum rei vise: necesse est alibi q̄ sit apparere. In planis autē diaphanis semꝑ imago apparebit ꝓpinquior q̄ sit res secūdum rei veritatem: in sphericis autem aliter potest esse vt infra patebit: in planis igitur vniuersaliter sic est. Verbi gratia. g. q. apparebit in. k. l.

Sexta conclusio.

Res partim existens in aqua partim in aere apparet fracta. 6.

Sequitur enī si pars existēs in aqua ꝓpinquior apparet q̄ sit scōm veritatē: res autē extra aquā apparet in loco suo: ergo iste partes directe cōtinuate apparere nō possunt: apparent ergo continuate indirecte.

Septima conclusio.

Possibile est aliqd videri p radios fractos: qd p directos ad oculū nō ptingit. 7.

Hoc experimento patz: quī si ponatur aliquid in ꝓfundo vasis mediocris altitudinis: latebit forte visum: qd si aqua superfundatur statim oculo manifestabitur. Cuius demōstratio hec ē: quī radij recte ad oculū ptingere nō possunt: ꝓpter interpositionē opaci: fracti tamē possūt. Verbi gratia sit res visibilis. b. g oculus. a. & sit. b. g. in aqua: planū ē q̄ nō videbitur sub radijs. g. a. & . b. a. sed sub. b. c. & . g. h. radijs fractis ad. a. ergo q̄uis impediantur radij. g. a. & . b. a vt pertingāt ad oculū: nō tamē impediuntur fracti. In aere autem fieret visio sub. g. a. & . b. a. illis ergo impeditis in aere videri non possunt: adueniente autē fractione ex diuersitate medij poterit videri.

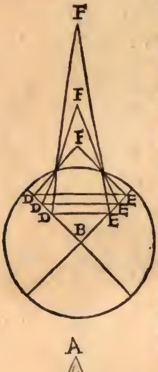
Octaua conclusio.

Rei visæ sub radiis fractis impossibile est certificari quātitatem. 8.

Cuius ratio est quī ad q̄titatis certificationē requiritur cognitio distātie: & cōprehensio anguli pyramidis: sub quo res videtur: vt patz ex. 20. sexti capli ꝑmi lib. huius: quorū vtrūq; deficit quū radij oculum mouentes frangātur & per consequens angulus diuersificetur. Ex quo sequitur vt quātitas stellarū veraciter omnino non cognoscatur: quia celum est corpus subtilius q̄ aer vel ignis.

Nona conclusio.

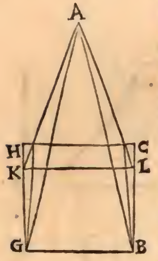
Res visa existens in diaphano densiori superficiei hemisphærialis potest apparere maior quā sit: & minor: & æqualis conuexitate ad oculum conuersa. 9.



Hoc ex duobus patz: quī perpendiculares suꝑ spherā nō equedistāt: sicut cadentes suꝑ planū: imo cōcurrūt in centro: planū est autē q̄ pyramis linearū a cono suo semꝑ ꝓcedit dilatādo se: cū hoc etiā supponēdū qd in q̄rta ꝓpōne huius capli demōstratur: q̄ cōcursus radiorū cū hac pyramide pōt esse citra rē visam. i. in maiori distantia a cētro sphere q̄ sit res ipsa: & tūc res apparet maior q̄ sit. Et hec est ratio quare res in aqua apparēt maiores q̄ sint: aqua enī habz suꝑficiem sphericā vbicūq; sit: sicut demōstratur in libro de celo & mūdo & in hac pħia supponitur: cōcursus ergo est necessario propinquior oculo q̄ res ipsa: & est locus imaginis in maiori diametro pyramidis perpendicularium q̄ sit res ipsa. Maior ergo apparet res vt in aqua q̄ vbicūq; sit: quia suꝑficies eius superior portionē sphere cōstituit q̄uis plana appareat ꝓpter sphere magnitudinē: eadem enī est natura partis & totius. Vel in alterius dispositionis sphera pōt concursus esse dictarū ꝑpendicularium cū re visibili in loco ipsius rei visibilis: & tūc appareret res in veritate situs & q̄titatis sue. Vel potest tertio cōcursus iste esse remotior a visu q̄ sit res ipsa: & ꝓpinquior cētro sphere qd ē conus dicte pyramidis: ergo quia diametri dicte pyramidis quāto sunt cono propinquiores tanto sunt breuiores: necesse est ibi rē apparere minorē. Verbi gratia sit ꝑspicuum hemisphæriale. a. b. c. visibile. d. e. cētrū sphere. b. quia ergo potest esse dictus concursus vel inter f. & . d. e. vel vltra vel in ipsa linea. d. e. sequitur quod predictum est.

Decima conclusio.

Rem visam existentem in diaphano densiori q̄ sit oculus: & superficiem habente planam: necesse est apparere maiorem q̄ sit. 10.

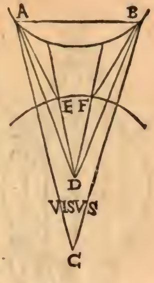


Hoc patz quī res ipsa apparet ꝓpinquior q̄ sit: presentatur etiam oculo semꝑ sub maiori angulo q̄ videri possit scōm radios directos: ergo maior apparet q̄ sit scōm veritatem: maior enī angulus ad equalem vel maiorē distātiā relatus rē indicat eē maiorē: sicut patz ex ꝑmo libro huius caplo. 6. cōclusione. 20. Verbi gratia sit res visa existens in aqua. g. h. oculus vero. a. planū ē q̄. g. b. videretur in aere sub angulo. g. a. b. videretur etiā in loco suo: sed ꝓpter aquā franguntur radij. b. c. & . g. h. in ingressu aeris & videtur res sub angulo. h. a. c. qui est maior illo quē includit scz. g. a. b. Itē res non apparet in loco suo: sz in linea. k. l. vt supra patet: hoc enī confirmatur quia cōcursus radiorum cū corpore dictarum perpendicularium in huiusmodi diaphano semper est inter visibile & visum.

Vndecima conclusio.

Concauitate diaphani densioris ad oculū versa accidit ecōuerso illi quod cōtingit conuersa ad oculum conuexitate. 11.

Res enī apparet magna vel parua secundū q̄titatem diametri pyramidis dictarum perpendicula-rium in qua fit cōcursus: ꝛ quia potest triplici modo hic cōcursus variari: sequitur vt res possit in tri-plici q̄titate oculo presentari: id est minor quum cōcursus est oculo propinquior q̄ res: vel equalis quum concursus est in re ipsa: vel maior quum est remotior ab oculo q̄ res ipsa.



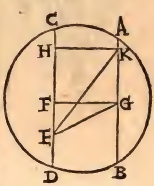
Duodecima conclusio.

12. Stellas ex fractione necesse est minores apparere q̄ sint: & q̄ si directe in tanta distantia apparerent.

Uniuersaliter enī res existens in pspicuo raro oculo existēti in pspicuo densiori apparet minor q̄ sit: tamē qñ est diaphanū alterius figure pōt aliter accidere: ecōtrario ei qđ accidit qñ oculus est in dia-phano puriori: in ꝓposito tñ non est ita: qꝛ stelle minores videnł q̄ si directe viderenł: qñ aūt sunt in circulo meridionali vel in zenith minores apparent q̄ alibi: cuius causa vna habita est supra in pmo libro ꝓpositione. 4. capłi. 7. Ad ꝓpositū aūt ꝓceditur sic qꝛ locus imaginis est in cōcursu dictarū perpendicularium ꝛ radiorū visualium: hic aūt cōcursus est ꝓpinquior visui q̄ corpora stellarum: ġ erit in loco predicte pyramidis minori q̄ sit stella: hoc pꝫ qm̄ si accipiatur arcus stelle q̄ videł: ꝛ sit. a. b. ducanł inde ꝑpendiculares in centrū mundi que sint. a. c. ꝛ. b. c. sitq; visus. d. ad quē ducanł linee. a. d. ꝛ. b. d. certū est q̄ per istas nō est visio: nulli enī nō fracti radij possunt ad visum pertingere: radij ergo sub q̄bus fit visio non cadūt ambo extra. a. d. ꝛ. b. d. frangunł enī ad ꝑpendicularē ꝛ non cōcur-rūt in. d. si extra cadūt: cadent ġ ambo intra vel saltē vnus extra ꝛ alter in intra: sint ġ. a. e. ꝛ. b. f. q̄ frā-guntur in pūctis. e. ꝛ. f. ꝛ cadūt in. d. q̄ro ġ vbi radij. d. e. ꝛ. d. f. cōcurrēt cū pyramide. a. c. b. planū ē q̄ ci-tra corpus stelle: q̄re ꝓpter iproportionabilē distātiā stellarū minores apparēt q̄ si directe viderenł.

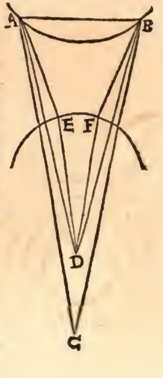
Capitulum secundū per modum epilogi totius sperspectiuæ ex tribus prædictis libris elicit quasdam conclusiones.

Prima conclusio.



13. STELLAS in orizonte propinquiores aquiloni apparere: q̄ meridionali circulo propinquantes.

Hoc probo sic: ducał linea inter ortū cuiuscūq; stelle ad meridiem declinantis ꝛ occasum eiꝰ: ducał ꝛ alia ei equidistās per oculos inspectoris vtrinq; ad la-tera orizontis: dico q̄ accessus stelle ad meridiem vel elōgatio ab aquilone est secundū cōprehensionē distātie harū duarū linearū: certum est autē q̄ notabi-lior est harū duarū linearū distātia in medio qđ est aspectui ꝓpinquius: ꝛ etiā ex latitudine terre q̄ in medio extendił: q̄ in extremis que magis elongantur a visu: ꝛ linea terminalis distātie harū duaꝝ linearū vtrobiq; lōge sub acutiori angulo videł: q̄ linea distantie medialis. Verbi gr̄a sit pma linea. a. b. scđa sit. c. d. sitq; visus. e. sit linea medie distātie. f. g. sit linea distātie extreme. h. k. planū est q̄ lōge maior est angulus. f. e. g. q̄. h. e. k. Auctor autē pspe-ctiue hanc diuersitatē attribuit fractioni: qꝛ quū stella est in zenith sub ꝑpēdicularibꝰ radijs videł ꝛ nō fractis: quū aūt est in orizonte videł sub radijs fractis: ꝛ fractio causa est vt magis videanł aquilo-ni appropinquare. Hec autē ratio bona est ꝓ aliquibꝰ stellis: sed nō videtur ꝓ oībus sufficere: qꝛ nō solum stelle q̄ trāseunt per zenith: sed etiam multe alie que multum a zenith elonganł sicut sol ꝛ alie circa a tropicū hyemalē sic se hñt q̄ remotiores a polo apparēt quū sunt insublimi: ꝛ tamē certum est q̄ sub radijs fractis videtur. Item stelle ꝑ zenith trāseuntis vnus solus radius perpēdicularis ꝛ nō fractus intrat in oculū aspicientis. Fractionē autē esse causam vt appareat aquiloni magis appropin-quare: pꝫ sic sit circulus magnus signans orizontē in quo sit stella. a. b. sitq; circulus minor signans sphærā ignis. e. f. sitq; oculus. d. ducanturq; due linee. a. d. ꝛ. b. d. planū est q̄ sub his nō ē visio: radius ergo sub quo videtur a pūctus aut cadit extra lineas istas. i. propinquius aquiloni aut infra: si extra vt in. e. frangał ibi versus ꝑpendicularē ꝛ cadit in. d. si ponatur cadere infra. i. remotius ab aquilone impossibile est q̄ cadat in punctū. d. qꝛ frāgitur ad perpēdicularē: eadem ratione necesse est vt pun-ctus. b. videatur: ꝛ ita locus imaginis totius stelle vergit ad aquilonem respectu loci stelle. Sed ista ratio non posset applicari stellis meridionali circulo appropinquantibus ꝛ a zenith capitis elonga-tis nisi forte ibi maior fiat fractio: non ergo sufficit ista ratio sine alia vt credo.



Secunda conclusio.

14. Omne quod videł directe videł & refracte: vna tātū existente eius imagine.

Certū est enī ex pmo libro caplo. 4. ꝓpositione. 2. ꝛ. 5. q̄ quilibet pūctus rei vise sigillat punctum sibi oppositū in glaciali ꝑ radios super corneam ꝑpendiculariter orientes: sed qꝛ quilibet punctꝰ in oēm partē spargit lucem suam: necesse est q̄ quilibet punctus rei visibilis totam occupet pupillam: ꝛ quilibet punctus in pūcto quolibet radiet glacialis: sed qꝛ ab vno puncto sup oculū non pōt egredi ni-si vnus radius perpendicularis: frangūtur oēs preter vnum in ingressu cornee: ipse autem punctus apparet in loco suo vbi cōcurrit fractus radius cū ꝑpendiculari: ꝛ q̄uis in quolibet pūcto perpēdicu-laris obumbret fracti radij: tñ fracti ad hoc valent: vt res clarius videał ex cōcursu vtriusq; luminis.

Tertia conclusio.

Multa per fractionem videri extra pyramidem radiosam. 15.

Pyramis radiosa est aggregata ex radijs perpendiculariter exeuntibus sup corneam et intrantibus foramen uuee quod paruũ est: multa ergo ex latere videntur imperfecte: que intra dictã pyramidem non continentur sicut ad sensum patet: et que sic videntur debiliter videntur: q: per radios tantũ fractos: omnes enim in ingressu cornee franguntur.

Quarta conclusio.

Ex concursu radiorum fractorum possibile est ignem generari. 16.

Ex reflexis ptz sup:a ꝓpositione. II. capi. 2. huius secũdi libri in speculis: et eiusdẽ libri penultima propositione: cõtingit etiam idem in corporib' diaphanis rotũdis solarib' radijs expositis. Sed inter specula et diaphana hec ẽ differẽtia: qm̃ in speculis generatur ignis inter speculũ et solẽ: in diaphanis autẽ ecõuerso ipsum diaphanũ interponitur. Verbi gr̃a sit cristallus rotunda cuius diameter sit. y. a. z. cadantq; a sole radij sup ipsum. x. c. x. s. x. y. x. p. x. q. certũ est q solus. x. y. cadit in cẽtrũ. a. ꝓceditq; nõ fract' vsq; in. h. alij ḡ frangũtur ad pendicularẽ et cadũt sic ab ipso. c. i. b. et. ab. s. in. g. a. p. i. n. et. a. q. in. o. veniens ḡ radius. c. b. ad supficiem aeris cõcauã nõ ꝓcedit directe in. e. sed frãgit a ꝑpẽdiculari. b. k. vsq; in. h. et sic de alijs: qbus aggregatis rarefacto aere vltra terios sue speciei ignis generat.

Quinta conclusio.

Omnis radius directus: reflexus: vel fractus: tãto debilior est i adurẽdo quãto minus figitur in obiecto. 17.

Et hoc potest esse vel ex motu obiecti: vl' ex motu luminosi. Obiecti quidẽ sicut ꝓpter velocẽ motum fluminũ nõ fiũt tante exalationes sicut in aquis marinis: ꝓpter qd et salsedine carẽt. Propter motum velociorẽ luminosi accidit q tẽperatior ẽ habitatio sub equinoctiali circulo q̃ sub alio paralello vie solaris: qm̃ solus equator inter paralellos sphere spherã diuidit in duo equalia: et est maior alijs paralellis. Sol ḡ quũ eq̃li tẽpore motu suo describat eq̃torẽ q̃ minimũ paralellũ quẽuis aliũ: necesse est vt in illo maiori tanto velocius rapiatur: et p cõsequẽs virtus eius minus figatur in subiectis sibi locis: q̃ quã est in alio paralello. Item circulus diuidẽs terrã in duo equalia sub equinoctiali maior est quocũq; alio sibi equedistãte: ḡ qm̃ sol est in aliquo alio paralello: radius eius perpẽdiculariter cadens in locum sibi subiectũ maior est: et tãtum in eo figitur q̃tum in eodẽ tempore radius solis declinans in arcu terre maiori: sub equinoctiali ergo minus vrit.

Sexta conclusio.

In generatione iridis triũ prædictorũ generũ variatiões cõcurrere radiosas. 18.

De radijs rectis ptz: q: iris generatur ex opposito solis: de reflexis certũ est qm̃ stille quedã sunt speculares et superficiei leuis in modum aque radios reflectentes: de fractis insuper patet quoniam lumen solare intrat in profundum aque: q̃uis reflectatur.

Septima conclusio.

Causam rotunditatis iridis principaliter consistere in nube. 19.

Quando enĩ nubes regulariter suspensa est terre equidistãs: certũ est q roratio regulariter descẽdit: et hoc ad circularitatẽ sufficit: alie nubes vero vallicose et suspẽse irregulariter nõ habẽt in se impressionẽ regularẽ. Quidã autẽ ponunt causam a parte radiorũ dicentes: q lumen radiosum intrat in nubẽ roridam: et inde vltra nubẽ concurrit in puncto vno sicut declaratur in. 4. ꝓpositione huius capli: post cõcursum aũt iterũ lumen ipsum dilatatur in pyramidẽ: cuius medietas cadit in nubem: et facit per cõsequẽs impressionẽ semicircularẽ: alia aũt medietas cadit sup terrã. Sed cõtra cadat radius solaris p foramen rotundũ certũ est q erit rotundus: opponatur ei lapis hexagonus generãs colores iridis: certũ est q generat iridem nõ in figura radij que est orbicularis: sed in figura lapidis que ẽ colũnaris: si igitur cõsimilis passio cõsimilẽ hz causam: opz vt causa figure arcus querenda sit in nube et nõ in radio. Item hec positio videtur cõtra sensum: qm̃ iris gñatur a sole sine aliquo interposito in nubem roridã radiante: qd lumen cadẽs in nubẽ vocat p̃dus radium medie rotunditatis: lumen enĩ figuram capit a medio in quo est. Alij ponunt rotunditatẽ in radio ex seipso: dicunt enĩ q radij pyramidaliter disgrediuntur a sole: et medietas pyramidis cadit in nubẽ et facit dictam figuram. Sed hoc nihil est: qm̃ si de toto lumine solari agitur: quilibet punctus solis implet totũ hemispherium lumine suo. Si de particulari aliqua pyramide agitur: non sunt pyramides a se distincte et diuise: sed vnũ corpus continuum lucis continens in se potentialiter pyramides infinitas: quarum quedam habẽt conum in luminoso: quedam in obiecto vel medio.

Octaua conclusio.

Diuersitatem colorũ iridis tam ex nubis q̃ ex luminis variatione ꝓuenire. 20.

Nubis variatio ex hoc accidit q roratio descendit ad centrum et angulum: ergo per consequens est

inferius angustior ꝛ superius latior. Cuius tamen contrarium quidam dicunt nimis ruraliter: quũ certum sit omnia grauia descendere ad angulum: ꝛ ita non potest esse vt pyramis rotida rotunda habeat conum sursum ꝛ latitudinem deorsum: superius igit̃ lata paulatim in descendẽdo densior fit propter pyramidis coangustationem ex descensu ad angulum prouenientẽ. Et propter hoc ꝙ grossiores partes citius descendunt aptior est superius ad colores nobiliores ꝛ luci cõformiores: ꝛ inferius minus. Potest etiam esse diuersitas a parte luminis directe cadẽtis in nubẽ ꝛ magis fracti in singulis partibus nubis: sed ꝛ reflexi a stillis super alias stillas: quę omnia in lumine magnam solent diuersitatem efficere: vt supra visum est. Quod autẽ dicunt quidam in eisdem nubis partibus diuersos generari colores: nec in omnibus illis apparere: sed in illis tantum ad quos radij eos constituentes reflectuntur: non capio: quoniam impressiones omnes non vidẽtur per radios ipsarum generatiuos: sed per speciem propriam extra locum reflexionis: sicut patet in radio transeunte per fenestram vitream coloratam vsqȝ in corpus oppositum: sicut etiam patet in generatione colorũ in lapidibus hexagonis qui videntur ex omni parte. Quę autem falso dicuntur de iride multum possunt refelli per hoc quod in huiusmodi lapidibus contemplatur.

Nona conclusio.

21. Generationem iridis cataclismum excludere.

Excludit quidem per modum signi conuenienter dati: sed non sufficit ad causandam serenitatem. Non enim omnis: sȝ subtilis resolutio nubis parit iridẽ: colores enim nobiliores in iride concurrentes: quales pictor facere non potest: densarum nubium obscuritas ꝛ grossa resolutio non admittit: significat ergo iris humidę resolutionis paucitatem: ꝛ per consequens promittit oppositum cataclisis. Amplius ad hoc causaliter agit reflexorum radiorũ concursus a nubibus cum radijs directis: non enim generatur iris in nubib⁹ in omni parte densatis: q̃re opȝ simul vt radij solares libere trãseant ꝛ concurrant cum radijs directe incidentibus: ex quo concursu fit attenuatio vaporis vt pluuiã inde consumat. Posset etiam dici ꝙ generatio iridis post magnas pluuias est signum serenitatis: sed post magnã serenitatẽ est signum pluuie future: q: incipit cõdensatio aeris a subtiliore materia.

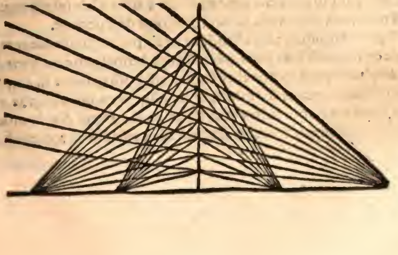
Decima conclusio.

Lucem solarem & sideralem in perspicuo puro efficere galaxiam.

22. Quidam in hac questione dicunt philosophum tenuisse galaxiam esse exalationem a terra eleuatam ꝛ luce stellarum illustratam: ideo dicunt galaxiam nõ generari in ignis purissima regione: quasi impressio fieri non possit in puro corpore transparente: quum contra videamus lunarem radium in domo sub obscura per aerem transeuntem facere impressionẽ albam: quãuis in aere non sit sensibilis densitas: abscondere enim se non potest vehementissima radiatio ipsius lucis. Multitudo ergo radiorum stellarum concurrentium in suprema parte ignis vel aeris eadem ratione ibidem sensibilis potest apparere: quam dicimus galaxiam siue viam lacteam. Et hec opinio est ꝓbabilior quam opposita: que cogitur fingere quotidie exalationes ascendentes ad illam partem aeris que sub stellis galaxie situatur.

Tertij libri et totius perspectiue cõmunis Finis.

Hæc figura ex obliuione dimissa superius: deseruit nonæ conclusioni secũdi capituli secundi libri huius perspectiuæ.



Sequitur declaratio quarūdam intentionum visibilium: de quibus supra in libro primo huius perspectiuæ capitulo sexto: ab incerto auctore habita.

CORPOREITAS est extensio rei secundū trinā dimensionem: quæ in quibusdā corporibus scilicet rotundis cōnexis ab extremo vnius partis visibilis ad alteram intelligitur profunditas. In corporibus vero habentibus plures superficies nō cōpræhendūtur nisi compræhēdantur superficies suæ: vbi ab extremo superficiei visibilis ad alterā intelligitur tertia dimensio. In corporibus cōcauis quādo cōcauitas fuerit diametraliter opposita: nō cōpræhēditur corporeitas: sed quādo cōcauitas fuerit obliqua taliter quod superficies exterior videatur: potest corporeitas compræhendi.

Asperitas vero compræhenditur a visu in maiori parte ex forma lucis apparentis in supficie corporis asperi: qm̄ asperitas est diuersitas situs partium in superficie corporis: quare qm̄ lux oritur sup superficiē illius corporis: partes pminentes quæ erunt luci manifestæ facient vmbrā: partes profundæ erunt illis vmbris cooperte. Item cōpræhēditur asperitas cum partes fuerint maxime pminētes: & sic visus cōpræhēdet pminētiam illaꝝ partiū: & ex illa cōpræhensione cōpræhēdet diuersitatē situs in superficie corporis: quoniam quasdā cōpræhendit esse ppinquas: quasdā vero remotas: & p hoc iudicabitur corpus eē asperum: sed cū lux oriens super corpus asperum fuerit ex parte opposita superficiei asperæ & fuerit lux fortis: non compræhendet visus asphæritatē: nisi cōpræhendat pminētiā quarūdā partium & pfunditatē aliarum: si ergo tūc asperitas fuerit maxima compræhendetur a visu solūmodo ex diuersitate situum partium: si vero fuerit modica nō compræhendetur a visu: nisi in magna propinquitate & forti intuitu.

Planiciēs compræhenditur a visu in pluribus similiter ex forma lucis apparēte in supficie corporis plani: quæ in eis est similis formæ: cū ergo viderit visus vniformitatē lucis in aliqua superficie: indicabit illā esse planam. Tersio autē: quæ est maxima planicies: cōpræhenditur a visu ex scintillatione lucis in superficie corporis sui. Sed cū in eadem superficie aggregātur asperitas & planicies: tunc comprahendet visus illā asperitatem & planiciem ex diuersitate situs partiū: qm̄ aliquæ erūt præminentes & aliæ profundæ. Et aliquādo planicies cōpræhēditur a visu ex sola intuitione: & tunc non est necessaria cōsideratio lucis: vt dicebatur de asperitate.

Diaphanitas autem cōpræhenditur a visu per argumētationem scilicet ex compræhēsione illius quod est in posteriori parte corporis diaphani. Et diaphanitas nō comprahendetur a visu: nisi tū fuerit in corpore diaphano spissitudo quædā: sed minor spissitudine aeris interiacentis visum & corpus diaphanum: ꝙ si ecōtra sit non comprahendetur diaphanitas a visu. Et iterum nō compræhenditur diaphanitas a visu nisi ex compræhensione

illius quod est in posteriori parte corporis diaphani: & pars posterior comprehenditur ex luce vel corpore illuminato iuxta corpus diaphanũ existẽte: & si iuxta corpus diaphanum vel in eius circuitu nõ fuerit lux vel corpus illuminatum: non cõpræhendetur diaphanitas: quod cõtingit quando corpus diaphanũ fuerit applicatum corpori opaco & ab eodẽ contentum. Et similiter nõ cõpræhẽdetur diaphanitas corporis diaphani qñ corpus diaphanũ fuerit obscuri coloris: vel qñ i posteriori parte corporis diaphani fuerit locus obscurus. Et siliter cũ corpus diaphanũ fuerit paruæ diaphanitatis: & corp9 existẽs in posteriori ei9 pte & corpora existẽtia in circuitu eiusdẽ fuerint debilis lucis: nõ cõpræhẽdet diaphanitas eius nisi exponatur luci forti.

SPissitudo vel opacitas compræhẽditur a visu expriuatione diaphanitatis: cum enim visus compræhenderit corpus: & non senserit in ipso aliquam diaphanitatem: arguet in eo spissitudinem.

VMbra vero appræhenditur a visu respectu lucis illuminantis expriuatione casus eiusdem super corpus obumbratũ: & ex cadentia eius super corpus corpori obumbrato propinquum: quoniam quando senserit visus i illud quod est prope corpus obumbratum esse illuminatum fortiore luce quã sit corpus obumbratum: arguet priuationem lucis cadentis in loco vmbroso. Obscuritas vero seu tenebra compræhenduntur a visu per argumentationem ex priuatione omni9 lucis: cum ergo visus compræhendat aliquẽ locum: & nullam lucem in eo senserit arguet in eo obscuritatem.

PVlcritudo compræhenditur a visu ex compræhensione intentionum visibilium: & ex proportione illarum ad inuicẽ. Et ex hoc nota ꝙ tres sunt modi pulcritudinis: primus est quẽ facit vnaquæꝗ intentio per se: & sic lux solis & lunæ facit solẽ & lunã pulcra: & numerus multarũ stellarũ reddit quasdã partes cœli pulcriores aliis vbi sunt pauce stellæ: & distĩctio plurium candelarũ facit maiorẽ pulcritudinẽ ꝙ̃ si omnes fuerint simul coniunctæ: & sic de aliis intentionib9 per se. Secũdus modus est q causatur ex plurib9 intẽtionibus cõiunctis: vt ex figura & magnitudine litterarũ & earũ ordinatione resultat maior pulcritudo ꝙ̃ ex paruitate illaꝝ & situ inordinato. Tertius modus ẽ q resultat ex ꝓportione vnius intẽtiõis ad alterã sicut debita magnitudo oculorũ cũ debita figura: nã sic resultat proportio causans pulcritudinẽ.

TVrpitudo est forma qualibet carens intentione pulcra: quoniam dictũ est ꝙ intentiones particulares faciunt pulcritudinẽ: & cõiunctio illarũ ad inuicẽ: & proportio vnius ad alterã: vnde patet ꝙ qualiscũꝗ fuerit carentia cuiuslibet modi pulcritudinis erit omnimodæ turpitudo. Consimilitudo autem est æqualitas duarum formarũ aut duarum intentionum in re in qua sunt consimiles: cum ergo visus compræhẽderit duas formas: vel intentiones consimiles: cõpræhendet simitudinem illarum: & cuiuslibet duarũ formarum & intentionum & ex comparatione alterius illarum ad alteram. Diuersitas compræhẽditur a visu in formis diuersis compræhẽsis cuiuslibet formarũ diuisarum & ex cõparatione alterius ad alterã: & ex cõpræhẽsione in æqualitatis: vel similitudinis in eis. Iste ergo sunt intẽtiones quarũ declaratio intendebatur in hoc opere.

Adaptatio perspectiuæ ad res spirituales & diuinas.

QVemadmodum superius in Arithmetica & Geometria feci
mus : ita in Perspectiua par esse duximus ea que de radijs visualibus: ⁊ mo=
do videndi tam recte ꝙ reflexe ac etiam fracte disseruimus in corporalibus : ad
spiritualia ⁊ mores nostros aliquãtisper trãsferre. Cũ itaq; omnis irradiatio=
nis aut illuminationis corporalis pͥncipium ⁊ causa sit sol: qui in sacris scriptu
ris christũ sigñat: vnde ⁊ virtutẽ irradiandi colores a luce habere diximus: cõse=
quens est vt mẽtes nostras colorib⁹ assimilemus que ab illo illuminanť: qui
illuminat oẽm hoiem venientẽ in hunc mũdum: ⁊ a quo signatũ est super nos
lumen vultus eius: quare in aĩa nostra oculus vidẽs ⁊ color visibilis idem sunt. Et quotquot requi=
runtur ad bonã visionem in corpore: totidẽ necessaria sunt ad purã contemplationẽ in mẽte: vt eñ
visus in corpore: ita ⁊ in aĩa mens ait Aristo. Ad rectã aũt visionẽ octo cõcurrũt: pͥmum est sanitas ⁊
debita organi dispositio. i. duorũ oculorũ: quasi autem duo oculi aĩe nostre sunt intellectus ⁊ volun=
tas: ⁊ tunc oculus intellect⁹ est sanus: qñ ab erroribus est mũdus: sed ⁊ oculus voluntatis qñ est ab
affectibus terrenorũ purgatus: ⁊ vtraq; harum sanitatũ est necessaria ad pure cõtemplãdum deum:
vnde ⁊ dñs ait. Beati mũdo corde qñ ipsi deum videbunt: ⁊ acquiriť talis sanitas ꝑ virtutem fidei
dicente aplo Petro: fide purificans corda eorũ. Secundũ est facialis oppositio rei visibilis ad oculũ
per pyramidẽ radiosam que ex parte rei habet latitudinẽ: ex parte vero oculi angustiam: ita etiam qñ
aĩa nostra diuina contemplať: que in se magna sunt: de eorũ magnitudine modicũ quid attingit: ideo
eorũ magnitudo in oculis nostris angustiatur: vnde dictũ est moysi. Nõ videbit me homo ⁊ viuet: ⁊
posteriora mea videbis: faciem autẽ meam videre non poteris. Et sicut obiecta visus nostri corporei
sunt triplicia. s. luminosa: colorata: ⁊ specula: sic cõtẽplãda ab aĩa nr̃a sub deo sunt triplicia. s. spũales
substantie: res corporales: ⁊ sacre scripture a deo reuelate. Tertium est ꝓportionalis distantia: ita ꝙ
res visibilis nec oculo nimis adhereat: nec nimis elõgetur: sed medocriter distet: sic ẽ mũdanorum
nimis adherẽtes rebus sensibilib⁹: inepte sunt ad contẽplationẽ: sic dãnatorũ nimis remote ꝙ nihil
vidẽt de reb⁹ diuinis: sed bonorũ viatorũ mentes mediocriter se habẽt ad deum ⁊ pie cõtẽplanť ipm.
Quartũ est soliditas obiecti ⁊ nõ nimia peruietas: qꝛ cõtemplatio nostra debet esse circa solida ⁊ eter
na: nõ circa peruia. i. trãsitoria: vnde aplus ait. Non cõtemplãtibus nobis que videnť ⁊c. Quintum
est debita magnitudo obiecti. i. ꝙ nec sit res nimis parua nec valde magna sed mediocris: nostra ẽ
cõtemplatio nulla est circa hec minima bona: ⁊ circa maxima diuina deficit: ſʒ circa mediocria mul
tum valet. Sextũ est ꝙ mediũ vidẽdi non sit nimis densum qꝛ impedit visionẽ: hoc medium in contẽ
platione ẽ corpus qð corrũpiť ⁊ aggrauat aĩm. i. corpus nimis deditũ delitijs carnalib⁹. Septimũ est
ꝙ medium ⁊ obiectum atq; organũ sit illuminatũ: siĺr ad contemplandũ est lux gratie dei necessa=
ria. Accedite inqt ad deũ ⁊ illuminĩ animi ⁊c. Octauũ ẽ ꝙ ad visionẽ requiriť certũ tẽpus: nõ ad plu
rimas visiones reqriť sic deliberatio ꝙ nõ fit sine tpe: siĺr etiam bona cõtẽplatio requirit suum tẽ=
pus oportunũ ⁊ quietũ. ps. Mane astabo tibi ⁊ videbo ⁊c. Iterum in matutinis meditabor in te ⁊c.
Iterũ media nocte surgebãt ad cõfitẽdũ tibi ⁊c. Hec ad pͥmi libri ꝑspectiue imaginationes pertinent.
¶ Materia vo scdi libri de speculis in quib⁹ rerũ imagines cõtẽplamur: solet apud theologos ad na
turas rationales adaptari: ⁊ lʒ septuplices posuerimus speculorũ figuras: tñ speculorum substantia
tantũ triplex reperiť: in qua varia est imaginũ apparẽtia ratione dicte substãtie varie. Est eñ speculũ
oĩno purũ nec ꝓprium colorẽ habẽs neq; appositũ vt lapis preciosus adamas aut carbũcul⁹ vel be=
rillus. Est ⁊ aliud qð lʒ ꝓprium colorẽ nõ habeat: ſʒ bene appositũ: vt vitrũ cũ plũbo. Est deniq; ter
tium speculũ ꝓprio colore affectũ: vt ferrum: lapis marmoreus: ⁊ alia hmõi corpora: qbus spũaliter
correspondent triplices nature rationales in quibus imago alterius rei dicitur elucere. s. natura di=
uina: angelica: ⁊ humana: nam in diuinis filius dei dr̃ imago patris sui a quo procedit ⁊ figura sub=
stantie eius. Et angelus dr̃ signaculũ similitudinis dei: ⁊ homo dr̃ creatus ad imaginẽ dei: ⁊ cũ color spe
culi ad impfectionẽ referať: optime filius dei est velut speculũ adamãtiũ infrangibile. Angelus spe
culũ vitreum faciliter frangibile a pͥncipio sue creationis. Homo vero speculũ ferreum vel marmoreũ
opacitatẽ habẽs pctĩ originalis a natura. Unde in eis speculis varie apparẽt dei imagines ⁊c. ¶ Ra
diorũ deniq; fractorũ illusiones ad tertiũ librũ ꝑspectiue ptinentes: mũdanorũ hoim errores proten=
dũt: q ꝓpter varia media sue inspectionis. i. creaturas in quib⁹ deum enigmatice vident: in multos
errores idolatrie inciderũt: ⁊ falsa iudicia de rebus spũalib⁹ confinxerunt vt Aug. deducit in libro de
vera religione. Soli ẽ christiani signũ federis dei iesum xp̃m aspicientes: vt iridẽ siue archum celestẽ
in nubibus glorie fulgentẽ: potuerũt viam lacteam paradisi recte ambulare: qua in perspecuo puro
sine nebulis deum contemplari valeant: sed de his alias operosius.

Petri Ciruelí Darocēsis questiūcula

preuia in Musicam speculatiuam Diui Seuerini Boetii.

De elucidationē theorice Mu

sice (quā diuus Seuerinus Boetius compendiose ex antiquioribus auctoribus recollegit modo quodā introductorio) Videtur in primis querendū an theorica ista Philosophorū cōcordet practice cōmunium musicorū voce aut instrumētis contantiū. Pro cuius solutione sine argumentis est aduertendū primo: ꝙ musica sciētia cum sit mixta mathematica subalternatur scientie naturali pro ea parte qua agitur de audibili & de auditu in secūdo libro de anima & in libello de sensu & sensato: sicut etiā perspectiua subalternatur eidē Phisice in quantū agit in eisdē locis de visibili & visu: licet vtraqꝫ earū imaginationibus mathematicis res naturales pertractet: et eas demōstrare conetur. nam sicut perspectiua per puncta lineas & superficies de irradiatione lucis & coloris disputabat: ideoqꝫ dicebatur subalternata Geometrie: simili modo etiā musica de sonis & vocibus agēs eas pertractat rationibus numeralibꝰ: hoc est ac si voces essent vnitates & numeri pares aut impares: & easdē proportiones aut proportionalitates que numeris conueniunt: ista in vocibus & sonis imaginatur. Vnde non immerito musica dicitur etiā subalternata arithmetice. Ad hoc propositū quidā exponere volunt & satis bene auctoritatem Aristotelis in cathegoriis capitulo de quātitate vbi ait: est autē quātitas discreta vt numerus & oratio: quia vt aiunt per illa verba noluit dicere que essent species quantitatis discrete de per se an illud predicamētū pertinentes: sed potiꝰ voluit distinguere duas sciētias que sunt de quātitate discreta: alterā pure mathematicā .s. arithmeticā quā denotat per numerū. & alterā mixtā ex Phisica & Mathematica. s. musicā quā designat per orationem: nō qualemcūqꝫ sed vocalem que est obiectū audibile. vnde & ibi mētionem facit de sillaba breui & lōga. Similiter intelligendā censent litterā Aristotelis sequentē de quātitate cōtinua vbi per lineā superficiem & corpus insinuat geometriā que est pure mathematica: per locū autē & tēpus designat perspectiuā & astrologiam que sunt mathematice mixte de quātitate cōtinua. Secūdo est aduertendum ꝙ sicut Musica supponit ex arithmetica regulas numerorū et proportionum: que sunt principia aut conclusiones arithmetice: sic etiam supponit ex Phisica seu naturali scientia sonum et vocem esse propria obiecta auditus. Nec pertinet ad musicū disputare que res sit sonus aut vox audibilis vtrum .s. res permanens aut successiua: vel vtrū sit substantia aeris vel aliqua qualitas aerem informans & causata in eo ex collisione duorū corporum &c. Quia hoc phisici est inquirere vel potius methaphisici. Scimus enim super hac questione magnas esse & graues philosophorum altercationes. nā qui periores & subtiliores reputantur apud eos negant omnes res successiuas in mundo. vnde et consequenter negare habent sonum aut vocem esse qualitatem talem qualē antiquiores ponebant .s. successiuam et nullo modo in aere permanentem sed raptim transeuntem. Isti vero potius sonum & vocem dicunt esse ipsum aerem ab aliis corporibus percussum aut inter ea constrictum et diuisum: sed de his alias operosius. Nunc autem satis sit nobis ꝙ musica nostra ad omnes illas philosophorum diuersitates cōmunis & indifferēs est: dū modo generaliter et cōfuse detur sibi a philosopho sonum esse obiectum audibile: quicquid illud sit: et siue per se siue per accidens ab

auditu percipiatur. et in hac scientia sicut in perspectiua & astrologia omnia vocabula propria sunt mixte cognotantia adduntq significationem Phisicalem super terminos arithmeticos. vt. diapason super duplam proportionē. Diatesaron super sesquitertiam. Diapente super sesquialteram. & sic de aliis. cognotant enim tales proportiones esse res audibiles. Tertio est aduertendum q musici vel cantores practici vix aut raro vtuntur supradictis terminis musice speculatiue scientie: sed ad faciliorem intelligentiam finxerunt sibi quedam vocabula sui cantus puncta denotantia que sunt: vt re. mi. fa. sol. la. Et per talia puncta ascendendo vel descendendo faciunt in vocibus cōsonantias aliis tamen vocabulis ab eis nominatas. Nam quod theoricus musicus vocat diapason: practicus dicit octauam. et quod ille diapente: iste quintam nominat. Similiter diatesaron vocat quartam. Diapason cum diapente duodecimam. bis diapason appellat quintamdecimam vocem sub vel super aliam. & sic de aliis multis hinc et inde differentiis: que solū verbales sunt. Nā in re vtriq idē dicūt. quod sic declaramus. ponatur q vox prima in aliquo cātu sit eleuata aut depressa vt quattuor. tūc alia vox que super illam ascēdit per septē vel octo ex illis punctis que ponit practicus musicus: facit ad eam consonantiam diapason. que solum per quinq: diapente. & que per quattuor: diateseron. Nam octo dupla proportio est ad quattuor. quinq vero super quattuor si non omnes sint toni integri: est proportio sesquialtera. Quattuor deniq puncta si etiam non omnia sint toni: est proportio sesquitertia. similiter vna duodecima est tripla. et vna quindecima est quadrupla proportio: que bis diapason appellatur similis processus obseruatur in descendendo sub voce illa prima supradicta que semper est reputāda vt quattuor. Sed ad euitandum oēs scrupulos est sciendū: q in punctis illis musice practice est diuersitas. nam quidam eorum ascendunt vel descendunt per tonos integros qui reputantur velut vnitates. Alii vero sunt semitoni: & nō oēs equales. Itē inter tonos alii sicut maiores alii minores: quo fit ut in hoc sepius practici decipiātur. Sed de his iā satis: nā in discursu huius sciētie demōstratione euadent omnia q manifestissima. Has demonstrationes nuper ex Arithmetica Iordani deductas: eleganter adiecit magister Iacobus Faber natione gallus hac nostra tempestate philosophus insignis et celebratissimus. Qui vt in ceteris scientiis solet: ita & in Musica introductionem edidit hanc quam aggredimur: perq luculentissimam.

Iacobi Fabri Stapulensis Elementa Musicalia ad clarissimũ virum Nicolaum de haqueuille inquisitorum Presidentem.

Decreueram clarissime vir nulli meas elementorum musicaliũ qualescunq͂ sunt prius dicare vigilias: q͂ probatas cognouissem. q͂uis id me minime lateret demonstrationes: in quibus vel solis vis scientie consistit: non probari non potuisse. Verum si presentium iudicia parui ducis reputasq͂: hi tibi ex antiquis summopere musicos commendare labores iure valebunt.

Mercurius	Tamyras	Ptolomeus
Orpheus	Hysmenias Thebanus	Eubolides
Pythagoras Samius	Terpander lesbius	Hippasus
Amphion Thebanus	Lycaon Samius	Aristoxenus
Linus	Prophrastus Periotes	Philolaus Pythagoricus
Arion lesbius	Estiacus Colophonius	Archytas Tarentinus
Mydas Phrygius	Tymotheus Milesius	Albinus
Corebus lydius	Nicomachus	Diuus Seuerinus Boecius
Hysgnis Phryx	Plato	
Marsias	Aristoteles.	

Et similium q͂plurimi quos oẽs eterna memoria disciplinarũ eblãditissima Musica reddidit insignes: iter quos duos preceptores meos Iacobũ Labiniũ & Iacobũ turbelinũ annumero tanq͂ ea arte posteritati victuros. Cõmẽdant & eã mirifici ei⁹ effect⁹. Pythagorici eñ animorũ ferociã tibiis fidibusq͂ emolliebant. Esclepiades frementis vulgi seditiones crebro cãtu cõpescuit. Ideq͂ turba surdis medebatur. Damon pythagoricus ebrios & proinde petulãtes adolescẽtes: grauiorib⁹ modulis ad tẽperantiam reduxit. Febrẽ & vulnera musica modulatione curauit antiquitas. Eadẽ quoq͂ suauitate schias coxẽdicũq͂ dolores emẽdauit: qđ Hismenias theban⁹ tẽtasse memoratur. Theophrastus ad animi perturbationes moderãdas musicos adhibuisse memoratur modulos. Nec iniuria quidẽ. est enim musica vt quedã moderationis lex atq͂ regula. Quãobrẽ bono iure eos ridebat Diogenes musicos: qui cũ citharã ad harmonicos cõsensus haberẽt temperatã: animũ gererẽt incõpositũ & prorsus harmonia vite destitutũ. Xenocrates organicis modulis lymphaticos liberauit. Tales Cretẽsis suauitate cithare: morbos pestilentiãq͂ fugauit. Terpãder & arion Aones & lesbios cãtu a grauissimis morbis leuasse: diuus Seuerinus autor est. Herophilus medicus egrorũ venas musicis pensiculabat numeris. Tymotheus aũt musicus dum voluit efferatum reddidit Alexandrũ ad armaq͂ furentem atq͂ aliter cum libuit ab armis ad cõuiuia retraxit emollitũ. Thracius Orpheus ferarũ sensus fidibus: cãtuq͂ inflexit. hoc est ferinos hominũ mores leges ad citharã canẽdo ad moderatã humanitatẽ reduxit. Cerui fistulis capiũtur studioq͂ modulationũ detinẽtur. Cygni hyperborei cithare cãtibus alliciũtur. Elephãtes indi organica dulcedine permulcẽtur. Auicule fistulis irretiũtur. Teneros adhuc infantiũ sensus permouent cãtus: crepitaculaq͂ vagientũ sedãt. Delphinos suis sibi fidibus cõciliauit arion. Serpẽtes cãtibus rũpuntur. Sepultorũ manes cãtibus excitãtur. In actiaco littore mare citharã personare memorãtur. Megaris citharã persomat saxũ: & ad cuiuslibet pulsantis ictũ fidicinat. Et possem pleraq͂ talia vir clarissime ad musicã cõmendationem adducere. At tot tãtisq͂ & recentiũ & priscorũ cõmendatam autoritatibus tibi nũc ad me atq͂ bonarũ litterarũ studiis dicatã disciplinam: equo suscipias animo tuis auspiciis lucem habiturã. Et me vnum inter tuos cliẽtulos tuarum virtutum tuiq͂ nominis obseruatorem esse cognoscito. Vale.

Iacobus Stapulensis Iacobo Labinio & Iacobo Turbelino Musicis: suis charissimis preceptoribus.

QVod inter oratorem atq; rhetora: id inter cantorem & musicum interesse volunt: neq; oratorem quemq̃ dici mereri qui idem rhetor non sit. ita vestrum semper iudiciũ fuit: vt ne cantor quidẽ dici mereatur vnq̃: qui idẽ musicus non fuerit: pulchre mimos: et hystriones a cantorum honesto cetu sequestrantes tanq̃ Epicureos a sobria mensa: castoq; philosophorum dogmate. nec iniuria nam Homerus diuinus Poeta vbiq; doctum et seria modulatum introducit cantorem vt apud Odysseam vbi Penelopẽ Phemiũ Fidicinẽ ad neruos verba mouentem his verbis allocutam effingit.

Preterea illachrimans diuum est affata canentem
Phemi multa tenes hominum mulcentia pectus
Facta hominum atq; deum: et que laudem autoribus addunt.
Ex iis pange aliquid.

Et quales Homerus probat: vos minime tales esse dubito vt qui dudum a vobis prima musices rudimenta perceperim. Quapropter ad vos nostros labores examinandos committo. quos eo libentius me suscepisse fateor: quo musicalem scientiam neq; apud Grecos neq; latinos quidem vnq̃ elementis traditam esse legerim: at introductiones q̃plurimas inter quas ea omnium nobilissima est quã diuus Seuerinus Boecius sui monumentum reliquit. quem vnum in hac re pre ferti delegim meorũ studiorum ducem. Si ergo probaueritis satis mihi est. In re enim nostra malumus aliorum iudicia sequi: q̃ propria probare. Valete.

Antiqui qui de musica scripserunt.		Insignes ex recentioribus qui de eadem scripsere.
Democritus	Plato	Albinus
Heraclides Ponticus	Aristoteles	Diuus Seuerinus
Thimotheus milesius	Theophrastus	Basilius
Philolaus Pythagoricus	Nichomacus	Hylarius
Architas tarentinus	Aristoxenus	Augustinus
Duo Theodori	Ptolomeus	Ambrosius
Xanthus atheniensis.		Gelasius.

Argumentum quattuor librorum musices.

Primus liber interualla musicis modulationibus acõmoda discutit. multiplex: duplare / triplare / quadruplare. superparticulare: sesqualterũ / sesquitertiũ / sesquioctauum / bis sesquioctauum / ter sesquioctauum: quater sesquioctauum / quinquies & sexies / sesquioctauum.

Secundus de tono / integro toni dimidio / semitonio minore / semitonio maiore / cõmate / schismate / atq; diaschismate.

Tertius de sesquitono / ditono diatessarũ / diapente / diapente & tono / diapason / diapason & trisemitonio / diapason & ditono / diapason & diatessaron / diapason & diapẽte / diapason diapẽte & tono / disdiapason / ac integro toni & cõsonantiarũ oĩm dimidio. Et de maximarũ Harmoniarũ cõsonantiis: & quarũdam medietatum.

Quartus de monochordo / tetrachordo / pentachordo / heptachordo / octochordo / pentadecachordo / diatonicis / chromaticis / enarmonicis melodiis. Et de melodiarũ modis. Et hec sub breuitate contracta: argumentum libri sunto.

Iacobi Fabri Stapulensis Elementorum Musicalium ad clarissimum virum Nicolaum de haqueuille presidentem Parisiensem Liber primus.

Diffinitiones

INteruallum est soni grauis acutiq; spaciorum habitudo.

Spacium vocamus neruũ: chordam: expiratum aerem: et quidquid simile est: a quo sonum elicimus.

Multiplex interuallum est quoties maius spacium cõtinet minus plures. vt bis: et duplex interuallum dicitur. vt tertio: et dicitur triplex. vt quarto et quadruplex nuncupatur. & hoc pacto deinceps.

Interuallum superparticulare est cum maius continet minus: & partẽ eius aliquam.

Pars est que metitur totum: ipsum aliquoties sumpta restituens.

Si maius continet minus et eiusdẽ dimidium: sesqualterũ nominatur interuallum.

Si maius continet minus et minoris partem tertiam: dicitur sesquitertium.

Si vero continet minus et eiusdem minoris partem octauam: epogdoum: sesquioctauumq; nominatur. Et ita reliqua superparticularia interualla perfacile est diffinire: sed parum musico conducunt proposito.

Superpartiẽs autem diceretur interuallum: si maius contineret minus et minoris partes aliquot: que partem vnam non efficiunt.

Numeri sunt adinuicem primi: quos sola metitur vnitas.

Dignitates.

1 QVicquid metitur alterum: metitur et omne mensuratum ab illo.

2 Compositum in ea resoluitur simplicia: ex quibus componitur.

3 Cuiuslibet numeri pars est vnitas: ab eo denominata.

4 Vnitas in quemcunq; numerum ducta: ipsum producit.

5 Quicquid metitur detractum et residuum: metitur & totum.

6 Quecunq; vni et eidem equa sunt: & ea inter se sunt equa.

7 Et que inter se sunt equa: eiusdem sunt eque multiplicia aut submultiplicia.

8 Eorum quorum tota sunt equa: et dimidia sunt equa.

9 Quicquid bis auctum aliquid transcendit: id vltra illius dimidium esse necesse est.

10 Et quod duplicatum non implet integrum: id profecto non continet dimidium.

11 Omne totum est maius sua parte.

Petitiones.

1 Data equali chorda: que spacii ad spacium proportio est: eam esse & soni ad sonum.

2 Inter numeros sola vnitate distantes: nullum intercipi posse medium.

3 Spacium quodlibet in quotlibet equas partes diuidere.

4 Totum ad suam partem: et laxius ad se tensum: grauiorem sonum edere.

5 Omnem proportionem esse tanq̃ numeri ad numerum.

6 Si numerus numerũ datũ multiplicet: idẽq; productũ diuidat: numerũ datũ redire.

7 Si numerũ datũ numer⁹ diuidat: & qd̃ ꝓuenit rursus multiplicet: numerũ datũ redire

8 Extremorũ proportionẽ ex mediorũ proportionib⁹ vt suis partibus esse cõpositã.

Extremi ordinatarũ proportionũ: maximus minimusq; terminus intelliguntur.

¶ Sciẽtia subalternata qualis ad Arithmeticam Musica est: principiis et demonstratis scientie prioris subalternantisq; vtitur. At studuimus vt q̃ fieri potest rarissime id in hac disciplina fiat. verum plerisq; vbi oportunum videbitur alio q̃ in arithmeticis factum est vtemur demonstrandi modo: quo singula magis ex propriis facta videantur q̃ vis arithmetico suffragio atq; iis que in arithmeticis monstrata sunt eadem propriis faciliusq; fierent: attamen quando id fiet & quando non sequentibus demonstrationibus cuilibet per q̃ perspicuum euadere poterit.

Si interuallum multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplicatio- ne interuallum multiplex est. 1

d	e	c	
16	8	4	Multiplex ex duplatione.
4	2		Multiplex interuallum.
A	B		

¶ Interuallum binario multiplicare: est interualli habitudinem duplare que quo pacto duplanda sit du- dum tertia propositione quinti Arithmetices notum esse potest. vt si a b sit interuallum quodcunque quod bi- nario multiplicare iubeamur: ipsum per tertiam quinti multiplicabimus si ducimus a in se et b in se proue- nianteque d e eritque productorum d et e duplex interuallum interuallo producentium a b. Quod si rursum du- cimus a in b proueniatque productum c erit per sextam quarti que proportio d ad c eadem c ad e et interual- lum d e in duo equa partitum. Sed esto nunc vt interuallum a b sit multiplex quemadmodum proponit propositio quod modo pauloante dicto: binario multiplicetur: sitque duplum d e et ea proportio d ad c et c ad e: dico interuallum d ad e esse multiplex. Nam cum a ad c multiplex sit interuallum cum geminatur mani- festum est multiplex addi multiplici quare per vicesimamsecundam noni Arithmetices statim notum est interuallum compositum multiplex esse. et propositum. Sed idem aliter hic demonstratur: Quoniam enim que proportio a ad b ea est d ad c et c ad e. nam vtraque proportionis duplate a ad b medietas. Proportio autem a ad b posita est multiplex: igitur et proportio d ad c multiplex est. metitur igitur per diffinitionem multiplicis: c ipsum d vel bis vel ter vel deinceps. Et eodem quoque iure e toties metitur ipsum c. quare et e per primum communem conceptum metitur ipsum d. Quidquid enim alterum metitur: metitur et om- ne quod mensuratum est ab illo. Est itaque per diffinitionem interuallum d e multiplex. quod erat osten- dendum.

Si fuerint termini proportionaliter constituti: cum primus fuerit vltimo compa- ratus si primus vltimum fuerit mensus: metietur et secundum. 2

2	4	8		1	2	4	A b c tres termini proportio
a	b	c		d	e	f	nales quorum a numerat b.

¶ Tametetsi hanc decimatertia quarti demonstret sufficienter: eam tamen amplius hoc in loco volumus manifestare. Sint enim a b c termini proportionabiliter constituti et a numeret c: dico idem a numera- re b. capio enim d e f terminos in ea proportione minimos. Quoniam enim d ad e vt a ad b: et e ad f vt b ad c. igitur per equam proportionalitatem quam vicesimaprima secundi Arithmetices monstrat d ad f vt a ad c. sed a per hypothesim metitur c: igitur et d metietur f. At quia d e f positi sunt in sua proportione minimi. ergo per quintam quarti d et f sunt adinuicem primi. Et cum d seipsum metiatur pariter et f per diffinitionem d est vnitas. At vero cum vnitas sit omnis numeri pars: d ergo metietur e. Et cum a ad b vt d ad e: metietur igitur a ipsum b secundum terminum: quod erat cognoscendum atque propositum.

Si interuallum binario multiplicatum: multiplex effecerit interuallum: ipsum quoque multiplex erit. 3

2	4	8	A b interuallum binario multiplicatum
a	b	c	multiplex efficiens.

¶ Hec est conuersa prime: cuius hec est ratio. Nam cum interuallum compositum multiplex sit et per secun- dam communem scientiam resoluatur in id interuallum ex cuius multiplicatione creuit siquidem composi- tum omne: in ea simplicia dissoluitur ex quibus coalitum|concretum|compositumque esse cognoscitur per se- xagesimam noni interuallum simplex multiplex erit. At id idem aliter ostenditur. Nam si a b c geminatum inter- uallum sit multiplex sic vt c multiplex sit ad a et ea proportio a ad b et b ad c. quoniam c ad a erit multiplex: a per diffinitionem metietur ipsum c. quare et per precedentem a metietur ipsum b. Est igitur interuallum sim- plex b ad a per diffinitionem multiplex. et propositum.

4 Si terminorum interualli primus ad secundum comparatus sese vt tertius ad quartum habuerit: quot proportionaliter medii primo et secundo: totidem tertio & quarto interuenire necesse est.

E medium proportionale inter d et f tertium & quartum vt b inter primum et secundum.

27	18	12		18	12	8		9	6	4		2
a	b	c		d	e	f		g	h	k		l

¶ Hanc duodecima quarti monstrat cuius adhuc hic vt ad sequentia momentum habens: cognitio promptior habeatur: repetitur demonstratio.
¶ Sit a cuiuscunq; interualli primus terminus ad c secundum vt d tertius ad f quartum: et sit b medius proportionaliter cõstitutus inter a & c. dico etiã inter d et f interuenire vnum proportionaliter medium. Capio enim per sextam quarti g h k tres minimos secundum proportionem a ad b et argumentor ex vicesimaprima secundi per equam proportionalitatem g ad h vt a ad b et h ad k vt b ad c. igitur g ad k vt a ad c. quare et vt d ad f. at si d et f sunt iidem termini cum g k manifestum iam est inter d et f interuenire vnũ proportionaliter medium. Sin minus: ergo per vicesimam tertii Arithmetices g et k metientur d et f equaliter: sitq; id secundum l. duco ergo l in g h et k & proueniant d e f per septimam secundi d ad e vt g ad h et e ad f vt h ad k. quare e interuit proportionaliter medius terminis d & f quod erat monstrãdum.

5 Superparticularis interualli medius numerus: neq; vnus neq; plures proportionaliter interuenient.

Qd proportio superparticularis: in duo equa diuidi non possit.

27		18						Hic spacium superparticulare.
A	b	c		d	e	g	f	De f tres minimi pportionis a ad b.

¶ Hanc intelligimus: nullum superparticulare interuallum in duas aut plures interuallorum habitudines pportionesq; secabile esse. quod demonstratione proxime subiuncta perq; facile liquebit.
¶ Sit a c interuallum superparticulare quod diuidatur in duo equalium habitudinum spacia a b & b c certis constitutisq; numeris si possibile est. Sitq; idcirco vt a ad b ita b ad c. capio per sextam quarti Arithmetices d e f tres minimos continue proportionales in proportione a ad b. et quia d ad e vt a ad b et e ad f vt b ad c: ergo per equam proportionalitatem d ad f vt a ad c. Atqui a ad c positum est superparticulare interuallum: igitur & d ad f est superparticulare. At vero quoniam d e f sunt tres illi⁹ habitudinis minimi termini: igitur d et f primus & vltimus per primam quarti sunt adinuicem primi. Et cum d monstratus sit superparticularis ad f: per diffinitionem d continet f et eius partem que ideo per diffinitionem metitur f. Et si ea pars sit numerus cum ea etiam per communem conceptum metiatur d: metietur enim se partem detractam & residuum quod equum est f. non erunt ergo d et f adinuicem primi cuius oppositum iam monstratum est & impossibile. erit ergo ea pars vnitas. Tunc addo vnitatem ipsi f & fiat g: vt g & f solius vnitatis discrimine distent. mox argumentor d ad f vt g ad f. sed inter d et f positus est vnus interuenire medius igitur per precedentem & inter g et f numeros sola vnitate distantes interuenit intercipiturq; aliquis numerus medius quod per secundam petitionem est impossibile. non igitur superparticularis interualli vnus medius interuenit numerus. neq; quoq; eodem argumento interuenient plures. Et hanc etiam demonstrat sexagesimaprima noni. Et ex hac quoq; cognoscitur reprehensionem demonstrationis Architae: q nulla superparticularis in duo equa diuidi possit quam tertio institutionis musice capite vndecimo videtur diuus Seuerinus adducere non tam esse diui Seuerini q Nichomachi aut aliorum quos interpretatur elegantissime qui & simile in plerisq; tum Arithmetice tum Musice institutionis locis fecisse comperitur. Et non verentur quidam (pace omnium dixerim) eius libros perlustrare non vt sciant sed vt exsurculent et canino more si quid hiane | subsultansq; appareat altius dentem infigant | mordeant & reprehendant et sanctum et venerabile Philosophie nomen et suorum conuitiis lacerẽt: & quod aliorum vitium est si quod est: diui Seuerini exclament errorem faciantq; aliorum crimine reum. et cum nihil norint volunt litterarios duces insectando | carpendo | laniendo omnia scire videri: atq; supra Philosophicos vertices sese gloriabundos extollere faciuntq; quod est apud Comicum ne intelligendo vt nihil intelligant quos idem statim vt maledicere desinant ammonet malefacta ne cognoscant sua. Sed hec preter presentis negocii officium. de Philosophis enim qui recte fuerint natura instituti vel absq; monitione semper recte cogitabunt. qui enim secus faciunt ab eorum se segregant consortio et vt Philosophi quales se videri volunt non amplius esse cognoscantur necesse est.

Si interuallum non multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplicatione neqȝ multiplex eſt: neqȝ ſuperparticulare. 6

9	6	4	A c interuallum neqȝ multiplex neqȝ ſuperparticulare.
A	b	c	A c duplatum interuallum a b quod quidem eſt non multiplex.

¶ Si interuallum non multiplex a b: et duplum ſit a c. ita vt ea ſit proportio a ad b ⁊ b ad c. dico interuallum a c neqȝ multiplex eſſe neqȝ ſuperparticulare. quoniam ſi a c primo ponatur multiplex: ergo per tertiam preſentis et a b interuallum erit multiplex at poſitum eſt non multiplex. Et ſi ſecundo dixeris a c eſſe interuallum ſuperparticulare: cum ſit a ad b vt b ad c erit interualli ſuperparticularis medius proportionalis terminus quod per precedentem eſt impoſſibile. Eſt itaqȝ notum ſi interuallum non multiplex binario multiplicetur compoſitum interuallum minime aut multiplex aut ſuperparticulare eſſe. et propoſitum.

Si interuallum binario multiplicetur: atqȝ id quod ex ea multiplicatione creabitur multiplex non ſit: ipſum quoqȝ non erit multiplex. 7

¶ Hec eſt conuerſa precedentis. Sit ergo ſuperioris propoſitionis figura in qua interuallum a c proueniat ex duplatione habitudinis interualli a b et non ſit a c interuallum multiplex. dico itidem interuallum a b non eſſe multiplex. Nam ſi a b interuallum multiplex eſt: cum a c per hypotheſim ex interuallo a b binario multiplicato ſurgat: ergo per primam preſentis interuallum a c multiplex erit. At poſitum eſt non multiplex: ergo ſi interuallum non multiplex ex alicuius interualli binario multiplicatione naſcatur neqȝ ipſum quoqȝ ex cuius multiplicatione ortum eſt multiplex erit: quod erat monſtrandum.

A numero partium ſuperparticularis interualli que in vnum adacte totum reſtituunt et numero vno maiore: quot interualli maiores termini ſimul: minoribus ſimul acceptis reſpondeant: cognoſcuntur. 8

A 3	4	5	6	7	8	9
B 2	3	4	5	6	7	8
C 2	3	4	5	6	7	8
D 3	4	5	6	7	8	9

¶ Sit a ad b interuallum ſuperparticulare manifeſtum eſt per diffinitionem ſuperparticularis a continere b et vnam partium b. ea igitur pars ſecundum numerum c: conſtituat ſuum totum b: et ſit d numerus vno maior c. dico a ſumpta ſecundum numerum c equa eſſe b ſumptis ſecundum d. Nam a ſecundum c ſumpta continent b ſecundum c ſumpta et inſuper partes b ſumptas ſecundum c. Atqui poſitum eſt eas ſecundum c conſtituere vnum b. igitur a ſecundum c ſumpta continent b ſumpta ſecundum numerum vno maiorem c. At vero d poſitus eſt numerus vno maior c. ergo a ſumpta ſecundum c: continent b ſumpta ſecundum d. quod erat monſtrandum. Et ſi exemplarem requiris declarationem: ſi a ad b interuallum eſt ſeſqualterum: quoniam a ſeſqualterum eſt ad b. ergo a continet b ⁊ eius dimidium: et duo dimidia per commune proloquium ſuum totum reddunt. Dico ergo duo a tantum eſſe quantum tria b: quoniam enim duo a continent duo b. et inſuper duo dimidia b que vnum b reſtituunt: ergo duo a continent tria b: tribuſqȝ euadunt equalia. Et ſi a ad b eſt ſeſquitertium a continet totum b et tertiam partem b. at tres tertie b eque ſunt vni b. ergo ſuperiore argumento tria a continent quattuor b: quattuorqȝ euadunt equalia. immo data quacunqȝ ſuperparticulari maiores termini ſecundum proportionis minorem numerum: equantur minoribus terminis ſecundum proportionis maiorem numerum ſumptis. vt ſi a ad b ſit ſeſquiquinta: quoniam minimi ſeſquiquinte ſunt 6 et 5. Idcirco quinqȝ a equi ſunt ſex b. et in non minimis quoniam 12 et 10 ſunt termini ſeſquiquinte 10 a equantur 12 b. Et ſi a ad b ſit ſeſquioctaua: quoniam minimi ſeſquioctaue ſunt 9 ⁊ 8. idcirco 8 a tantum ſunt quantum nouem b. Et quia rurſum 18 ad 16 ſeſquioctaua: ideo ſexdecim a equi ſunt 18 b. et ita in ceteris. Sed ſi id non modo particulariter ſed ⁊ vniuerſaliter contemplari cupis id vniuerſaliter verum erit.

Data quacunqȝ proportione: maiores termini ſecundum numerum minorū ſumpti: equi ſunt minoribus ſecundum numerum maiorum ſumptis. 9

A Superparti	3	4	5	6	7	8	9	Multi-	2	3	4	5	6	Supper	5	7	9	11
B culares	2	3	4	5	6	7	8	plices.	1	1	1	1	1	tientes.	3	4	5	6

¶ Et ſit a ad b quecunq; proportio et a maior terminus: b vero minor. dico a ſumptos ſecundum b numerum minorem equos eſſe b ſumptis ſecundum a numerum maiorem. Nam per octauam primi Arithmetices quod fit ex a in b: equum eſt ei quod fit ex b in a. At vero quod fit ex a in b: ſunt a ſumpti ſecundum b. et quod fit ex b in a ſunt b ſumpti ſecundum a. igitur a ſumpti ſecundum b equantur b ſumptis ſecundum a et in quibuſlibet alijs eadem eſt demonſtratio ⁊ propoſitum.

10 Cum aliquot maiores termini aliquot minoribus equi ſunt: ea vnius maiorum ad vnum minorum reperitur proportio: que et numeri minorum collectorum ad maiorum collectorum numerum.

¶ Hec eſt conuerſa precedentis. Quoniam per precedentem minores collecti ſecundum numerum maiorum equi ſunt maioribus ſecundum numerum minorum collectis. Sed numerus maiorum eſt vnus terminus maior et numerus minorum vnus terminus minor. ergo eadem eſt proportio vnius maiorum ad vnum minorum: que numeri minorum collectorum ad numerum maiorum collectorum. Et quamq; he due vltime concluſiones faciles ſunt: vſus tamen earum paulo latentior eſt. Per primam enim earum que nona eſt: habemus ſi numerus maior ad minorem ſeſqualter eſt vt trium ad duo: duo maiores equi ſunt tribus minoribus. Et ſi maior ad minorem ſeſquitertius vt 4 ad 3: tres maiores equi ſunt quattuor minoribus. Et ſi maior ſeſquiquartus vt 5 ad 4 quattuor maiores equi ſunt quinq; minoribus. Si vero maior ſeſquioctauus: octo maiores equi ſunt nouem minoribus. ⁊ ita in conſimilibus. In multiplicibus autem ſi maior duplus eſt vt duorum ad vnum: vnus maior equus eſt duobus minoribus. Si triplus: vnus maior equus eſt tribus. Si quadruplus: vnus equus eſt quattuor. Si octuplus: vnus equatur ad octo. Inſuper partientibus vero conſimile eſt: vt ſi maior eſt ſuperbi tertius vt 5 ad 3: tres maiores equi ſunt quinq; minoribus. Si ſuper triquartus vt 7 ad 4: quattuor maiores equi ſunt ſeptem minoribus. Si vero ſuper octupartiens vt 17 ad 9: nouem maiores equi ſunt decem ⁊ ſeptem minoribus. ⁊ hoc pacto in reliquis.

¶ Ex vltima autem hanc in ſuperparticularbus vtendi regulam elicimus. Si duo maiores equi ſunt tribus vt minoribus quattuor ad ſex | ſex ad nouem | octo ad duodecim: vnus maior ad vnum minorem ſeſqualter eſt. Et ſi tres equi ſunt ad quattuor: ſex ad octo maior ad minorem eſt ſeſquitertius. Si quattuor maiores equi ſunt quinq; minoribus: aut octo ad decem: vnus maior vnius minoris eſt ſeſquiquartus. Si vero octo maiores nouem minoribus ſunt equi: vnus maiorum ad vnum minorum cognoſcitur ſeſquioctauus. In multiplicibus. ſi vnus duobus: duo ad quattuor | tres ad ſex equi ſunt: maior minoris eſt duplus. Si vnus tribus | duo ad ſex: vnus maior minoris eſt triplus. Si vnus ad quattuor: et duo ad octo: vnus maiorum ad vnum minorum eſt quadruplus. Si vero vnus ad octo duo ad ſedecim: maior minoris eſt octuplus. ¶ In ſuperpatientibus. ſi tres maiores equi ſunt quinq; minoribus: aut ſex ad decem: vnus maior ad minorem eſt ſuperbitertius. Si quattuor maiores ſeptem minoribus: maior minoris eſt ſupertriquartus. Si vero nouem equi ſunt ad decem ⁊ ſeptem: maior minoris eſt ſuperoctupartiens. ¶ Et in compoſitis numeris ſimile eſt. vt ſi duo a equi ſunt quattuor b ⁊ dimidium vnius: quemadmodum in duobus coniunctis ſeſqualteris. quoniam 4 et vnius dimidium ad 2 duplum ſunt et ſeſquiquartum: idcirco vnus a ad vnum b duplus eſt atq; ſeſquiquartus. Si tres a equi ſunt ad quattuor b et tertiam vnius: vt in duobus ſeſquitertijs quoniam quinq; ⁊ tertia vnius continent tres ſemel duas tertias ⁊ vnam nonam. proinde vnus a continebit b vnum duas eius tertias et vnam eius nonam. Si quattuor equi ſunt ad ſex ⁊ quartam vnius: vt in duobus iunctis ſeſquiquartis: quoniam ſex ⁊ quarta vnius continent | quattuor dimidium | et decimam ſextam ex quattuor: ideo vnus maior continet minorem ſemel | eius dimidium | ⁊ eius vnam decimamſextam. Si vero octo valent decem ⁊ octauam vnius vt in duobus ſeſquioctauis: quoniam decem continent octo: et quartam: ⁊ octaua vnius ad octonos vna eſt ſexageſimaquarta: ideo vnus maiorum continet minorem ſemel | eius quartam partem | et eius ſexageſimamquartam. Et ſi compoſitionis ſeries protenſior euadit: vt ſi duo a equi ſunt ſex b | medietati vnius et quarte vt in coniunctione trium ſeſqualterorum: quoniam ſex continent duos ter ⁊ dimidium vnius eſt quarta pars duorum; et quarta pars vnius eſt octaua pars duorum. Idcirco vnus a triplex eſt b vnius inſuper quartam atq; octauam partem b continens. Et ſi tres equi ſunt ad ſeptem ⁊ nonam vnius quod in tribus ſeſquitertijs coniunctis euenit: quoniam ſeptem: bis continent tres: ⁊ trium tertiam partem: et nona vnius ad tres eſt viceſimaſeptima. ideo vnus maiorum continet minorem bis | eius tertiam | et eius viceſimamſeptimam. Et ſi quattuor equi ſunt ſeptem dodranti vnius hoc eſt tribus quartis et inſuper decimeſexte vnius: vt in coniunctione trium ſeſquiquartorum: quoniam ſeptem continent ſemel quattuor et tres quaternarij partes: et tres quarte vnius ad quattuor ſunt tres decime ſexte: ⁊ decimaſexta vnius eſt ad quattuor vna ſexageſimaquarta. idcirco vnus maior continet vnum minorem ſemel | et dodrantem | et tres decimasſextas atq; vnam ſexageſimamquartam. Si vero octo equi ſunt ad vndecim | tres octauas vnius ⁊ vnam ſexageſimamquartam: vt in tribus ſeſquioctauis coniunctis: quoniam vndecim continent ſemel octonarium et octonarij tres partes: ⁊ tres octaue vnius ſunt ad octo tres ſexageſimequarte. ⁊ vna ſexageſimaquarta ad octo eſt vna quingenteſima duodecima. hinc fit vt vnus maiorum contineat minorem ſemel | tres eius octauas | tres ſexageſimas quartas et vnam quingenteſimam duodecimam. Et hec adiecimus quo vſus harum duarum vltimarum in ſequentibus patentior | manifeſtiorq; habeatur.

Duplex interuallum ex duobus maximis superparticularibus: sesqualtero atq; sesquitertio coniungitur. 11

6	4	3	A c duplex interuallum.
a	b	c	A b sesqualiter b c sesquitertius.

¶ Sint a b c interuallum: a quidem sesqualter ad b: b vero sesquitertius ad c: dico a duplum esse ad c. Quoniam enim a sesqualter est ad b: ergo per octauam huius duo a equi sunt ad tres b. et rursus quia b sesquitertius ad c: igitur per eandem tres b equi sunt quattuor c: et tres b positi sunt equi duobus a. duo igitur a equi sunt ad quattuor c. cum quecunq; vni eidemq; equalia sunt inter se sint ⁊ equalia. et quattuor numerus minorum collectorum duplex est duorum numeri scilz collectorum maiorum. igitur per precedentem vnus a duplex erit ad vnum c. quod erat demonstrandum. potest ⁊ hoc vltimum etiam demonstrari. Quoniam enim duo a equi sunt quattuor c: vnus a per octauum prologuium equus est duobus c. quorum enim tota equa sunt et eorum quoq; dimidia sunt equa. At duo c dupli sunt vnius. igitur et vnus a duobus c equus: duplex erit c vnius quod fuisset monstrandum.

Ex duplici interuallo atq; sesqualtero: triplex nascitur interuallum. 12

6	3	2	A c triplex interuallum.
a	b	c	A b duplex interuallũ. b ⁊ c sesqualterum

¶ Sint a b c interuallum: et a quidem ad b duplex ⁊ b ad c sesqualter. dico a eius quod est c triplicem esse. quoniam enim a ad b duplex est: ergo a per diffinitionem continet bis b. igitur a equatur duobus b. et quia b sesqualter est ad c: igitur b continet c et eius partem dimidiam. ergo per octauam huius duo b equi sunt tribus c: et duo b equi erant vni a. igitur ⁊ tres c equi erunt vni a. tres autem triplex sunt vnius. igitur per decimam vnus a triplex est vnius c. quod erat demonstrandum.

Duo duplicia interualla: quadruplex coniungunt interuallum. 13

4	2	1	A c duplex interuallum.
a	b	c	A c geminatum duplex interuallum.

¶ Sit a duplex ad b: et b duplex ad c. dico quoniam a quadruplex est ad c. Nam quia duplex est ad b: igitur duo b equi sunt vni a. ⁊ rursus quia b duplex est ad c: igitur duo c equi sunt vni b. et si duo c equi sunt vni b: quattuor c equi erunt duobus b. At duo b positi sunt equi vni a: igitur ⁊ quattuor c equabuntur vni a. At quattuor quadruplum sunt vnius. igitur per decimam vnus a quadruplex est vnius c. quod erat ostendendum.

Terminũ reperire: ad quẽ quotcunq; volumus: liceat superparticulares assignare. 14

9	8	6	A ad c sesqualter.
a	b	c	B ad c sesquitertius.

¶ Sit propositum terminum reperire ad quem sesqualterum ⁊ sesquitertium valeamus assignare. Capio duo et tria numeros denominantes partes sesqualteri atq; sesquitertii: duo siquidem sesqualterum et tria sesquitertium denominant. ⁊ duco duo in tria: proueniatq; ductu illo c manifestum est c habere partem dimidiam pariter et tertiam. iungo ad c partem eius dimidiam: et compositus sit a. et iterum ad c iungo partem eius tertiam: et sit compositus b. quoniam enim a contine: c et eius partem dimidiã: ergo per diffinitionem a ad c sesqualter est. et quoniam b continet c et eius partem tertiam: b itidem ad c sesquitertius. c igitur repertus est terminus ad quem petiti superparticulares rite sunt assignati. et hac lege de quibuslibet esse operandum: vt si essent assignandi sesquioctauus et sesquinonus: duc octo in nouem et surget terminus octauam | nonamq; partem possidens: ad quem ⁊ sesquioctauum ⁊ sesquinonium rite assignaueris. et eodem quoq; pacto modo tres: modo quattuor aut quotquot libuerit ad eundem terminum assignabis.

640	600	576	540	480
a		c	d	e

vt si ad eundem terminum peterentur assignari sesquitertius | sesquiquartus | sesquiquintus | ⁊ sesquioctauus ducantur tria | quattuor quinq; et octo in seinuicem et proueniat e qui idcirco habet in se tertiam | quartam quintam et octauam. Adiungo e suam tertiam compositusq; sit a. et suam quartam et compositus sit b. suam quintam compositus sit c. suam deniq; octauam ⁊ compositus sit d. dico demonstratione superiore: quoniã ad e constituti sunt a b c d sesquitertius | sesquiquartus | sesquiquintus | et sesquioctauus: quemadmodum prefixa monstrat formula.

15 Si sesqualtero interuallo sesquitertium demptum fuerit interuallum: erit quod relinquitur sesquioctauum.

9	8	6	A c sesqualter. B c sesquitertius.
a	b	c	A ad b sesquioctauus.

¶ Sit c terminus ad quē per precedentē assignati sint a sesqualter: ⁊ b sesquitertius. ab a c sesqualtero subduco interuallum sesquitertium b c: relicto interuallo a ad b: quod dico esse sesquioctauum. quoniam enim a eius quod est c est sesqualtera semel habet c et eius dimidiam partem. quare per octauam huius duo a equi sunt tribus c. ⁊ quattuor a sex c. et octo a ad duodecim c. Rursus quoniam b huius quod est c sesquitertius est. b igitur habet in se c ⁊ eius tertiam partem. quo fit vt per eādem octauam tres b equi sint quattuor c. ⁊ sex b octo c ⁊ nouē b ad duodecim c. at octo a quidē equi erāt ad duodecim c. igitur octo a equi sunt ad nouē b. per decimā igitur a continet b ⁊ eius octauā partem. estq; a sesquioctauus ad b ⁊ ꝓpositū.

16 Interualli quarta & duodecima vnam eius tertiarum restituunt.

¶ Nam quattuor interualli quarte: totum complent interuallum. ⁊ duodecim eiusdem interualli duodecime: totum itidem complent interuallum. quare quattuor quarte ⁊ duodecim duodecime adinuicem equantur. due igitur quarte sex duodecimis | et vna quarta tribus duodecimis sunt eque. quorum enim tota equa sunt: et eorum dimidia. At quattuor duodecime: duodecim duodecimarum sunt vna tertia: quare ⁊ vna totius tertia cui quidem duodecim ille duodecime cognoscuntur esse idem atq; eque. vna igitur totius quarta que tribus duodecimis equa esse monstrata est et vna duodecima illi adiuncta: totius tertiam partem restituunt. Equantur enim vna tertia ⁊ vna duodecima quattuor duodecimis. quod erat demonstrandum. Et quis hec demonstratio sequentis gratia particulariter facta sit: possis tamen modo consimili monstrare omnem minorem cuiuscunq; totius interualli partem: proxime maiorem partem efficere: illi adiecta vna partium a numero qui ex ductu denominationum vtriusq; partium enascitur: denominata. vt totius tertia pars minor est: ⁊ secunda proxime maior: et si duo in tria duxeris sunt sex: idcirco vna tertia atq; vna sexta vnam restituunt secundam. Similiter quoq; quarta ⁊ quinta partes sunt proxime maior atq; minor: et si ducis quinq; in quattuor surgunt viginti: proinde vna quinta ⁊ vna vicesima: vnam quartam restituunt. et hoc pacto in sequentibus vt subiecta monstrata formula.

Tertia et sexta	vnam secundam efficiunt.
Quinta et vicesima	vnam quartam.
Sexta ⁊ tricesima	vnam quintam.
Septima ⁊ quadragesimasecunda	vnam sextam.
Octaua ⁊ quinquagesimasexta	vnam septimam.
Nona ⁊ septuagesima secunda.	vnam octauam.

17 Due proportiones sesquioctaue: minores sunt sesquitertio interuallo.

81	72	64		A c duo sesquioctaui coniuncti.
a	b	c	d	A d sesquitertium interuallum.

¶ Continua per sextam quarti Arithmetices duas sesquioctauas inter a ⁊ c: ita vt a sesquioctauus sit ad b | et b sesquioctauus ad c. et sit a ad d sesquitertium interuallum. Dico a ad c minus esse interuallum ꝙ a ad d. Quoniam enim a sesquioctauus est ad b: ergo per octauam huius octo a equi sunt ad nouem b. sed ⁊ quia b etiam sesquioctauus est ad c: per eandem octo b tanti sunt atq; nouem c. Et cum vnus b equus sit vni c ⁊ octaue eius. ergo nouem b equi sunt decem c ⁊ octaue vnius c. Atqui nouem b monstrati sunt equi esse octo a: igitur octo a equi sunt decem c ⁊ octaue vnius. At decem ⁊ octaua vnius continet octo semel | eius quartam ⁊ eius vnam sexagesimamquartam. ergo per decimam huius vnus a continet vnum c | vnam eius quartam | et vnam sexagesimamquartam: ⁊ vna quarta ⁊ vna sexagesimaquarta per precedentem minus sunt vna tertia: complent enim quarta ⁊ duodecima vnam tertiam. duo igitur sesquioctaui minus sunt vno sesquitertio interuallo. quod erat demonstrandum.

18 Tres sesquioctaui: amplius sunt sesquitertio: minus autem sesqualtero interuallo.

729	648	576	512	A d tres sesquioctaui coniuncti.
a	b	c	d	

¶ Sint a b c d tres coniuncti sesquioctaui: vt a ad b primus sit sesquioctauus | b ad c secundus | et c ad d tertius: dico primo a ad c amplius esse sesquitertio. Quoniam enim a ad b ⁊ b ad c duo sunt sesquioctaui: ergo per octauam huius octo a equi sunt decem c ⁊ octaue vnius. Sed ⁊ cum c iterum ad d positus sit sesquioctauus: ergo per eandem octo c equi sunt nouem d | et nouem c equi decem d ⁊ octaue vnius et decem c equi vndecim d ⁊ duabus octauis. et cum octo octaue c contineant nouem d: ergo per decimam huius vna octaua c continet octauam d ⁊ eius octauam partem: hoc est vnam sexagesimamquartam. decem ergo c et vna octaua vnius equantur vndecim d | tribus octauis | et vni sexagesimequarte. et per decimam vt vndecim ⁊ tres octaue et vna sexagesimaquarta ad octo: ita a ad d. sed vndecim continent octonos semel tres eorum

partes|tres octauas|et vnam ſexageſimā quartam vnius. ac tres octonorum partes amplius ſunt tertia eorum parte. Superant enim tres octonarū partes: tertiam eiuſdem partem triente vnius: hoc eſt tertia vnius parte. a fortiori igitur tres octonorū partes| et tres octaue vnius ⁊ vna ſexageſimaquarta ita amplius ſunt tertia octonorum parte. continent ergo vndecim| tres octaue vnius| ⁊ vna ſexageſimaquarta: octo ſemel ⁊ amplius eorum parte tertia. quare ⁊ a continet d ⁊ amplius tertia eius parte. Eſt itaqꝫ a ad d amplius ſeſquitertio interuallo. Secūdo dico a ad d minorem eſſe ſeſqualtero interuallo. Nam vndecim continent octo et tres octauas: deeſt ergo vna octaua ad complendas quattuor octauas| que ſunt octonorum dimidium. At vero que ſuperant: tres octaue vnius|et vna ſexageſimaquarta minus efficiunt dimidio vnius octaue. quare et multo minus efficient vna octaua. vndecim ergo| ⁊ tres octaue| ⁊ vna ſexageſimaquarta vnius continēt octo ſemel et minus octonorum dimidio. ergo per decimam huius ⁊ a continet d ſemel ⁊ minus eius dimidio. Eſt itaqꝫ interuallum a ad b minus ſeſqualtero interuallo.

Quattuor ſeſquioctaui coniuncti: ſeſqualterum ſuperant interuallum. 19

6561	5832	5184	4608	4096	A e quattuor ſeſqui-
a	b	c	d	e	octaui coniuncti.

℄ Sint a b c d e quattuor coniuncti ſeſquioctaui: a ad b primus|b ad c ſecundus|c ad d tertius| ⁊ d ad e quartus: dico quoniam interuallum a e amplius eſt ſeſqualtero interuallo. Nam vt in precedenti viſum eſt octo a equi ſunt vndecim d|tribus octauis| ⁊ vni ſexageſimequarte vnius. ⁊ vndecim d|tres octaue vnius ⁊ vna ſexageſimaquarta: equātur duodecim e|ſex octauis|quattuor ſexageſimis quartis| ⁊ vni quingenteſime duodecime. ergo octo a equi ſunt duodecim e| ſex octauis|quattuor ſexageſimis quartis| ⁊ vni quingenteſime duodecime. At vero duodecim|ſex octaue|quattuor ſexageſimequarte|et vna quingenteſima duodecima cōtinent octo ſemel et amplius ꝙ octonorum dimidium: quoniam continent octo ſemel ⁊ dimidium: et inſuper ſex octauas|quattuor ſexageſimas quartas| ⁊ vnam quingenteſimam duodecimam vnius. Igitur per decimam huius a cōtinet e ſemel ⁊ amplius ꝙ eius dimidium. ſuperat itaqꝫ a e interuallum quattuor ſeſquioctauis coniunctū: ſeſquialterum interuallum. quod erat monſtrandum.

Quinqꝫ coniuncti ſeſquioctaui: minus duplici interuallo coniungunt. 20

℄ Nam per vndecimam huius duplex interuallum ex duobus maximis ſuperparticularibus: ſeſquialtero ſcilꝫ et ſeſquitertio coniungitur. At conſtitutis quinqꝫ ſeſquioctauis tres primi ſeſquioctaui: per decimam octauam huius minus ſunt ſeſqualtero interuallo. ⁊ duo ſequentes ſeſquioctaui qui vna cum tribus prioribus quinqꝫ complēt: per decimamſeptimā huius minus ſunt ſeſquitertio. Coniungunt igitur quinqꝫ ſeſquioctaui minus duplici interuallo.

Sex proportiones ſeſquioctaue: maiores ſunt vno duplici interuallo. 21

531441	472392	419904	373248	331776	294912	262144	A g ſex ſeſqui-
a	b	c	d	e	f	g	octaui cōiūcti.

℄ Sit a g interuallum ſex coniunctorum ſeſquioctauorum: ita vt a ad b ſit primus ſeſquioctauus| b ad c ſecūdus|c ad d tertius| d ad e quartus|e ad f quintus. f aūt ad g ſextus. dico quoniā a ad g amplius eſt duplici interuallo. Quoniam enim a ad b ſeſquioctauus eſt: ergo per octauam huius octo a equi ſunt nouem b. et nouem b per eādem equi ſunt decem c|et octaue vnius. et decem c ⁊ octaua vnius: equa ſunt vndecim d|tribus octauis|et vni ſexageſimequarte vnius. ⁊ vndecim d|tres octaue|et vna ſexageſimaquarta vnius: equantur duodecim e|ſex octauis|quattuor ſexageſimiſquartis|et vni quingenteſime duodecime. duodecim autem e| ſex octaue|quattuor ſexageſimequarte|et vna quingenteſima duodecima: equantur tredecim f| decem octauis decem ſexageſimis quartis| quinqꝫ quingenteſimis duodecimis| et vni quarte milleſime nonageſime ſexte. At vero decem octaue vnum continent integrum ⁊ inſuper duas octauas. quo fit iterum vt duodecim e|ſex octaue|quattuor ſexageſimequarte| ⁊ vna quingenteſima duodecima: equētur quattuordecim f| duabus octauis|decem ſexageſimiſquartis|quinqꝫ quingenteſimis duodecimis|et vni quarte milleſime nonageſimeſexte. At vero quattuordecim f|due octaue|decem ſexageſimequarte|quinqꝫ quingenteſime duodecime|et vna quarta milleſima nonageſimaſexta: equa ſunt quindecim g ⁊ octo octauis eius) hoc eſt equa ſunt ſedecim g) duodecim ſexageſimiſquartis| quindecim quingenteſimis duodecimis ſex quartis milleſimis nonageſimisſextis| ⁊ vni triceſimeſecunde milleſime ſeptingēteſime ſexageſime octaue. At ſedecim ⁊ duodecim ſexageſimequarte| ⁊ relique ſequentes particule continent octo bis et amplius. Igitur per decimam huius a ad g maius eſt duplici interuallo. ſex igitur ſeſquioctaui maiores ſunt vno duplici interuallo: vt intendit propoſitio. ℄ Et ſi hec propoſitio quo ad ſuam demonſtrationem nonnullis ſubdifficilior videatur: hoc idcirco proueniet ꝙ illis promptitudo: vtendiqꝫ habilitas octaue|none| ⁊ decime huius deerit. Idcirco par: conſentaneūqꝫ erit eos qui in muſicis modulationibus ⁊ earum contēplationibus ſe exercitare volēt: multos ſeſquialteros|deinde ſeſquitertios|et alios ſequētes ſuperparticulares colligere: quouſqꝫ viſus colligendarum proportionum ipſis iam ſit factus peruius|patenſqꝫ ⁊ quaſi iam ipſis domeſticus.

℄ Primi Elementorum Muſicalium Finis.

Conſonantia eſt ſoni grauis acutiq; mixtura: ſuauiter vniformiterq; auribus incidens: ex multiplici aut ſuperparticulari ratione profecta. Diſſonantia eſt duorum ſonorum non ſe natura ſuauiter miſcentium: ad aurem perueniēs aſpera: iniocūdaq; percuſſio. Tonus eſt conſonātie principiū: ex ſoni ad ſonum ſeſquioctaua proportione proueniēs. Semitonium minus quod & dieſis dicitur: eſt toni pars: qua ſeſquitertia proportio duobus tonis maior eſt.
Semitoniū maius quā & vocāt Apothomen: eſt toni reliqua pars: & qua ipſe ſemitoniū minus ſuperat. Cōma eſt quo ſeſquioctaua proportio: duobus ſemitonis minoribus maior eſt: quod & idē eſt quod Apothome ſemitoniū minus vincit ac ſuperat Schiſma eſt cōmatis dimidium. Diaſchiſma eſt dimidiū ſemitonii minoris.
Hemiſpheriū: muſicū eſt inſtrumētū p quod aut neruo aut chorde vt decet ſuppoſitū: ſemitonia: tonos: cōſonātiaſq;: & cōſonātiarū particulas: ad ſenſum pueſtigam9.
Sonus emmelis is eſt quo apte vtimur in melo. Ecmelis vero is dicitur: quē melos concētuſq; nō admittit. Equales ſoni atq; ſimiles dicūtur: qui ex eadē interualli ꝓportione naſcūtur. Numerorū atq; interuallorū pars ea maior eſt: que a minore numero denomiatur: & minor q̄ denomiatur a maiore. Multiplex ꝓportio maior eſt: quā maior denoīat numer9: & minor q̄ denoīatur a minore. Supparticularis ꝓportio maior eſt: que a maiore denomiatur parte. Minor aūt que denomiatur a minore.

1 Tonum ſuper datam chordam collocare.

a c | | | | | | | | b

Sit a b c chorda quecūq; ſupra quā iubeamur tonū collocare: diuido per tertiam petitionem chordam a b in nouē equas portiones: ita vt c b illarū nouenarū octo teneat & a c vnam. Dico qm̄ a b & c b tonū continent: conſtituūtq; ſupra datā chordam eſſe tonum. Nā totū chorde ſpaciū a b continet ſpaciū c b & inſuper octauā eius partē: q a c vni illarū octauarū equa ſit. igitur per diffinitionē ſpacium a b epogdoum: ſeſquioctauūq; eſt ſpacio c b. quare per primam petitionem ea erit ſoni totius chorde a b ad ſonum c b proportio. Eſt itaq; tonus in chorda a b qui in epogdoa | ſeſquioctauaq; ratione conſiſtit: collocatus.

2 Tonum tono et quotquot libuerit: in data chorda ſubiungere.

a c | d | e | | | | | | | | | b

Sit data chorda a b in qua propoſitum ſit tres conſequentes tonos ſubiungere partior per tertiam petitionem vt in precedenti factum eſt ſpacium totius chorde a b in nouem equas portiones. & in nota octaue portionis pono c: ita vt b c octauas illarum nouem partium teneat. manifeſtum eſt per precedentem a b & c b eſſe tonum et per eādem petitionē partior ſpacium c b in nouē equas portiones. & in termino octaue particule pono d: ita vt d b contineat octo earum partium quarum c b nouem continet. per precedentem c b ad d b ſonat tonum: eſtq; iam vni tono: tonus vnus ſubiunctus. Burſum ſpacium d b conſimili modo in nouē equas portiones diduco: & notam octaue ſectionis littera e deſigno: ita vt e b octo earū partium contineat: quarum d b continet nouem per precedentem d b ad e b reſonat tonum. Sunt igitur in data chorda a b tres continue ſubiſicti toni: ſcilz a b | c b. c b | d b. d b | e b. quod erat propoſitum. & hoc pacto quotquot iubet ſubiungere ꝙ facillimum eſt. Et ſi id ſenſu experiri deprehendereq; cupias poſt pulſum totius chorde a b ſuppone hemiſpherium chorde a b in ſigno c: ita vt ſola perſtrepat reſoneta; particula c b & ſenſus iudicio deprehendes ſoni totius a b ad ſonum c b eſſe toni interuallum. q ſi hemiſpherium transfers ad notam d: ex pulſu c b & d b iterum tonum deprehendas. ſed ex totius a b ſono ad ſonum particule d b duos tonos | duorumq; tonorum interuallum perpendet auditus. & hoc pacto ſenſuum iudiciis quotquot voles tonos deprehendendos committeres: & eorum mixturas tum ſuaues: tum inconcinnas (quas auditus tanꝙ offenſus horret refugitq;) decernendas.

3 Tonorum continuatorum: minimos numeros aſſignare.

59049	52488	46656	41472	36864	32768	Quinq; tonorum adinuicem cōtinuatorum minimi numeri.
n	o	p	q	r	s	
6561	5832	5184	4608	4096		Quattuor tonorum adinuicē cōtinuatorum minimi numeri.
h	i	k	l	m		
729	648	576	612			Trium tonorum adinuicem continuatorum minimi uumeri.
d	e	f	g			
81	72	64				Duorum tonorum adinuicem continuatorum minimi numeri.
a	b	c				

Si duo: tres: quattuor: quinq; aut quotlibet toni ſint continue in neruo cōſtituti: ſic eorum minimos numeros reperiemus. Quū enī nouē & octo minimi ſunt numeri toni duco nouē in ſe & ꝓueniat a: & nouem in

octo ⁊ proueniat b: ⁊ octo in se ⁊ proueniat c. per vicesimãtertiã tertiũ Arithmetices inter a b ⁊ b c sunt duo sesquioctaui in minimis numeris cõllecti: ⁊ ꝑinde duo toni in minimis numeris cõtinuati. Et si nouẽ duco in a b c et octo in c et surgant d e f g. per eandem inter d e f g tres sunt in minimis numeris sesquioctaui cõstituti: quare d e f g sunt trium cõtinuatorum tonorũ minimi numeri. Et si ducis nouem in d e f g et octo in g et surgant h i k l m per idem quod prius h i k l m quattuor continuorũ sesquioctauorũ minimi sunt numeri: quare ⁊ quattuor continuorũ tonorum. Et si rursum hoc pacto ducis nouem in h i k l m ⁊ octo in m et surgant n o p q r s: ipsi erunt quinq̧ continuorum tonorũ minimi numeri. ⁊ hoc modo quotquot tonorum voles minimos numeros reperias. Attamen in modis musicis tot continue subiungere opus non est: sed tonis semitonia subiunguntur: de quibus posterior proprius accõmodusq̧ expectandus est sermo.

Spacio quolibet per quotlibet equa spacia diuiso: totius ad totã proxime sectionis partem minor est proportio: ꝙ eiusdẽ partis ad totã reliquã proxime sectionis partẽ. Quo fit vt quãto ton⁹ tono subiũgitur acutior: tãto ipsum cõtractiora cõtineãt spacia. **4**

|A c|d|e|f|g|h|i|k|b|

¶ Chordam | neruũ | tibiam | efflatũ aera | es tinnulum ⁊ quidquid sonum edit in harmonicis modis (vt iam quoq̧ dictũ est) spacium nũcupamus: in quibus analogie ratio vim | naturãq̧ seruat eãdem. Sit ergo a b totum spacium per a c | c d | d e | e f: ⁊ reliquas nouem equas partes vt fit in interuallo toni habendo diuisum: quotquot enim alias posueris idẽ valuerit. dico minorẽ esse ꝓportionẽ a b ad c b ꝙ c b ad d b. Nam cũ a b positũ sit in nouẽ equas partes per medias notas c d e f ⁊ reliquos diuisum: c b continet solũ earũ partiũ octo: quarũ a b cõtinet nouẽ. ergo a b cõtinet spaciũ c b ⁊ eius octauam partẽ. sed ⁊ cũ c b octo partes partiũ c d equas cõtineat: ergo d b cõtinet partiũ tantarũ solum septẽ. ergo c b cõtinet spacium d b ⁊ insuper eius septimã partẽ. At octaua pars per diffinitionẽ minor est parte septima: igitur iterũ ꝑ diffinitionẽ a b ad c b proportio superparticularis minor est ꝙ c b ad d b vtpote que a minore parte denominetur. est enim hec a septima parte sesquiseptima proportio: illa vero ab octaua sesquioctaua. Et hãc nõ modo in superparticularibus. verũ ⁊ quibuslibet medietatibus demõstrat prima decimi Arithmetices vbi scilꝫ ratio medietasq̧ arithmetica cõperiatur. quod ⁊ in dicta spacii diuisione ⁊ sumpta (vt propositũ est) proportione: inuentum cõspiciebatur. ¶ Correlariũ vero hinc cognoscatur ꝙ totũ per quartã petitionẽ ad suã partẽ grauius sonat: pars autẽ ad suũ totũ acutius. Itaq̧ si tono a b ⁊ c b tonũ subiũxeris: subiũctus erit acutior. Et quoniam spacium c b in nouẽ equas partes partiretur: quarũ quelibet minor erit spacio c d quod eius octaua est: nã quelibet earũ est nona ⁊ a maiore numero denominata. Erit igitur ⁊ quelibet earũ nouẽ partium minor spacio a c. equa sunt enim a c ⁊ c d. ⁊ hoc pacto de quibuslibet subiunctis acutioribus tonis esset dicendum. Manifestum est igitur vt quãto tonus tono subiũgitur acutior: tãto ipsum cõtractiora cõtineãt spacia.

Medio extremitatũ toni spacio ĩ duo equa diuiso: ton⁹ mĩme in duo secatur eq̃lia. **5**

|A c|d|e|f|g|h|i|k|b|
| l | m | n | o | p | q | r | s | t |

¶ Hec ⁊ sequentia intelliguntur vt tonus minime in duo equa ratione geometrica dirimatur non autem arithmetica. nam ⁊ hic tonus toniq̧ interuallum in duo equa ratione arithmetica direptum est. Diuido ergo spacium a b vt prius in nouem equa spacia: per notas a | c | d | e | f | g | h | i | k | b manifestũ est a b ⁊ c b esse toni extremitates | toniq̧ continere. Dico ergo quoniã a c medie harũ extremitatũ interstitio in duo equa per signum l dirempto: tonus minime in duo equa partiatur | quoq̧ sonus a b ⁊ l b equalis non sit l b ⁊ c b. diuido enim singula reliquorũ octo equaliũ spaciorũ cõsimili modo per equalia per notas m | n | o | p | q | r | s | t: manifestum est totũ spaciũ a b diuisum esse in 18 equalia spacia que sunt a | l | c | m | d | n | e | o ⁊ reliqua. ergo per precedentem minor est proportio a b ⁊ l b ꝙ l b ⁊ c b. Est enim hec sesquisexta decima: illa vero sesquiseptima decima. non est ergo tonus hoc pacto in duo equa diuisus. et soni a b l b | ⁊ l b c b per diffinitionem adinuicem inequales: qui quidem soni emmeles sunt: musicoq̧ melo perparum apti.

Toni spacio hoc modo diuiso: totius medie sectionis sonus: maioris extremi toni sonum acumine: minoris vero grauitate superat. **6**

|A c|d|e|f|g|h|i|k|b|
| l | |

¶ Sit a b vt in precedenti iam dictum est diuisum: ita vt a b ad c b recrepet tonum. Dico quoniã sonus l b acumine superat sonum a b | quoq̧ idem sonus l b grauitate vincit c b. Nam a b totum est ⁊ l b ei⁹ pars: ergo per quartam petitionem a b grauiorem sonum edit ⁊ l b gracilliorem. et per eãdem quoniã l b totũ est ad c b: sonus l b grauior est sono c b. Superat ergo l b maius toni extremum acumine: ⁊ minus grauitate. quod propositum erat demonstrandum.

Tonum in duo equa: certo constitutoq̧ numero diuidi impossibile est. **7**

¶ Nam per quintam primi huius nullum superparticulare interuallum in plura equalia dirimitur: et que proportio spaciorũ interualli inter se ea quoq̧ est ⁊ soni ad sonũ. Atqui tonus ex superparticulari nascitur interuallo. nascitur enim ex epogdoa | sesquioctauaq̧ ratione. igitur ton⁹ minime in duo equalia dirimitur | diuiditurq̧. immo vero neq̧ in plura duobus equa: vt in tria aut quattuor. ¶ Ex quo facile cognoscitur Aristoxenus musicus aurium iudicio cuncta cõmittẽs perparũ esse probãdus. qui semitonia secus ꝙ Pythagorici non arbitratur esse dimidio tono cõtractiora: sed quemadmodum semitonia dicuntur: ita quoq̧ et esse integra tonorum dimidia. Nec minus Martianus felix simili lapsus errore deprehenditur: qui non modo

tonum in duo equalia:sed τ in tria|τ quattuor dirimit atq; secat. Secat enim in primis tonum in duo equalia que idcirco hemitonia vocat. Secundo in tria τ earum tertiarum quamlibet diesim triemeriam nũcupat. Tertio in quattuor et hanc toni partem quartam:vocat diesim tetartemeriam: q; he dieses nunc tertie nunc quarte toni sunt partes. Est enim tritos tertius|tetartos quartus|τ meros pars. Ponit τ tertiã dieseos acceptionẽ vt ea ipsa toni tertia τ tertie dimidia pars dicatur. Et rursum primi modi primeq; acceptionis dieses:chromaticas vocat|secundas vocat enarmonicas|tertias vero enarmonice diuisionis hemiolias: partim Aristoxeno similiter:partim autem dissimiliter. Similiter quidem q; Aristoxenus toni dimidium semitonium ponat et toni tertiã diesim chromaticam vocet sed chromatis molis:τ toni quartam diesim enarmonicam. at dissimiliter q; toni quartam cum propria quarte medietate vocet diesim chromatis hemiolii. Et certe vel Martianus in tertia dieseos acceptione nouo errore lapsus putandus est:vel eidem putasse hemitonium τ diesim enarmonici hemiolii idem esse. nam cum omne totum tribus suis tertiis integretur: vnã ergo tertiarũ τ tertie medietatem totius dimidium implere necesse est. Sed cũ hec se satis falsa esse probãt| τ nulla sui parte cohereant:non est cur in his diutius sermo sit protrahẽdus. Sic enim qui stolidum sensus iudicium sequentes intellectum relinquunt:facile ex disciplinarum aditis se explosos sentiunt.

8 Quicunq; numerus in terminos toni ducatur:interuallum toni relinquet.

Nam cum tonus τ toni interuallum in proportione sesquioctaua cõsistat:sui termini erũt nouem ac octo aut quicunq; alii qui simili sibi proportione respondeant. Et cum per septimã secũdi Arithmetices: si vnus idemq; numerus duos multiplicet productorum τ multiplicatorum eadem sit proportio:ergo quicunq; numerus ducetur in terminos sesquioctaue:sesquioctauã producet|relinquetq; tonũ atq; toni interuallũ quod est ppositũ. Et nõ modo de sesquioctauo τ toni interuallo id sentiẽdũ est:sed τ de quolibet altero interuallo.

9 Omnis numerus:extremorum toni differentia constitui potest.

Si enim tonus in minimis cõstituatur vt sunt nouem atq; octo monas differentia est:cum nouenarius atq; octonarius sola vnitate dissentiãt. Et si ducatur binarius in nouenarium τ octonarium τ producãtur a τ b per precedentẽ a τ b erũt toni extrema. At vero per nonã primi Arithmetices quod fit ex binario in nouenarium tantũ est quãtũ quod fit ex binario in octonarium τ vnitatem. sed binarius in vnitatem per commune proloquiũ seipsum producit:igitur extremorum toni a τ b binarius differẽtia cõstituitur. Et si ducatur ternarius in nouem τ octo:eodem quoq; argumento ternarius extremorũ toni differẽtia cõstituetur. Et ita quicunq; alter numerus in eosdem minimos toni terminos ducetur: idem extremorum toni differentia constituetur. Manifestum itaq; est omnem numerum extremorum toni differentiã constitui posse. Et quãq; ita est placuit tñ Philolao Pythagorico primordiũ toni|primordialẽq; eius differentiã ternariũ constituere:qui primus cubum a primo impari numero procreat|ac gignit. q; is numerus apud Pythagoricos maxime honorabilis fuerit. Nam cum ternarium primum quidem imparem numerũ tertio duxeris: nouẽ consurgunt. que ter ducta septem supra viginti:scilz cubum a primo impari reddunt. at 27 ad 24 tono distant| toniq; claudunt interuallum:τ horum differentia ternarius cõstituitur. est enim ternarius summe 24 pars octaua:que eidem adiecta summe:primũ a ternario cubũ rursus instaurat atq; perficit. Et idem Philolaus summã septem τ viginti in duas partes secuit 13 τ 14 quarum hec maior| illa vero minor habetur| et hanc primordium. Apotomes facit:que est toni portio maior:illam autem facit principium dieseos: que est toni decisio minor atq; portio:τ quã posterius semitoniũ minus nũcupabimus. τ illarum duarum partium differentiam que est vnitas facit cõmatis principium. Sed de his satis.

10 Numeri dati partẽ quotãcunq; reperire. Quo fit vt cuiuslibet numeri pars ab ipso sit numerata:& a denominãte eiusdem partis sit denominata.

272	17		306	18		136	17
c	d		g	h		m	n
17	16		18	17		17	8
a	b		e	f		k	l

Quãuis enĩ numerorũ numerantiũ qui exẽplares in aĩa sunt: vnitas insecabilis existat:numerorũ tamẽ numeratorum quales in phisicis sunt motuũ numeri|in geometricis linearũ τ planorũ| in astrologicis temporum|in musicis autẽ tonorũ atq; interuallorũ vnitas aut verius vnum sectionem recipit. Sit ergo a quicunq; numerus cuius vna partium denominata ab b quesita sit:resoluo a in omnes suas partes denominatas ab b:ducendo scilz denominantẽ numeri a in denominantẽ partis b:ita vt proueniat c. manifestũ est partes c simul denominatas ab b equari toti numero a. diuido igitur c p b τ proueniat d:dico d esse partẽ petitã| et numeratã ab a. hoc est a numero denominãte a. Nã enĩ sit pars a denominata ab b que petita erat: patet q; a in d per septimã petitionem reproducit c:quare d est pars c denominata ab b. at c equatur a. igitur τ d pars est a denominata ab b. Sed τ q; d numeretur ab a:patet. quia a in b pducit c: ergo per sextã petitionẽ c diuiso per b redibit a. sed τ eodem c diuiso per b prius veniebat d. numerat igitur a semel d. τ sic propositio atq; suum correlariũ nota sunt. Et q̃uis hec vt mõstretur perfacilis sit: visus tñ eius aliquãto latẽtior: quẽ exemplaris deductio facile cuiq; reddet illustriorem. vt quesita sit verbi causa summe decem et septem pars sextadecima duco vtriusq; denominantes in seinuicẽ. hoc est 17 et 16 et surgent 272 sextedecime. tot enim sextasdecimas continet numerus 17 resolutus. diuido ergo 272 per 16 et prouenient 17 sextedecime: que erunt totius summe partium 272 pars sextadecima. quare τ numeri 17 pars itidem sextadecima. at 17 sextedecime vnitatem continent τ vnam sextamdecimam. Est itaq; vnitas τ vna sextadecima: dati numeri 17 pars sextadecima. Et si numeri decem τ octo quereretur pars septimadecima duco decem et octo in decem

⁊ septem et productum diuido per 17 et venient 18 septimedecime: que vnum complent integrum| vnam septimamdecimam. Est ergo vnitas ⁊ vna vnitatis septimadecima date summe decem ⁊ octo pars vna septimadecima. Si vero summe decem ⁊ septem volo partem octauam reperire: duco 17 in octo ⁊ quod productum fuerit diuido per octo ⁊ prouenient 17 octaue que duas vnitates ⁊ vnam octauam efficiunt. erunt ergo duo ⁊ octaua vnius totius summe decem ⁊ septem pars octaua. quod querebatur. Et ita in quibuslibet sequiuis valeat exercitare: habent tamen que particulari| exemplariq; demonstratione sunt ostensa: ad sequentia pondus ac momentum.

Si duo inequales numeri ad eundem minorem comparentur: maioris ad ipsum maior est proportio: et minoris minor. 11

9	8	7
A	b	c

Et sint a b duo inequales numeri quorum a sit maior| et b minor: qui cōparentur ad eundē minorē c. dico a ad c maiorē esse proportionē quam b ad c. Nam cum per octauā petitionē extremorum a ad c proportio cōposita sit ex proportionibus a ad b ⁊ b ad c vt suis partibus: ergo proportio b ad c pars est proportionis a ad c et proportio a ad c totum. ⁊ cum per vltimum cōmune proloquium: omne totum maius sit sua parte: igitur proportio a ad c maior est proportione b ad c. et ita de quibuslibet aliis simili argumento est agendum.

Sesquisextadecima proportio: integrum toni dimidium superat. 12

A c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t

Quinta huius mō trauit medio extremorum toni spacio in duo equa diuiso: tonū minime in duo equa| geometrice partiri: et sectionē hinc ⁊ inde altrinsecus sesquiseptimādecimā | et sesquisextādecimā retinere proportionē. Hec vero ostēdit sesquisextādecimā proportionē que illic ex parte intensionis acuminisq; relinquitur: hemitonio| integroq; toni dimidio esse maiorem. et sequens monstrabit sesquiseptimamdecimam ex grauiori parte sumptam: eodem toni dimidio esse minorem. Sit ergo vt in quinta huius spacium a b in decem et octo equas partes per a c d e f ⁊ reliquas notas diuisum. ita vt a b earum partium contineat decem et octo| et c b sedecim| ⁊ l b decem ⁊ septem. manifestum est a b ⁊ c b vt prius visum est esse tonum: et l b 17 ad c b 16 esse sexquisextādecimam quā habitudinem dico esse integro semitonio maiorem. quoniam enim per decimam huius vnitas ⁊ sextadecima vnius: est summe decem ⁊ septem pars sextadecima. que si eidem summe adiiciatur fient decem ⁊ octo| et sextadecima vnius. at octo decem ⁊ sextadecima vnius ad decem ⁊ septem per diffinitionem est sesquisextadecima. Sunt ergo decem ⁊ octo ⁊ sextadecima vnius ad decem ⁊ septem et decem ⁊ septem ad sexdecim due coniuncte sesquisextedecime. sed decem ⁊ octo ⁊ sextadecima vnius: per precedentem maior est sesquioctaua ad sedecim. Nam decem ⁊ octo ad sedecim vt prius visum est: sesquioctaua est. igitur sesquisextadecima bis aucta tonum| tonisq; interuallum transcendit. quare per nonum proloquium sesquisextadecima proportio integrum toni dimidium superat. quidquid enim bis auctum transcendit aliquid: id vltra eius dimidium esse necesse est. Ex quo valentiore iure cognoscitur sesquiquintamdecimam et omnem proportionem sesquisextadecima maiorem: integrum toni dimidium superare.

Sesquiseptimadecima: minor est integro toni dimidio. 13

19 1	19 1	18	17	A ad b sesquidecimāseptimam proportionem cōtinet: que integro toni dimidio contractior est.
d 8	c 17	a	b	

Sint a decem ⁊ octo interualli partes ⁊ b decem ⁊ septem| c decem ⁊ nouem ⁊ vna septimadecima| d vero decem ⁊ nouem ⁊ vna octaua. per decimam huius a ad b est sesquiseptimadecima. ⁊ c ad a similiter sesquiseptimadecima. sunt ergo c ad b due sesquiseptimedecime adinuicem coniuncte. sed et per eandem d ad b sesquioctaua est atq; tonus. d enim continet b ⁊ eius partem octauam. at d ad b proportio maior est proportione c ad b. nam vnius pars octaua maior est vna septimadecima. ergo sesquiseptimadecima proportio per decimum proloquium minor est integro semitonio. quod enim duplatum non implet integrum: neq; id quoq; continet dimidium. Est ergo notum sesquiseptimamdecimam proportionem integro toni dimidio esse minorem.

Integrā toni medietatem: inter sesquisextamdecimam & sesquiseptimamdecimā proportionem cadere necesse est. 14

Nam per duodecimam sesquisextadecima maior est toni dimidio: ⁊ per decimamtertiam sesquiseptimadecima minor est eodē toni dimidio. at per communem scientiam inter maius atq; minus dimidio: ipsum dimidium consistere necesse est. ergo integrum toni dimidium inter sesquisextamdecimam et sesquiseptimamdecimam cadere necesse est. Sed id in noto| integroq; numero nullo pacto vt septima huius monstrauit fieri continget: vt neq; in geometricis diameter quadrati: eius coste certo| constitutoq; numero cōmensurari potest. Sed hoc vltimum ex altero loco requirendum est.

Semitonium minus: duobus tonis in chorda subiungere. 15

a c d e b

℄ Intelligitur semitonium subiungi quando ex acutiori parte duobus quidem tonis ad graviorem partem relictis ipsum semitonium collocatur. preiungi vero quādo ipsum ex parte remissiori duobus tonis adhibetur. Cōtinuo ergo per secūdā hui⁹ duos tonos in chorda a b per notas a c d b. Sitqꝫ a b c b: primus. ꝛ secūdus sit c b d b qui quia per diffinitionem in sesquioctaua proportione consistit: ꝛ per decimāseptimā primi hui⁹ due sesquioctaue minores sunt sesquitertia proportione. Erit ergo a b ꝛ d b minus sesquitertio. Diuide ergo a b in quattuor partes equas: ꝛ initium tertie sectionis facio notam e. ita vt e b tres earū quartarū cōtineat: per diffinitionē igitur a b ad e b sesquitertia proportio est. sed sesquitertia ꝓportio a b ꝛ e b superat duos tonos a b ꝛ d b in proportione d b ꝛ e b. Est igitur d b ꝛ e b per descriptionem semitonium minus duobus tonis: vt propositum erat subiunctum.

16 Semitonium minus: duobus tonis preponere.

a c d e b

℄ Facio a b ad c b sesquitertium interuallum et diuido c b in octo equas partes et supra c versus a: facio d c vni earum octo partium equā: ita vt d b earū partiū nouem cōtineat. ꝛ per diffinitionē d b ꝛ c b vnum constituunt tonum. Similiter diuido d b in octo equas partes: ꝛ vnā earū adiūgo supra d per notam e. quare iterum e b ꝛ d b erit tonus. suntqꝫ duo toni e b ꝛ c b. sed a b ꝛ c b sesquitertia proportio: maior est duob⁹ illis tonis in proportione a b ꝛ e b. Est igitur per diffinitionem a b ꝛ e b semitonium minus. quod cum sit duobus tonis prepositum: quoniā ex parte remissa illis adiunctum. factum est propositum.

17 Duobus tonis: diesim semitoniumqꝫ minus interponere.

a d e c b

℄ Idem diesim atqꝫ semitonium minus hic (vt iam quoqꝫ dictum est) intelligimus. Sit ergo a b ꝛ c b vt in precedenti sesquitertia proportio in tota chorda a b. ab a: c versus: intendo tonum per notam d. ꝛ ab c versus a remitto tonū vt in precedēti factū est per notam e: ita vt a b ꝛ d b sit tonus: ꝛ similiter e b ꝛ c b tonus. manifestum a b et c b sesquitertiā proportionem superare duos illos tonos in media proportione d b ꝛ e b. Est igitur per diffinitionem d b ꝛ e b semitonium minus duobus tonis interceptum et propositum.

18 Semitonii minoris minimos numeros reperire: & quomodolibet semitoniū minus in chorda vna aut pluribus collocare.

324	288	256	243
f	g	h	k
81	72	64	
c	d	e	
9	8		
a	b		
4	3		
l	m		

℄ Sit a nouenarius ꝛ b octonarius minimi numeri toni. duco a in se | et a in b | et b in se | et consurgāt numeri c d e. inter quos per sextam quarti Arithmetices erunt duo sesquioctaui | duoqꝫ toni in minimis cōtinuati. Sit preterea l quaternarius ꝛ m ternarius. duco l in c d e ꝛ prodeant f g h: inter quos per septimā secūdi Arithmetices similiter cōiuncti sunt duo sesquioctaui | ꝛ proinde duo toni. Duco preterea eidē m in e ꝛ proueniat k per octauā secūdi Arithmetices f ad k est proportio sesquitertia que per 17 primi hui⁹ minor est f h ꝛ differētia est h k. dico ergo h k esse minimos numeros semitonij minoris. ꝙ eni sint numeri semitonij minoris per diffinitionē notum est. sed ꝙ minimi: id iam declarandū est. Nam quia c e sunt in sua proportione minimi: per decimāoctauā tertij Arithmetices sunt cōtra se primi. ꝛ quia etiā l ꝛ a quaternarius ꝛ nouenarius sunt contra se primi. ergo per vndecimā tertij Arithmetices l est primus ad c. ꝛ per decimā eiusdē h qui nascitur ex l ꝛ e primis eidē numero c: erit primus ad c. Rursus m ꝛ b ternarius atqꝫ octonarius sunt adinuicem primi. ergo per vndecimā tertij ꝛ m primus est ad e sed ꝛ cū l | m quaternarius ꝛ ternarius sint etiam primi: ergo per decimam eiusdem m etiam primus est ad h. Cum ergo c ꝛ m monstrati sunt primi ad h: ergo per eādem decimam tertij numerus k ex c ꝛ m productus: primus est ad h. Sunt itaqꝫ h ꝛ k semitonij minoris numeri adinuicē primi: quare per vicesimātertiā Arithmetices in sua proportione minimi. quod est propositū quo ad hoc. Ex data quacūqꝫ chorda si eā diuides secūdū numerū h ꝛ earū partiū accipias secūdū numerum k numeros scilꝫ semitonij minoris vbilibet in eadē chorda constitutum erit semitonij minoris interuallum. In diuersis aūt facillime idem feceris: si eas chordas equales equaliter tensas vnisonasqꝫ posueris | et partieris earum quācunqꝫ voles secundū h quarū partium alterius acceperis secundū k erit tum in pluribus chordis semitonij minoris constitutum interuallum. quod est totum propositum.

19 Semitonium minus in minore ꝙ̄ sesquiseptimadecima sit: proportione consistit. Quo fit vt regula semitonii sumendi: non sit differentiam extremorum toni in duo equa partiendo.

524	288	257 5	256	243
f	g	l 17	h	k

℄ Sint vt in precedenti h k minimi numeri semitonij minoris vt ducenta quinquaginta sex ⁊ ducētaquadraginta tria. Capio per decimam huius: septimamdecimam partem numeri k ducētorum scilꝫ quadraginta triū: eritqꝫ quattuordecim ⁊ quinqꝫ septimedecime. Addo itaqꝫ quattuordecim et 5 septimasdecimas ad k ⁊ fiat l numerus 257 et 5 septimedecime. Erit ergo numerus l ad k sesquiseptimusdecimus. at l ducenta quinquaginta septem et quinqꝫ septimedecime transcendit h qui solum est ducentorum quinquaginta sex. Consistet itaqꝫ semitonium minus per vndecimam huius in minore proportione ꝙ sit proportio sesquiseptimadecima. quare et a fortiore in minore consistit proportione ꝙ sit sesquisextadecima. Correlarium hinc notum est. Nam hoc pacto partiendo extremorum toni spacium: ex quinta huius cognoscuntur sesquisextadecima atqꝫ sesquiseptimadecima altrinsecus constitui: quarum vtrāqꝫ presens monstrauit semitonij minoris habitudinem esse minorem.

20 Sesquioctauadecima proportio: semitonio minore rursus maior euadit.

256	1	256	243
c	2	a	b

℄ Sint a b minimi numeri semitonij minoris per decimamoctauam huius reperti scilꝫ ducenta quinquaginta sex et ducenta quadraginta tria. capio per decimam huius octauamdecimam partem numeri b: quam reperio esse tredecim ⁊ semis: quam quidem addo numero b fiatqꝫ aggregatus c. tunc c ad b sesquioctauadecima proportio est. at c maior numerus est a. nam a duntaxat continet ducenta quinquaginta sex: c vero equalium partium totidem ⁊ insuper semissem vnius 1/2. est igitur sesquioctauadecima proportio semitonio minore maior.

21 Sesquinonadecima: est semitonio minore minor. Quo fit vt semitoniū minus inter sesquioctauamdecimam et sesquinonamdecimam consistat collocatum.

256	255 15		243
a	c	19	b

℄ Sint vt prius minimi termini semitonij minoris a et b: dico sesquinonamdecimam proportionem minorem esse proportione a ad b. capio enim per decimam huius: nonamdecimam partem numeri b: quam inuenio esse duodecim ⁊ quindecim nonasdecimas. quam partem adijcio numero b ⁊ fiat c. proportio c ad b est sesquinonadecima. sed a maius est ꝙ c. igitur per vndecimam huius maius est semitonium minus sesquinonadecima proportione atqꝫ sesquinonadecima proportio semitonio minore minor. Correlarium vero vt decimaquarta huius notum esse potest.

22 Semitonium maius: in data chorda constituere.

D a	c								b

℄ Sit a b ⁊ c b semitonij minoris interuallum. Diuido c b in octo partes equas: quibus equam facio partem c d. ita vt d b nouem contineat. ergo d b ⁊ c b erit tonus. demo igitur a tono d b ⁊ c b semitonium minus scilꝫ a b ⁊ c b relinquetur qꝫ d b ⁊ a b toni reliqua pars ⁊ qua ipse semitonium minus superat. igitur per diffinitionem d b ⁊ a b semitonium maius est in data chorda (vt propositum erat) constitutum. ⁊ quemadmodum semitonium maius collocasti ad partem grauiorem: ita quoqꝫ ad partem acuminis collocare facillimum esset.

23 Semitonii maioris: minimos numeros reperire.

2187	2048		1944
e	d		c
	256		243
	a		b
		8	
		f	

℄ Sint a b minimi numeri semitonij minoris ex decimaoctaua huius reperti et f octonarius. quoniam ex demonstratione decimeoctaue huius f octonarius primus est ad b. ergo f non numerat b. non habet igitur b octauam partem. duco igitur f in b et in a et cōsurgant c d: per septimam secundi elementorum Arithmetices d ad c vt a ad b. est igitur inter d c semitonium minus semitonijqꝫ minoris interuallum. et quia c habet partem octauam vt b: addo eidem numero c partem octauam eius b: ⁊ coaceruatus fiat e. cōtinet igitur e numerum c et partem eius octauam. quare e c tonus. ⁊ quia tonus e c superat semitonium minus d c

interuallo e d:ergo e d sunt numeri semitonij maioris. Eos autem ijdem sint minimi facile ex decimaquinta tertij Arithmetices cognoscas distrahendo d ab e ꝛ quod reliquum fuerit iterũ quoties potes distrahendo ab d.ꝛ hoc pacto deinceps ꝛ videbis ad vltimum relictam vnitatẽ|eritq; modo qui ad latus apparet distractio. quare per eandem decimamquintam d et e sunt adinuicem primi. Sunt igitur per vicesimam eiusdem in sua proportione minimi: quod est propositum.

2187
2048
136
102
37
28
9
1

24 Semitonii maioris habitudo: sesquiquintamdecimam superat proportionem.

2187	2184 8	2048	136 8	
a	c 15	b	d 15	

¶ Sint a b minimi termini habitudinis semitonij maioris per precedentem reperti: dico habitudinem a ad b maiorem esse sesquiquintadecima. Sumo enim vt in precedentibus iam sepe factum est per decimã huius quintamdecimam partem numeri b ꝛ hec inuenitur centũ trigintasex et octo quintedecime vnius que sit d adijcio ergo d ab b et fiat c:certum est c ad b esse sesquiquintamdecimam.at c minor numerus est ꝙ a. Est enim a numerus duum milium cẽtum octuagintaseptẽ.c autem solũ duum miliũ cẽtum octuagintaquattuor et fere semis paulo amplius.Est igitur per vndecimam huius semitonij maioris habitudo sesquiquinta decima proportione maior eamq; superans quod est propositum.

25 Apotomes interuallum: minus est sesquiquartodecimo interuallo. Vnde manifestum est semitonii maioris proportionem inter sesquiquintamdecimã & sesquiquartamdecimam reperiri collocatam.

2194 4	2187	2048	146 4	
c 14	a	b	d 14	

¶ Apotomen ꝛ semitonium maius: idem esse iam diximus. Sint ergo a b minimi numeri semitonij maioris vt duo milia centum et octuagintaseptem ꝛ duo milia quadragintaocto. Sumo per decimã huius quartam decimam partem b scilꝫ duum milium ꝛ quadragintaocto quã inuenio esse centum quadragintasex et quattuor quartedecime que sit d. addo eam quartamdecimam ad b:et fiat numerus aggregatus c. tunc numeris ad b sesquiquartadecima proportio est. at c maior numerus est a siquidem duo milia quadraginta octo et centum quadragintasex ꝛ quattuor quartedecime summam simul ãttollãt c:duum milium cẽtum nonagintaquattuor:et fere quartam vnius.ꝛ a solum summa sit duum milium centum octuagintaseptem. constat ergo sesquiquartamdecimam proportionem maiorem esse semitonio maiore:atq; propositum. Correlarium vt precedentium notum est.

26 Semitonium minus atq; semitonium maius in superparticulari proportione non cadunt: sed ea in superpatiente ratione consistere necesse est.

¶ Nam semitonium minus per correlarium vicesimeprime huius cadit inter sesquioctauamdecimam et sesquinonamdecimam. atqui inter sesquioctauamdecimam et sesquinonamdecimam nulla cadere valet intercepta mediaq; superparticularis habitudo. sunt enim ille superparticulares proxime maior atq; minor igitur semitonium minus in superparticulari ratione non consistit. neq; per idem semitonium maius. Nam per correlarium precedentis cadit in aliqua proportione media inter sesquiquintamdecimam ꝛ sesquiquartamdecimam duas proximas superparticulares: que superparticularem mediam nullam admittunt non igitur semitonium maius cadit in superparticulari ratione: sed et cum rationes semitonij minoris atq; maioris multis superparticularibus vt iam visum est sint minores: erunt etiam minores ratione duplari que multiplicium minima est: vt que a minimo numero denominetur. nullus enim numerus binario minor. non est ergo semitonij minoris habitudo multiplex similiter neq; semitonij maioris. relinquitur igitur a sufficienti diuisione cum ille sint inter maiorem terminum ꝛ minorem: eas esse in superpatiẽti genere. quod est propositum. ¶ Id tamen propter sophistas aduertere licet ꝙ tonus ꝛ sue partes consonantie et consonãtiarum partes intense: semper in superparticulari: superpatienti aut multiplici habitudine cadunt: remisse vero in subsuperparticulari subsuperpatienti aut submultiplici. Et vero et si ita sit: solemus tamen eas omnes dicere esse in superparticulare habitudine superpatienti: aut multiplici idem superparticulare et subsuperparticulare reputantes ꝛ pro vno computantes. similiter superpatiens ꝛ subsuperpatiens: ꝛ multiplex ꝛ submultiplex.

27 Musicum comma in chorda reperire.

a	f	g	c	b
256		243		
d		e		

¶ Sit a b chorda supra quam sit propositum reperire musicum comma: in qua a b ꝛ c b sit sesquioctaua proportio atq; tonus. Sint preterea d e minimi termini semitonij minoris. Diuido spacium a b in partes equales secundum d: ex quarum numero ab ipso b versus a: capio secundum numerum e ꝛ in termino earum pono notam f. tunc que proportio d ad e: ea erit a b ad f b. quare a b ad f b semitonium minus. Rursum c b spacium seco in equas partes secundum numerum e ꝛ earum partium ab ipso b versus a metiendo: sumo secundum numerum d: et in earum termino pono notam g. manifestum etiam est g b et c b esse semi-

tonium minus. sed et cum a b et f b probatum sit etiam semitonium minus. ergo intervallũ f b et g b est quo sesquioctaua proportio a b et c b: maior est duobus semitoniis minoribus. est igitur per diffinitionem f b et g b inuentum musicum comma: quod erat monstrandum.

Comma: in minimis numeris constituere. 28

531441	524288		497664	472392
k	g		h	i
	65539		62208	59049
	c		d	e
	256		243	
	A		b	
		8		
		f		

531441
524288
7153
2119
796
527
269
258
11
5
1

℄ Sint a b minimi numeri semitonii minoris. duco a in se et in b et b in se et exurgant c d e: eruntq; c d et d e duo semitonia minora coniuncta. Sit preterea f octonarius qui ex decimaoctaua huius est primus ad b. quare per vndecimam tertii Arithmetices et primus ad c. non habet igitur c octauam. duco ergo f octonarium in c d e: et prouenĩãt g h i: vt i scilicet oriatur ex f in e. certum est etiam inter g h et h i esse duo semitonia minora. et quia e est octaua pars i addo e et i simul: sitq; eorum aggregatus k. dubium nullum est k ad i esse sesquioctauam: et k g esse proportionem qua sesquioctaua maior est g h et h i duobus semitoniis minoribus. Sunt igitur k g numeri commatis. sed ꝙ sint minimi ex decimaquinta tertii Arithmetices notum est. Nam substracto vt ea ipsa docet g ab k et eo quod relictum est substracto quoad potest ab g. et sic deinceps tandem vt ad latus adiectum apparet: relinquitur vnitas. Et quemadmodum comma duabus diesibus est prepositum: ita quoq; ꝙ facillimum est comma duabus diesibus subiungere: aut duabus interserere.

Sesquiseptuagesimaquarta: commatis proportione transcenditur. 29

531441	531372 72	524288	7084 72	
A	d 74	b	c 74	

℄ Sint enim a b minimi numeri commatis per precedentem reperti. elicio per decimam huius septuagesimamquartam b que sit c. adiicio itaq; b et c simul: et coalescat aggregeturq; numerus d. qui si ad b conferatur comperitur sesquiseptuagesimusquartus. atqui idem d minor a esse deprehenditur. superat ergo per vndecimam huius ratio cõmatis septuagesimamquartam proportionem.

Commatis ratio: sesquiseptuagesimatertia proportione minor est. vnde fit vt commatis ratio inter septuagesimamquartam et septuagesimamtertiam constituta reperiatur habitudinem. 30

531470 2	531441	524288	7182 2	
d 73	A	b	c 73	

℄ Sint a b vt prius minimi numeri commatis. capio septuagesimãtertiã partẽ b que sit c. iũgo b et c simul et aggregetur d. eritq; d ad b sesquiseptuagesimustertius. et d maior esse cõspicitur. ergo commatis ratio sesquiseptuagesimatertia proportione minor est: quod erat monstrandum. Correlarium vt alia notum est.

Commatis ratio: in superpatiente ratione consistit. 31

℄ Non enim in superparticulari cõsistet quãdoquidẽ due superparticulares proxime sesquiseptuagesimaquarta et sesquiseptuagesimatertia: omnem prorsus mediam excludant superparticularẽ. et tãto minus in genere multiplici consistere valebit. vt que septuaginta duas superparticulares habeat se maiores. relinquitur ergo vt ea in superpatiente genere consistere possit. est enim ea maioris et minoris habitudo.

Rationes schismatis atq; diaschismatis sunt ignote: atq; irrationales. quo fit vt quarum minimi numeri tetragonicum latus non habeant: medietatum rationes ignote irrationalesq; sint omnes. 32

256	243				
A	b	c	d	e	
531441	524288				

℄ Eas rationes ignotas atq; irrationales dicimus que nullo certo constitutoq; numero designari valent vnq̃: vt neq; in geometricis diametri et coste quadrati proportio: quales schismatum diaschismatumq;

proportiones esse dicimus. Sint ergo primo a b minimi numeri semitonij minoris: per decimamoctauam huius inuenti: b enim vt illic quoque monstratum est nascitur ex nouenario in se et ternario in productum nouenarij in se. at numerus qui ex ductu nouenarij in se exurgebat: erat quadratus et ternarius non est quadratus: ergo per decimamquartam sexti Arithmetices b minus semitonij minoris extremum ex ductu quidem non quadrati in quadratum proueniens: non est numerus quadratus. Si possibile est ergo vt diaschismatos proportio in numeris sit nota: sint ergo per sextam quarti Arithmetices duo diaschismata in minimis c d e coniuncta. manifestum enim est cum diaschisma sit semitonij minoris dimidium c d et d e simul esse semitonium minus. et c ad e esse semitonij minoris interuallum. sed et cum proportiones c d et d e sint continuate in minimis ergo per quintam quarti Arithmetices c e sunt in sua proportione minimi. Sunt ergo minimi in proportione semitonij minoris. sed et tales positi sunt a et b: igitur e et c ijdem erunt numeri cum a et b scilicet c idem a et e idem b. Preterea quia que proportio c ad d ea est d ad e: ergo per primam sexti Arithmetices c numerus est quadratus et e numerus quadratus: quare et b idem numero e etiam quadratus. at b demonstratus est non quadratus. Erit itaque idem numerus quadratus et non quadratus: quod est impossibile. non igitur diaschisma note proportionis habebitur. et idem de proportione schismatos monstrabitur. Sint enim a b subter designati minimi numeri commatis: quia per vicesimamoctauam huius b minor proportionis commatis terminus sit ex ductu octonarij in quadratum lateris ducentorum quinquagintasex. et octonarius non est quadratus: ergo per decimamquartam sexti Arithmetices b minor terminus commatis non est quadratus. non igitur simili vt prioris partis demonstratione a b certis designatisque numeris potest equis proportionibus deduci. Est igitur schismatos eius scilicet medietatis ratio ignota: atque irrationalis Correlarium ex modo demonstrationis notum est.

53 Tonus: duobus semitoniis minoribus et commate constat.

¶ Nam ratio sesquioctaua duobus semitonijs minoribus atque vno commate constat. Superat enim duas dieses duoque semitonia minora vno commate: at tonus in eadem ratione consistit. constat igitur tonus ex duobus semitonijs minoribus et commate.

54 Tonus a duobus semitoniis minoribus: vno commate distat.

¶ Nam substracto a sesquioctaua proportione vno commate relinquuntur duo semitonia minora: igitur et eodem commate a tono diducto due dieses et duo semitonia minora relinquuntur. distat ergo tonus a duobus semitonijs minoribus vno commate.

55 Semitonium minus tribus commatibus maius est: minus vero quattuor. Vnde manifestum est apotomen plura quattuor et pauciora quinque continere commata.

r	277531995223258301621530747994112
q	528128589443693511257285776231761
p	2636000061952401802360312589697536
o	2178396179632950626746368
n	2155693963075557766310747
m	2067895430987964852731904
l	1709860 4835172352
k	16677181699666569
h	16231265527136256
g	134217728
f	129140163
e	127401984
d	524288
c	531441
b	243
A	256

¶ Non est greca curiositas calculi labore deterrita quo minus quot commata in diesi quot in apotome quot denique in tono sint: peruestigaret. quod nisi a prioribus tentatum cognouissem cum id quoque plus laboris quam (vt mihi visum est) in musicis modulationibus vsus vtilitatisque afferat: missum fecissem. qui tamen id cognoscere desiderauerint hoc pacto deprehendent. Sint a b minimi numeri semitonij minoris et c d minimi commatis: per decimamseptimam et decimamoctauam huius reperti: duco b in c d et proueniant e f et a in c et veniat g: per septimam secundi Arithmetices f ad e est commatis habitudo et per octauam eiusdem g ad e habitudo dieseos semitoniique minoris. Deinde duco e in e et f in f et e in g et nascantur h k l: per sextam quarti Arithmetices perque facile cognosci potest k h continet duo commata. et per

septimam secundi eiusdem l ad h esse semitonium minus. Deinde duco d in h: ⁊ c in k: et d in l: ⁊ eo ordine veniant m n o: per eandem sextam quarti cognitu facillimum est n m continere tria commata. et per septimam secundi: o m continere semitonium minus. at n numerus cognoscitur esse minor o. ergo o ad m semitonium minus tria vincit|exsuperatq; commata. Deinde duco h in h et k in k et h in l. ⁊ suo ordine exsurgant: oriantur q; p q r. manifestum est per idem quod prius q p continere quattuor commata et r p continere semitonium minus. at numerus r minor est numero q. igitur quattuor commata amplius sunt semitonio minore. Correlarium autem hinc notum est ꝙ semitonium maius solo cōmate superat semitonium minus. atqui semitonium minus plura tribus ⁊ pauciora quattuor vt modo visum est continet commata. igitur vnico superadiecto commate semitoniū maius quod vocant apotomē: plura quattuor ⁊ pauciora quinq; continere est necesse.

Tonum: plura septem continere commata necesse est. 36

¶ Nam tonus ex semitonio minore ⁊ apotome coalescit atq; constituitur. at semitonium minus per penultimam tria continet commata ⁊ amplius: et per precedentem apotome quattuor et amplius tria autem et quattuor ⁊ amplius: septem sunt et amplius. igitur tonus plura q̃ septem continet commata.

¶ Secundi Elementorum Musicalium Finis.

Sesquitonus: est qui tonum ac semitonium minus continet. quem et trihemitonium: trisemitoniumq;: inferius dicemus.

Ditonus est qui duos complectitur tonos.

Tritonus vero qui tres.

Consonantie simplices sunt: diatessaron: diapente & diapason.

Composite vero: diapason diapente: bis diapason.

Diatessaron est consonantia: que ex interualli sesquitertia ratione nascitur.

Diapente: que nascitur ex sesqualtera.

Diapason vero: que ex dupla.

Diapason diapente: est quam adinuicem iuncte constituunt diapason ac diapente consonantie.

Bis diapason: est quam coniungunt due diapason consonantie.

¶ Nec altius ascendunt Pythagorici ꝙ altius ascendentibus voces quoquo pacto illis stridule vise sint ⁊ ꝙ vnicuiq; ferme sue vocis modum: limitesq; ad consonantiam bis diapason natura fecerit| qꝙ habita contemplatione musica adusq; consonantiam bis diapason: reliquam vt habeatur q̃ facillimam putauerunt vt qui ad ter atq; quater diapason musicos modulos aptare voluerint: et hac quoq; de causa musici ferme omnes in definienda: determinandaq; atq; tradenda disciplina musica limites Pythagore non transcendunt putantes eius limitibus contenti: et priscam|veteremq; autoritatem seculi sufficienter determinasse. quod ⁊ nos in hoc opere tentabimus imitari.

Sesquitonus inter sesquiquintam atq; sesquisextam collocatus est. vnde fit vt etsi sesquitonus iocūde: suauiterq; auditū feriat: nondū tamen consonantia ponēdus sit. 1

291 3	288	283 3	256	243	48 3	40 3
d 5	a	e 6	b	c	f 5	g 6

¶ Sit ergo a ducenta octuagintaocto: b vero ducenta quinquagintasex: et c ducenta quadragintatria. per decimamoctauam secundi huius manifestum est a ad b esse tonum|⁊ b ad c esse semitonium minus. quare a ad c per diffinitionem erit sesquitonus. quem dico in proportione minore cōsistere q̃ sit sesquiquinta|et maiore sesquisexta. Nam capio per decimam secundi huius quintam partem c et veniet numerus 48 et tres quinte qui sit f. Addo igitur f ad c et aggregatus fiat d: qui maior inuenitur q̃ a. igitur per vndecimam secū di huius d ad c proportio maior est q̃ a ad c. At vero d ad c sesquiquinta est. est itaq; sesquitonus in proportione minore constitutus q̃ sit sesquiquinta proportio. Capio deniq; per eandē decimā secundi sextā partē c et veniet mihi numerus 40 et semis qui sit g. aggregatus igitur g ad numerū c restituat numerū e: certū est numerū e minorē esse q̃ a. quare vt prius a ad c sesquitonus maior est q̃ e ad c: qui in sesquisexta ꝓportione constituitur. quod est propositum. Correlarium enim cognoscitur. ⁊ primum ꝙ sesquitonus suauiter feriat auditum: cuiuslibet musicis modulationibus intenti fidē facit sensus. ꝙ vero nondū consonantia sit: idcirco euenit ꝙ sesquitonus in superparticulari ratione non consistit: quandoquidem inter sesquiquintam ⁊ sesquisextam proximas superparticulares nulla cadit interstes: mediaq; superparticularis habitudo. neq; quidē est in multiplici genere: qm̄ per vndecimā primi huius dupla ꝓportio que multipliciū minima est: ex sesqualtera ⁊ sesquitertia proportione maximis quidē superparticularibus: exurgit atq; nascitur. cōsonantia autē ois per diffinitionē in superparticulari aut multiplici ratione cōsistit. est ergo totū propositum notum.

2 Itidem ditonus inter ſeſquitertiam atq; ſeſquiquartam medius: minime muſicam complet atq; perficit harmoniam.

85 1		81		80		72		64		21 1		16	
D 3		A		E		B		C		F 3		G	

¶ Harmoniam et conſonantiam idem dicimus et huius vt precedentis procedit demonſtratio. Sint ergo a b c duo toni in minimis cōſtituti. vt 81|72|64. dico ditonū a ad c cōſiſtere in proportione minore ſeſquitertia: et maiore ſeſquiquarta ⁊ muſicam conſonantiam haud quaq̄ perficere. Capio enim tertiam partem c per decimam ſecundi huius vt ſepe factum eſt. et venit vnum et viginti cum triente vnius: qui numerus ſit f. addo itaq; f 21 et trientem ad numerum c 64. et aggregatus eſt 85 cum tertia parte vnius: qui idem ſit d. manifeſtum eſt d ad c eſſe ſeſquitertium. at d maior eſt a: continet enim a duntaxat vnum et octuaginta: d vero octuaginta quinq; ⁊ amplius. Eſt ergo ſeſquitertia proportio ditono maior. Et rurſum capio quartam partem c que ſit g: quam addo ad c et ſurgat e: qui erit ad c ſeſquiquartus. at a maior eſt e. igitur per vndecimam ſecundi huius: ditonus ſeſquiquartum tranſcendit. et cum inter ſeſquitertium et ſeſquiquartum nullus cadat ſuperparticularis medius neq; multiplex: erit ergo ditonus in proportione ſuperpatienti collocatus. quare muſicam conſonantiam (etſi in muſicis modulationibus ſit euphonus ſuauiterq; auditum feriens) nondum tamen perficit.

3 Ditoni interuallum: ſola ſeſquitonum ſuperat apotome.

¶ Nam ſeſquitonus vnum tonum continet integrum et ſecundi toni continet ſemitonium minus: ſed cum tonus ex ſemitonio minore ⁊ apotome conſtet euadatq; coalitus. ergo ſeſquitono ad ſecundi toni completionem ſola deeſt apotome. at ditonus ſolos duos incolumes integroſq; poſſidet tonos. ergo ditoni interuallum ſola apotome: ſoloq; ſemitonio maiore: ſeſquitoni ſuperat interuallum. quod eſt propoſitum.

4 Diateſſaron conſonantiam in data chorda collocare.

4	3			
A	c	d	e	b

¶ Cum enim epitrita ſeſquitertiaq; proportio: conſonantiam diateſſaron creet: idcirco data quacunq; chorda vt a b eam in quattuor equas portiones diuido. vt a c: c d: d e: ⁊ e b. et dico a b ad c b conſonare diateſſaron. Nam a b continet c b et inſuper a c que tertie parti c b equatur. eſt ergo interuallum a b ſeſquitertium ad c b. ergo a b ad c b per diffinitionem conſonat diateſſaron: ⁊ conſonantia diateſſaron in chorda a b data: collocata. quod eſt propoſitum.

5 Tritonus: conſonantiam diateſſaron tranſcendit.

¶ Nam per decimamoctauam primi tres ſeſquioctaue proportiones amplius ſunt ſeſquitertio interuallo. atqui in tribus ſeſquioctauis: per diffinitionem tres conſiſtunt toni. igitur in tribus ſeſquioctauis conſiſtit tritonus. ⁊ in epitrito: ſeſquitertioq; interuallo conſiſtit conſonantia diateſſaron. igitur conſonantiam diateſſaron tranſcendit vt proponebatur: tritonus.

6 Conſonantiam diateſſaron: duobus tonis atq; ſemitonio minore conſtare neceſſe eſt. Vnde facile comparatum eſt ſeſquitonum tono: et ditonum ſemitonio minore citra diateſſaron concentum deficere. Compertum item eſt conſonantiam diateſſaron quinq; dieſes & duo commata continere.

Diateſſaron conſonantia.			
A c			b

¶ Sit a b et c b conſonantia diateſſaron. dico eam duobus tonis ⁊ ſemitonio minore conſtare. Nam cum a b ⁊ c b ſit diateſſaron: erit a b et c b per conuerſionem diffinitionis ſeſquitertius. at cum ſemitonium minus per diffinitionem ſit id quo ſeſquitertia duobus tonis maior eſt. continet ergo a b ⁊ c b ſemitonium minus et duos tonos. igitur conſonantia diateſſaron duobus tonis: ſemitonioq; minore conſtat. Et primum correlarium hinc facile cognoſcitur. Cum enim ſeſquitonus ſolum tonum ⁊ ſemitonium minus contineat: deeſt igitur ipſi ad conſonantiam diateſſaron complendam per preſentem vnus tonus. et cum ditonus ſolum duos complectatur tonos: deerit ipſi ad eandem complendam ſemitonium minus. Secundum vero hinc haud difficile perſpicitur cognitum. Nam cum tonus per triceſimamtertiam ſecūdi duas dieſes ⁊ vnū comma contineat: duo toni quattuor dieſes ⁊ duo continebunt commata. At per preſentem diateſſaron conſonantia duobus tonis vnam dieſim ſuperaddit. continet igitur conſonantia diateſſaron quinq; dieſes atq; duo commata. quod eſt totum propoſitum.

Quinq; toni: duas diatessaron consonantias vno commate vincunt: euaduntq; maiores. **7**

Putauit Aristoxenus musicus diatessaron consonantiam duobus tonis et integro semitonio constare. & proinde duas diatessaron consonantias: quinq; tonos implere. cuius error ex tertio Musices diui Seuerini boetij et ex hac & precedente facile conuincitur. Nam per precedentem consonantia diatessaron non ex duobus tonis et semitonio integro constat: verum ex duobus tonis & semitonio minore. quod ex vicesima prima secundi inter sesquioctauam decimam et sesquinonam decimam proportionem collocatur. integrum autem semitonium per decimamquartam eiusdem: inter sesquisextamdecimam et sesquiseptimamdecimam collocaretur. diminutius est ergo semitonium minus integro semitonio. Quia ergo vt per precedentem dictum est: consonantia diatessaron duos tonos et semitonium minus continet: due igitur diatessaron consonantie continebunt tonos quattuor et duo semitonia minora. et quia per tricesimamtertiam secundi tonus continet duo semitonia minora et vnum comma. ergo due diatessaron consonantie quinq; tonos vno commate minus: continent. quinq; igitur toni: duas diatessaron consonantias vno commate vincunt atq; euadunt maiores. quod intendebatur.

Consonantiam diapente: in assignato neruo constituere. **8**

3	2		Consonantia diapēte.
A	c	d	b

Sit assignatus neruus a b supra quem iussum sit consonantiam diapente collocari: diuido a b in tres adinuicem equas partes per notas a c d b: ita vt a b tres contineat et c b earum contineat duas. erit per diffinitionem a b ad c b hemiolium: sesqualterumq; interuallum. sed cum consonantia diapente: per diffinitionē ex ea interualli ratione nascatur. ergo a b ad c b consonabit diapente. eritq; a b ad c b in data chorda assignato ve neruo consonantia diapente collocata.

Tres toni: consonantia diapente minus sunt. & quattuor eandem consonantiam transcendunt. **9**

Etsi ex quinta huius satis cognoscatur tritonum non posse efficere diapente consonantiam: hec etiā ostendit tritonum diapente consonantia esse minorem. Nam per decimamoctauam primi huius tres sesquioctaui minus sunt sesqualtero interuallo. et per decimamnonam eiusdem quattuor sesquioctaui sesqualterum superant interuallum. consonantia autem diapente in sesqualtero sita est. ergo tres toni in tribus sesquioctauis constituti. minus sunt consonantia diapente. & quattuor toni in quattuor cōsistentes sesquioctauus eā-dem consonantiam magnitudine transcendunt: quod est totum propositum.

Consonantia diapente: tribus tonis: semitonioq; minore constat. Quo fit vt a diapente subducto tono: diatessaron consonantia relinquatur. subducta autem diatessaron consonantia: relinquatur et tonus. **10**

Nam per decimamquintam primi si a sesqualtero interuallo sesquitertium demptum fuerit: relinquetur sesquioctauum. sed vt in demonstratione sexte huius visum est: sesquitertium continet duos tonos cum semitonio minore. ergo consonantia diapente sesquioctauum hoc est tonum vltra duos tonos cum semitonio minore continens: tribus tonis et semitonio minore constabit quemadmodum propositum est. Correlarium cognoscitur. Nam diapente per presentem continet tres tonos cum semitonio minore. at substracto tono residui sunt duo toni: atq; semitonium minus. & per sextam huius duo toni cum semitonio minore constituunt consonantiam diatessaron. substracto igitur tono a consonantia diapente: relinquitur diatessaron. sed & cum diapente constet ex tribus tonis cum semitonio minore: substracta ergo diatessaron consonātia que duobus tonis et semitonio minore completur: relinquetur quemadmodum secunda pars correlarij proponit: tonus. quod est totum correlarium.

Diapente consonantia: minus octo semitoniis minoribus continet. **11**

Nam cum tonus vnus duo semitonia minora et vnum comma contineat: tres toni & vnum semitonium minus septem semitonia minora & tria commata continebunt. ac tria commata per tricesimamquintam secundi huius semitonio minore sunt contractiora. ergo diapente que per precedentem tribus tonis et semitonio minore constat: minus octo semitonijs minoribus continebit. sed quemadmodum facile monstratum est diapente consonantiam nondum octauum attingere semitonium minus: octauumq; diesim: ita quoq; facile monstratu esset: eādem consonantiam nondum septimam attingere apotomē.

Diapente consonantia: ditono sesquitonoq; coniungitur. **12**

Nam diapente per penultimam tribus tonis et semitonio minore constat. et ditonus & sesquitonus simul tres tonos et semitonium minus efficiunt. igitur ditonus atq; sesquitonus pariter copulati consonantiam diapente iungunt: quod intenditur.

Consonantiarum diapente & diatessaron: tonus differentia est. quo fit vt diatessaron consonantia adiuncto tono: consonantiam diapente restituat. **13**

¶ Differentia hic vocatur ea proportio qua maior superat minorem. Nam per correlarium decime huius subducto tono a consonantia diapente relinquitur consonantia diatessaron. solo igitur tono consonantia diapente consonantia diatessaron est maior. Est igitur per diffinitionē: harum consonantiarum tonus differentia. & correlarium statim ex propositione notum est.

14 Bis diatessaron: sesquitono consonantiam diapente transcendit.

¶ Diatessaron enim per sextam huius duos tonos atque semitonium minus continet. ergo bis diatessaron quattuor tonos & duo semitonia minora continebit. atqui a quattuor tonis & duobus semitoniis minoribus dempto sesquitono: relinquuntur tres toni et semitonium minus. At vero per decimam huius consonantia diapente totidem tonos cum semitonio minore complectitur. ergo bis diatessaron: sesquitono consonantiā diapente transgreditur transcenditque quemadmodum proponitur.

15 Consonantie diatessaron ac diapente: in maximis superparticularibus sunt collocate.

¶ Nam ex diffinitione consonantia diatessaron in epitrita sesquitertiaque proportione collocatur. et diapente in hemiolia atque sesqualtera. at nulle superparticulares sesqualtera & sesquitertia sunt maiores nam a secunda & tria parte que maxime sunt sese consequentes partes denominantur. igitur he consonātie ex maximarum superparticurarium originibus ducte: in maximis superparticularibus sunt collocate quod est propositum.

16 Bis diatessaron aut bis diapente: nullam consonantiam componere potest.

¶ Hec proponit duas diatessaron consonantias aut duas diapente consonantias: nullam conflare posse cō sonantiam. Nam et diatessaron et diapente non in multiplicibus sed superparticularibus sunt constitute & per primam petitionem que intervalli ad intervallum proportio est: ea quoque est et soni ad sonū. at per sextā primi duo similia intervalla non multiplicia: neque multiplex neque superparticulare creāt intervallum. quare neque illorū soni in multiplici: neque in superparticulari genere existūt. omnis aūt consonātia aut in superparticulari aut in multiplici ratione collocanda est. sic enī consonantie nomine hoc in loco Pythagoricam sequentes autoritatem: suscepimus vtendum. ergo due consonantie diatessaron aut due diapente: nullam efficient consonantiam. et nō modo id verum sit: sed & quotquot consonantie diatessaron in immensum copulentur et quotquot diapēte: nullā vnquam consonantiam ex quinta primi huius efficere valebunt.

17 Adiuncto ad consonantiam diapente tono: nulla parabitur consonantia. item neque ad diatessaron trisemitonio.

G	11			Numerorū differētie.		T	3384			Numerorū R S differētia
E	27	F	16	Sexta maior		R	9216	S	5832	Sexta minor
C	9	D	8	Tonus		P	2304	Q	1944	Sesquitonus
A	3	B	2	Diapente		N	4	O	3	Diatessaron
						L	256	M	243	Semitonium minus
						H	9	K	8	Tonus

¶ Et si hic sonorum congressus nondum consonantia sit euphonum tamen musici reputant melo: modulaminibusque aptum: sextamque quod sex impleatur vocibus nostri nunc nūcupant. & quattuor tonis atque vna diesi hoc est semitonio minore constat. qui quod nondum consonantia sit patet. Accipio enim a & b ternariū & binarium: minimos scilicet numeros consonantie diapente. & c d novenariū atque octonarium minimos numeros toni. et duco c in a & veniat d septem supra viginti. et d in b & veniat e decem & sex. per tertiā quinti Arithmetices d ad e continet sesqualterum & sesquioctavum: quare d ad e continet diapente atque adiunctum tonum. at manifestum est d ad e 27 scilicet ad 16 non esse multiplex. nam septem & viginti non continent bis aut tertio aut deinceps sedecim. neque d superparticularis est ad e. nam differentia numeri d ad e est vndecim qui numerus summe 16 pars nulla est. transcendit enim vndenarius sedenarii dimidium. igitur adiunctus ad cōsonantiam diapente tonus: nullam parit consonantiam. et simili argumento adiecto ad consonantiam diatessaron sesquitono: nulla fit consonantia vt ex secunda figuratione perfacile patere potest. fit tamen euphona vocum congressio: quam item sextam nuncupant: sed que a prima contractior tota distet apotome. est ergo hec minor illa vero maior. constat enim prima vt dictum iam est: quattuor tonis et vna diesi: secunda vero tribus tonis & duabus diesibus. Primam sonat Parhypate hypaton ad mesen: secundam vero que contractior est: sonat hypate hypaton ad Lichanon meson. que autem hypate que parhypate: qui lichani et que mese dicantur: sequens liber declarabit.

18 Quo pacto diapason consonantia: in chorda sit adiungenda.

A	C	B	Consonantia diapason.

¶ Hec consonantiarum vt in libro Problematum testatus est Aristoteles: elegantissima pulcherrimaque est. chordam ergo a b seco per medium per notam c. et quia a b ad c b est dupla intervalli habitudo. ergo per diffinitionem a b ad c b consonat diapason.

Consonantia diapason: in sex tonis minime consistit. sed quinq; amplior: sex vero tonis: consonat contractior. 19

¶ Nam per vicesimam primi quinq; coniuncti sesquioctaui: minus duplici interuallo coniungunt. et per vicesimamprimam eiusdem sex coniuncti maiores vno duplici interuallo euadunt. ergo quinq; toni minores sunt diapason consonontia et sex eadem sunt ampliores. consonat ergo diapason quinq; tonis amplior: sed et sex eadem modulabitur inferior.

Diapason: ex diatessaron et diapente consonantiis coniungitur. 20

¶ Nam per decimamquartam huius diatessaron et diapente in maximis superparticularibus sunt collocate. at per vndecimam primi duplex interuallum ex duobus maximis superparticularibus coniungitur et duplex interuallum: consonantie diapason interuallum existit. igitur consonantiam diapason: diatessaron et diapente consonantie simul coniungunt. quod est propositum.

Consonantia diapason: quinq; tonis et duobus semitoniis minoribus que tonum minime complent: perficitur. Vnde quoq; manifestum esse potest: consonantiã diapason solo a sex tonis commate distare. 21

¶ Per precedentem enim diatessaron ⁊ diapente consonantiam diapason iungunt. diatessaron autem per sextã huius duobus tonis et semitonio minore constare monstrata est: et diapente per nonam tribus tonis semitonioq; minore. at duo toni et semitonium minus et tres toni et itidem semitonium minus simul cõflati: quinq; efficiuntur toni atq; duo semitonia minora. atqui duo semitonia minora tonum non perficiũt: verum ab eo deficiunt commate. igitur consonantia diapason quinq; tonis et duobus semitoniis minoribus: que tonum minime implent quemadmodum iam propositum est perficitur. ¶ Correlarium ex demonstrationis calce notum esse potest. Ex quo liquet perfacile esse in neruo musicum comma peruestigare. Nã in eo a principio constitutis: continuatisq; sex tonis et ab eodem nerui initio ad mediam chorde notam intensa diapason consonantia quod inter mediam nerui notam et vltimum sex tonorum signũ continetur: ex precedentis correlario erit commatis interstitium.

Dempta ex diapason consonantia diapente: relinquitur diatessaron. et ex eadem dempta consonantia diatessoron: relinquitur diapente. demptis autem ex ea diapente et tono relinquitur sesquitonus. 22

¶ Prima pars et secunda statim per penultimam cognite sunt. Item et per precedentem. Nam per precedentem diapason quinq; tonis ⁊ duobus semitoniis minoribus constat: a quibus si tres tonos et vnum semitonium minus tollas que per decimam huius diapente consonantiam continent: relinquitur duo toni ⁊ semitonium minus: que per sextam huius diatessaron consonantiam efficiunt. dempta igitur ex diapason consonantia diapente: relinquitur diatessaron: quod est primum. Secundum eadem facilitate declaratur. Nam ex quinq; tonis et duobus semitoniis minoribus si duos tonos ⁊ semitonium minus tollas: relinquuntur tres toni et semitonium minus. Tertium consimiliter. demptis enim a cõsonantia diapason hoc est a quinq; tonis et duobus semitoniis minoribus dẽptis in quam quattuor tonis et semitonio minore reliquus est tonus vnus ⁊ semitonium minus. Et quot dieses quot apotomas quot deniq; commata contineat diapason: deprehensionis sunt facillime: in nulla tamen equaliter: tota ipsa diuidua est quandoquidem diapason in multiplici ratione consistit que omnino in quotlibet equas proportiones que multiplices non sint per sexagesimam noni arithmetices diuidi non potest.

Nulla simplex cõsonantia: in duo equalia: certo cõstitutoq; numero diuisibilis est. 23

¶ Simplices consonantias vocamus diatessaron diapente diapason. de diatessaron autem ⁊ diapente constat que ex superparticularibus interuallis surgunt: que per quintam primi nullo pacto hunc in modum dirimi possunt. de diapason vero consonantia idem subit iudicium. Nam quoniam minimi eius numeri sunt duo et vnum: et duo quadratus non est: igitur per correlarium tricesimesecunde secundi huius consonantia diapason que consistit in proportione duorum ad vnum minime in duo equalia partietur. ⁊ eodem quoq; iure neq; eadem consonantia in plura duobus dimetietur: dirimeturq; equalia. Et profecto velle hoc pacto cõsonantiam diapason in plura equa diducere: est in geometricis diametrum coste quadrati velle commensurare. sed id vltimum musicum non est.

Diapason ac diatessaron: consonantiam non esse. 24

e 8		f 3		g 2
2	1	4	3	
a	b	c	d	

¶ Etsi in diapason ac diatessaron sit duarum vocum dulcis: amenaq; congressio vt quemadmodum cum pulsatur sesquitonus: non idcirco tamẽ euenit diapason ac diatessaron consonantiam dici mereri. Tametsi Ptolomeo secus q̃ Pithagoricis hac in re visum sit: quod monstratu facillimum est. Sint enim a et b binarius ⁊ vnitas: minimi scilz numeri consonantie diapason et c d quattuor ⁊ tria minimi identidem consonantie diatessaron duco c in a et veniet octonarius qui sit e: et d in b et veniet ternarius: qui sit f. per tertiam quinti Arithmetices e ad f continet duplam et sesquitertiam: quare diapason ac diatessaron.

ſed e octonarius non eſt multiplex ad f ternarium: neqꝫ ſuperparticularis ꝙ cum bis contineat et inſuper binarium qui ternarij nõ pars vlla eſt ſed partes. Eſt eñ octonarius ad ternariũ duplex ſubperbipartiẽs. Nõ eſt igitur diapaſon ac diateſſaron conſonãtia. Oĩs eñ conſonãtia aut in ſuperparticulari: aut in multiplici genere ex diffinitione conſiſtit. Et in hoc facile cognoſci poteſt ex nono Problematũ libro ꝙ Pythagoricis conſenſit Ariſtoteles: cum inquirit cur non bis diapente: aut bis diateſſaron reddi conſonantia poteſt: vt bis diapaſon coaptari ſolet. Hoc inquit ideo eſt ꝙ diapente conſonantia poſita in proportione ſeſqualtera eſt diateſſaron vero in ſeſquitertia. ꝙ ſi duo ſeſqualteri aut ſeſquitertij numeri ordine diſponantur: extremi nullam inuicem proportionẽ habebũt. neqꝫ eñ ſuperparticulares neqꝫ multiplices eſſe poterunt. at diapaſon concinẽtia qñ in duplari proportione cõſiſtit: hac geminata: quadruplam inuicem extremi tenebũt: habebũtqꝫ proportionem. Uides ergo quo pacto Ariſtoteles conſonantiarũ proportiones ſolas ſuperparticulares aut multiplices efficit: ſuperpartientes quaſi prorſus nulle ſint repudiãs. Et re verã Ptholomei cũ Pythagoricis magis in nomine ꝙ in reipſa diſſentio putanda eſt. Sed de his hactenus.

25 Diapaſon ac diapente: in triplici conſiſtit ratione, Eſtqꝫ diapaſon ac diapente conſonantia vna.

℄ Nã enim diapaſon ac diapente in tripla ratione conſiſtat: hoc ideo eſt ꝙ ex duodecima primi ex duplici atqꝫ ſeſqualtero interuallo triplex naſcitur interuallum. duplex autem ⁊ ſeſqualterum ſunt conſonantiarum diapaſon ⁊ diapente interualla. igitur iuncte conſonantie diapaſon ac diapente in tripla ratione conſiſtũt. ſed cum ſenſu iam ſatis ſit exploratum hunc concẽtum modulate: ſuauiterqꝫ ad auditum peruenire: ergo per diffinitionem is concentus conſonantia eſt. quod eſt totum propoſitum.

26 Diapaſon diapente ac tonus: melos citra conſonantiam eliciunt.

27			8
e			f
3	1	9	8
a	b	c	d

℄ Melos hic vocamus ſuauem auribus acceptam voculationem: amenũqꝫ plurium vocum congreſſum: ſed ꝙ diapaſon diapente ⁊ tonus ſimul iuncta melos conſtituunt: ſtatim notum eſt. Nam hec ſonorum voculatio ſuauiter vt experientia diſcitur auribus accidit. ſed ꝙ conſonantiam nullam paret: oſtẽditur. qñ enim per precedentem diapaſon ac diapente in tripla proportione conſiſtit. Sint ergo a b tria ⁊ vnum minimi cõſonantie diapaſon ac diapente numeri: ⁊ c d nouem ⁊ octo minimi numeri toni. duco c in a ⁊ d in b ⁊ veniãt e f 27 ſcilꝫ ⁊ 8 inter que eſt diapaſon diapente atqꝫ tonus. ſed e ad f neqꝫ ſuperparticularis neqꝫ multiplex: quinimmo e continet f ter et tres eius octauas: eſtqꝫ e ad f triplus ſupertripartiẽs octauas. non concinit igitur e f aliqua conſonantia. quod totum eſt propoſitum.

27 Bis diapaſon conſonantia: in quadruplari conſtituta reperitur habitudine.

℄ Nã eñ bis diapaſon in quadruplari cõſiſtat: ſtatim eſt manifeſtum. Nam per decimãtertiam primi duo duplicia interualla quadruplex iungunt interuallum. diapaſon aũt in duplari conſiſtit. igitur bis diapaſon quadruplarem iungit habitudinem: que eſt multiplex. ⁊ cum bis diapaſon ad auditum ſuauis: emodulataqꝫ perueniat vt id quoqꝫ ſenſu ſatis perceptum eſt. ergo per diffinitionem erit conſonãtia. qd̃ erat monſtrandũ.

℄ Pythagorici ⁊ priores muſici omnes: concentuum modum in terminis quadruple atqꝫ in finibus conſonantie bis diapaſon perſtrinxerunt: non temere longius progreſſi aut ꝙ inter illos terminos vniuſcuiuſqꝫ fact⁹ a natura reperitur ſue vocis modus: aut ꝙ ſtridulus ille canor illis vt iam quoqꝫ dictum eſt viſus eſt ꝙ ve ſeriam iam relinquunt mediocritatem: aut ꝙ hactenus contemplatio ſatis ipſis eſſe viſa eſt ad muſicam inſtitutionem. Poſteritas autem ad ter diapaſon vel ⁊ amplius adauxit ad terminos vſqꝫ octuple longius euagata: de quibus neceſſaria ſpeculatio non incumbere videtur: ſed pauca paucis ſtrinxiſſe ſatis erit. Nã qui modulationem ſupra bis diapaſon cognoſcere deſiderabunt: facili demonſtratione vt precedentia percipient. bis enim diapaſon ac diateſſaron in proportione quincupla ſeſquitertia conſiſtit. ⁊ proinde plane cõſonantia putãda nõ eſt. bis diapaſon ac diapente in proportione ſeſcupla et ideo conſonantijs annumerata. ter vero diapaſon in proportione octupla.

28 Omnes conſonantias: in data chorda ſuo ordine ſubiungere: et eas ſenſu perceptibiliter experiri.

| A c | d | e | f | g | b |

℄ Sit a b data chorda in qua propoſitum ſit conſonantias diateſſaron | diapente | diapaſon | diapaſon ac diapente | et bis diapaſon ſituare. Colloco in ſigno a brachium circini immobile et ad totius chorde quartã partem extendo circini brachiũ mobile: ⁊ in termino eius pono notã c. deinde extẽdo idẽ brachiũ ad eiuſdẽ chorde partẽ tertiã: ⁊ in termino pono d. mox ad totius chorde partẽ mediã quã deſigno nota e. deinde eodẽ brachio capio totius chorde biſſem: hoc eſt duas tertias: ⁊ in termino biſſes pono f. mox extẽdo circinũ ad chorde dodrantẽ: hoc eſt ad tres eius cõpletas quartas: in cuius fine affigo notam g. tũc ſic a b ⁊ c b per quartam huius cõſonat diateſſaron. a b ⁊ d b per octauã diapẽte a b ⁊ e b per decimãoctauã diapaſon a b ⁊ f b per viceſimãquintã diapaſon ac diapẽte. poſtremo vero a b ⁊ g b per precedentem bis diapaſon. Suppone igitur muſicale hemiſpheriũ ſenſim ſingulis chorde notis ⁊ ſonos ad totius chorde ſonũ diligẽter attẽde. et ſuo ordine ꝓpoſitas cõcinẽtias annotabis. quod promptius experiri valebis: ſi chorde a b chordã equiſonam: vniſonamqꝫ etiã collocaueris: cuius ſonum cum ſingulis ſectionũ a b percuſſionibus non ſegniter attenderis.

Consonantiarū hoc pacto digestarum: finis consonantie diatessaron: ad finem diapente sonat tonum: ad finem diapason: consonat diapente. ad finem diapason ac diapente: inconsonus. ad finem vero bis diapason: consonat diapente ac diapason. 29

a	c	d	e	f	g	b

¶ Sint a|c|d|e|f|g| b modo qui dictus est digeste consonantie: dico c b finem consonantie diatessaron ad d b sonare tonum |ad e b esse diapente |ad f b inconsonum esse |ad g b vero cōsonare diapente ac diapason. Nam per precedentem a b ⁊ c b est diatessaron et a b et d b diapēte. dempta ergo a b ⁊ c b diatessaron consonantia ab c b ⁊ d b diapente: per correlariū decime huius relinquitur tonus. quod aūt relinquitur est c b ⁊ d b: igitur c b ad d b sonat tonum. ⁊ qm̄ per precedentē a b ⁊ e b cōcinit|modulaturq; diapason: substracta igitur a b et c b diatessaron ab a b et e b per vicesimāsecūdā huius quod relinquitur est diapente. atqui quod relinquitur est c b et e b: igitur c b ad e b cōsonat diapente. ⁊ quia per precedentem a b ⁊ f b consonat diapason ac diapente: subducta igitur a b ⁊ e b consonātia diapason: quod relinquitur est diapente. quod aūt relinquitur est e b ⁊ f b. igitur e b ⁊ f b consonantia est diapente. sed per modo monstratum c b ⁊ e b etiam diapente est: igitur c b ⁊ f b est bis diapente. At per decimāquartā huius bis diapente consonantia componi non potest: igitur c b ad f b incōsonus est. Postremo qm̄ vt ex precedēti notū est a b ⁊ g b dcsonat bis diapason. dēpta igitur a b ⁊ e b diapason consonantia relinquitur e b ⁊ g b esse diapason. atqui c b ⁊ e b per secūdam partem huius monstrata est esse diapente. igitur adiuncta c b ⁊ e b consonantia diapente ad e b ⁊ g b constituitur diapente ac diapason. consonat ergo c b ⁊ g b diapente ac diapason. quod est totum propositum.

Si positis consonātiis: finis diapente ad finem diapason modulatur diatessaron: & ad finem diapason ac diapente: modulatur diapason. ad finem vero bis diapason euphonus est: sed qui nondum consonantia est. 30

a	c	d	e	f	g	b

¶ Esto precedentiū hypothesis: dico d b finem diapente ad e b consonare diatessaron. ad f b diapason. ⁊ ad g b sonare diatessaron ac diapason. Nam per penultimam a b et e b consonantia est diapason. ⁊ a b et d b diapente. substracta igitur a b ⁊ d b diapente: ab a b ⁊ e b consonantia diapason: per vicesimāsecūdam huius relinquitur diatessaron. quod aūt relinquitur est d b et e b: igitur d b ad e b cōsonat diatessaron. ⁊ quia in precedenti monstratum est e b ⁊ f b esse diapente: ⁊ nunc d b et e b esse diatessaron: ergo per vicesimam huius d b ⁊ f b ex illis duabus conflata: coalitaq; consonantia modulabitur diapason. Rursum cum e b ⁊ g b in precedenti monstrata sit diapason: et e b ⁊ f b diapente: ergo per vicesimamsecūdam huius f b ⁊ g b est diatessarō: ⁊ d b et f b nunc monstrata est diapason. igitur d b ⁊ g b est diapason ac diatessaron: que cum modulatio sit euphona ⁊ eam monstrauerit vicesimaquarta huius non esse consonantiā: totū liquet monstratū propositū. et ex hac quoq; pariter cognitum est finem diapason: ad finem diapason ac diapente modulari diapente vt e b ad f b ⁊ ad finem bis diapason consonare diapason.

Consonantiarum sic collocatarum: totius chorde atq; cuiusq; sectionis numeros designare. 31

24	18	16	12	8	6	
a	c	d	e	f	g	b

¶ Duco duo |tria| et quattuor in seinuicem: et numerum inde surgentem atq; productum qui habebit secūdam tertiam ⁊ quartā: pono totius lince numerum quē idcirco voco numerum a b. ab quo demo quartam partem ⁊ reliquus sit c b: ⁊ erit primus numerus ad ipsum sesquitertius. quare diatessaron. et ab eodem numero demo partem tertiam ⁊ residuus sit d b: eritq; a b ad d b sesqualter: quare consonantia diapente. et iterum ab a b diduco partem mediam et residuus sit e b: eritq; a b ad e b duplus. quo circa diapason consonantia inter eos exurget. ⁊ numeri a b sumo solam tertiam que sit f b. erit ergo a b ad f b habitudo tripla continebunt igitur a b et f b diapason ac diapente. Rursum numeri a b sola quarta sit g b: erit a b ad g b quadruplus. quare a b et g b sunt numeri bis diapason. Sunt itaq; totius chorde a b ⁊ cuiusq; sectionis eius secundum assignatas consonantias designati numeri. quod erat demonstrandum.

Quotcunq; harmonicas medietates assignare: inter quarū terminos eorūq; differentias omnes musice reperiantur consonantie. 32

Harmonice	12	8	6		Epitritus	b c	Diatessaron
Medietates	6	4	3		Hemiolus	a b	Diapente
	a	b	c		Duplaris	a c	Diapason
Differentie		2	1		Triplaris	c e	Diapason diapēte
		d	e		Quadruplaris	b e	Bis diapason.

¶ Harmonica medietas in Arithmeticis diffinita est qñ triū terminorū vt maxim⁹ ad minimū: ita differentia maiorū ad differentiā minorū. Sit ergo c quicūq; numerus partem tertiā habens que sit e: duplo c. sitq; duplatus a. manifestum est a ad c esse duplum. ⁊ quia cōtinet tria e: ipsum a cōtinet sex e. addo e ad c ⁊ fiat b

et erit notum b ad e esse sesquitertium: et b continere quattuor e atq; esse differentiam b ad c. Itidem quia b cõtinet quattuor e et a cõtinet sex e: a erit sesqualter ad b. et quia b equatur quattuor e et a sex: ergo differẽtia a ad b equatur duobus e que sit d. quia eiũ d equatur duobus e: ergo d duplus est ad e. dico ergo a b c datam esse harmonicam medietatem. inter cuius terminos a b c et eorũ differẽtias d e oẽs musice consonãtie reperiantur. nam a ad b maximi ad minimũ mõstrata est proportio esse dupla et similiter habitudo d ad e differentie scilz maiorũ ad differentiã minorũ etiã ostensa dupla. sunt igitur per diffinitionem a b c termini in harmonica medietate cõstituti. At si b ad c cõpares mõstratus est sesquitertius: quare cõsonantie diatessaron interuallum. et si a ad b: mõstratus est sesqualter atq; hemiolus et diapente interuallum. et si a ad c: duplum habes et consonantiã diapason. si vero c ad e cõtuleris: habes triplum: et per vicesimãquintã tertij consonantiã compositam diapason ac diapente. et si b ad e: quadruplum: et per vicesimamseptimam tertij bis diapason. At cum cetera monstrata sint non esse consonantias: constat diatessaron| diapente| diapason| diapason ac diapente: et bis diapason omnes cõsonantias quibus in disciplinis se exercere solent musici: inter terminos harmonice medietatis et eorũ differentias: fuisse repertas. et si duxeris binarium in a b c et in illos qui inde prouenerint et quoties volueris in prouenientes: ex septima secũdi Arithmetices cognoscere promptum est toties cõstituti harmonicã medietatẽ cõsimiles inter suos terminos et suorũ terminorũ differentias: cõsonãtias musicas seruantẽ. et idẽ fuerit si quẽcunq; alterum numerum in illos terminos duxeris. placuit tamẽ diuo Seuerino quadragesimo octauo capite secundi sue Arithmetices ad oẽs consonantias musicas cõplectendas: duas ordinare medietates harmonicas: vnam in duplari et alteram in triplari. sed et idem etiã fieri posse vna sola constituta iam satis monstratum arbitramur.

33 Quotlibet maximas harmonias quarum quelibet primordium consonantiarũ: consonantiasq; contineat omnes: constituere.

Maxima har.	24	18	16	12			
Maxima har.	12	9	8	6	Epogdous	b c	Tonus
	a	b	c	d	Epitritus	a b	Diatessaron
Differentie	3			3	Hemiolus	a c	Diapente
	e			f	Duplaris	a d	Diapason
Differentie		4		2	Triplaris	d h	Diapason diapente
		g		h	Quadruplus	c h	Bis diapason.

¶ Maximam harmoniam vocant quãdo quattuor solidorũ terminorũ in geometrica medietate constitutorum: inter maximũ vnũ mediorũ et minimũ medietas Arithmetica cõtinetur: et rursum inter maximũ terminorũ alterũ mediorũ et minimũ cõtinetur harmonica. Medietas geometrica est qñ terminorũ est proportionum similitudo. Arithmetica vero quãdo terminorũ est differẽtiarũ equalitas. quid harmonica iam dictũ est. Solidi termini dicũtur qui ex triũ in se laterum ductu producũtur. sed hec oĩa ex Arithmeticis ꝙ notissima sunt. Primordiũ consonantiarũ appellamus tonum. ¶ Capio ergo d numerũ quẽcũq; qui secundã et tertiã habeat: sitq; eius secunda f et tertia h. duplo d et sit duplatus a: quiquidem a duplus erit ad d. addo h ad d sitq; cõpositus c. eritq; sesquitertius ad d. sed et cũ a monstratus sit duplus ad d: ergo per vndecimam primi huius a ad c est sesqualter. Preterea f secũdã partem d addo ipsi d et cõpositus sit b: certũ est b ad d esse sesqualterum. quare per eãdem vndecimam primi a ad b est sesquitertius. Ab a c igitur qui mõstratus est sesqualter: ablato a b sesquitertio per quintãdecimã primi relinquitur b ad c sesquioctauus. Sit preterea g differentia a ad c: quia d cõtinet tria h: c cõtinebit quattuor et a sex. ergo g differẽtia a ad c cõtinet duo h: est itaq; g ad h duplus. et quia f est medietas d: et b est sesqualterum ad d: ergo b continet tria f. est itaq; f tertia pars b: sed et a sesquitertius ad b addit super eũ tertiã partem ipsius b: ergo differẽtia a ad b que sit e equatur f. dico ergo a| b| c| d| maximã cõstituere harmoniam: que tonũ consonantiarũ elementum| et oẽm cõplectitur cõsonantiam. Nam a ad b mõstratus sesquitertius et similiter c ad d sesquitertius. cõtinẽt igitur a ad b et c ad d per diffinitionem geometricam medietatem. et differẽtia a ad b maximi ad vnũ mediorũ est e| et b ad d eiusdẽ medij ad minimũ est f| et e et f mõstrate sunt equari. igitur per diffinitionem a ad b et b ad c constituũtur in Arithmetica medietate. sed et a ad d maximus ad minimũ mõstratus est duplus. et similiter g differẽtia a ad c maximi ad reliquũ mediorũ demõstrata dupla ad h differentiã c ad d eiusdẽ medij ad minimũ. igitur per diffinitionem a c d cõsistunt in harmonica medietate. Cõstat igitur per diffinitionem a| b| c| d si solidi sint constituere maximã harmoniam. ꝙ si solidi non sint: duc quẽcũq; numerũ in quẽlibet ipsorũ et prouenient solidi in eisdem habitudinibus quorũ cuiuslibet latera erunt vnitas| numerus in illos ductus et singuli eorum ad singulos: sicq; cõstabit maximam constitutam esse harmoniam. sed iam ostensus est b ad c sesquioctauus: igitur per diffinitionem b ad c continet tonum consonantiarum primordium. et a ad b est sesquitertius. igitur a ad b cõtinet diatessaron. et a ad c monstratus est sesqualter: igitur a ad c continet diapente. et a ad d duplus: igitur a ad d diapason. et d ad h triplus: igitur d ad h diapason ac diapẽte. et c ad h monstratus quadruplus igitur c ad h continet bis diapason. et quoties duxeris quemcunq; numerum in a| b| c| d aut in productos ex illis adiuuante septima secundi Arithmetices et diffinitionibus: toties constitues maximam harmoniã tonum et omnes consonantias continentem. est igitur effectum quod proponebatur. Et ex hac intelligere potes esse demonstratum que diuus Seuerinus affert de harmonia cubi quadragesimonono| et de maxima harmonia quinquagesimoquarto capite secundi sue Arithmetices.

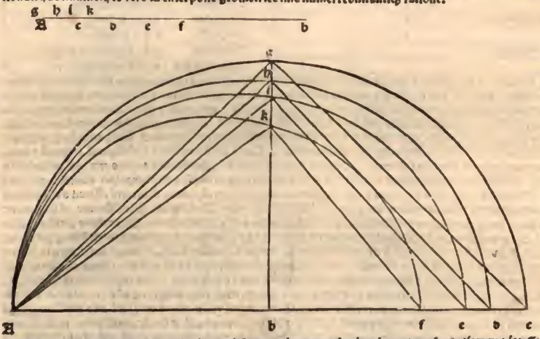
34 Omnis numerus ternaria progressione ad se adiectus: omnem consonantiam in Arithmetica medietate complet.

Cõsonãtie i Arithmetica medietate					A pria vnitate					A scda vnitate					A tertia vnitate			
3	6	9	12		1	2	3	4		10	20	30	40		100	200	300	400
duplus diapason		sesqterti⁹ diates.			duplar		epitrit⁹			diapas.		diates.			diapason		diatessa.	
	sesqualter diapẽte					hemiol.					diapẽ.					diapente		
Triplus. diapason diapen.					Triplaris					diapa. diap.					diapa. diapente			
Quadruplus. bis diapason					Quadruplaris.					Bis diapason					Bis diapason			

¶ Intelligitur ternaria progressione ad se addi numerus quando additur primo ad se semel: deinde bis: deinde ter. Dico ergo quẽcunq̧ numerum ad se hoc pacto additum: omnem cõstituere consonantiã musicã. Nam semel sibi adiectus: duplex ad se efficit: ⁊ diapason consonantiam. et bis sibi additus: ad primã additionem sesqualterum cõstituit ⁊ diapente: ⁊ ad se triplũ atq̧ diapason ac diapente. nam in prima additione bis: ⁊ in secũda ter cõtinetur. ter vero sibi additus ad secũdã additionẽ facit sesquitertiũ ⁊ diatessaron: nã primus numerus hic quater: illic vero ter continetur. ⁊ ad se quadruplum facit et bis diapason. in hac igitur progressione omnis continetur consonantia musica. et quia continue numerorum ex eius additione surgentium ipse numerus additus est differẽtia: ergo reperte consonantie in Arithmetica medietate continentur. et ex hac cognoscitur cur in omnium vnitatum quaternaria progressione que vbiq̧ denariũ Pythagorici plenitudinem implet: omnes consonantie musice et in Arithmetica quidem medietate reperiantur.

Tonum et omnem consonantiam simplicem: in duo equa partiri: veraq̧ medietatum puncta: geometrice monstrare. 35

¶ Precedentes septima secũdi: ⁊ vicesimatertia tertij pretendũt tonũ: diatessaron: diapante ac diapason in duo equa diuidi non posse. Hec vero monstrat quo pacto ea omnia possint in duo equa partiri. nec hoc quidẽ repugnat. Nam precedentes contendunt id effici non posse Arithmetice certo constitutoq̧ numero atq̧ rationali habitudine: hec vero id effici posse geometrice sine numeri constantiq̧ ratione.



¶ Sit ergo data chorda a b superior in qua iubeamur integrum semitonium: et consonantiarum diatessaron: diapente ac diapason vera media reperire. Facio a b ⁊ c b tonum. a b et d b diatessaron. a b ⁊ e b diapente. a b et f b diapason eo qui in precedentibus monstratus est modo. Deinde in inferiori linea a c indefinite quãtitatis capio a b equalem linee superiori a b. ⁊ b c continue equalem linee b c superiori. et a puncto b versus c: capio lineam b d equalem chorde b d. et b e equalem chorde b e. et b f chorde b f. et intelligo quatuor dimidios circulos a c|a d|a e|a f. et a puncto b educo perpendicularem linee a c ad circumferentias semicirculorum a c|a d|a e|a f. et puncta vbi eos contingit linea sint g|h|i|k: ad que puncta educo a g|c g|a h|d h|a i|e i|a k|f k. at per nonã sexti geometrie a b ad b g vt b g ad b c. Facio igitur in chorda superiore a b lineam b g equalem inferiori linee b g et cum proportio a b ad g b vt g b ad c b vt preostensum est: sequitur tonum a b ⁊ c b esse in duo equa diuisum: ⁊ punctum g esse medium veri semitonij signum. et per eandem que proportio a b ad b h ea sit b h ad b d. Esto igitur h b in chorda a b equalis linee b h per idem vt prius: ea erit proportio a b ad h b que h b ad d b. quare a b et d b diatessaron in duo equa partita est. et eodem pacto facta chorda i b superiori equali linee b i. et chorda k b equali linee b k: monstrabis con-

sonātias diapente ꝛ diapason in duo equa esse partitas: ꝛ re vera hoc pacto vera schismata atq; diaschismata: et dieses tetrartemerias reperias assignatis comatis: dieseos: atq; completi semitonij internallis et sumptis vt in precedentibus factum est medijs proportionalibus chordis. sed hec statim aliquātulum in geometricis exercitatis nota esse possunt. Hec autem posteaq̄ repereris disce (si libet) per chordam in voce toni mediare et semitonium: ꝛ quācunq; voles in arte musica consonantiam.

¶ Tertij Elementorum Musices Finis.

Armonica regula instrumentum est: quo cum (rationis adhibito iudicio) consonantie: consonantiarumq; partes: in chorda perquiruntur. Melorum tria sunt genera: Diatonicum: Chromaticū: Enarmonicum: Diatonicum genus: melos est cuius partitio per semitonium minus & duos tonos cōtinue procedit. Chromaticum: quod per duo inequalia semitonia & trihemitonium conscendit. Enarmonicum vero: quod per duas dieses conscendit & ditonum. Diesis hoc in loco semitonii minoris medietas est: ex differentie extremorum habitudinis eius: partitione prouenies: que & tetrartemeria dicta est. sed vt earū semper maior que acutior et minor que grauior: reperiatur necesse est. Voces: nerui: chorde: spacia: hoc ordine a graui in acumē nitentia in vnoquoq; melorum genere sunt nuncupata.

Grece nuncupationes	Nuncupationes latine.
Proslambanomenos	Acquisitus
Hypate hypaton	Principalis principalium
Parhypate hypaton	Subprincipalis principalium
Lichanos hypaton	Index principalium
Hypate meson	Principalis mediarum
Parhypate meson	Subprincipalis mediarum
Lichanos meson	Index mediarum
Mese	Media
Trite synezeugmenon	Tertia coniunctarum
Paranete synezeugmenon	Penultima coniunctarum
Nete synezeugmenon	Vltima coniunctarum
Paramese diezeugmenon	Submedia disiunctarum
Trite diezeugmenon	Tertia disiunctarum
Paranete diezeugmenon	Penultima disiunctarum
Nete diezeugmenon	Vltima disiunctarum
Trite hyperboleon	Tertia excellentium
Paranete hyperboleon	Penultima excellentium
Nete hyperboleon	Vltima excellentium.

Monochordum: est quod vnica chorda continet modulationem. Tetrachordum: quod chordis quattuor. Polichordū vero: quod pluribus chordis id continet q̄ quattuor. vt pentachordū: quod quinq;. hexachordum: quod sex. et ita de Heptachordo: Octochordo: Ennachordo: Decachordo: Endecachordo: Dodecachordo: Tridecachordo: Tessaradecachordo: & Pentadecachordo est intelligendum: quod vltimum omnino quindecim constat chordis. Proslambanomenos: est in vnoquoq; genere: primo tetrachordorū grauissimus neruus adiūctus: a pximo primi tetrachordi neruo: toni interuallo distās. Tetrachordū coniunctum: est cuius principiū est precedētis tetrachordi finis. Disiunctū vero: cuius primordialis neruus in vnoquoq; melorum genere: a proximo precedentis tetrachordi finali neruo: vno tono disiungitur.

Tetrachorda sunt quinq̃: Tetrachordum hypaton: Tetrachordum meson: Synezeugmenon: Diezeugmenon: Hyperboleon.

Tetrachordon hypoton est:	Tetrachordum synezeugmenon.
Hypate hypaton	Mese
Parhypate hypaton	Trite synezeugmenon
Lichanos hypaton	Paranete synezeugmenon
Hypatę meson	Nete synezeugmenon
Tetrachordum meson est	Tetrachordon diezeugmenon.
Hypatę meson	Paramese diezeugmenon
Parhypate meson	Trite diezeugmenon
Lichanos meson	Paranete diezeugmenon
Mese	Nete diezeugmenon

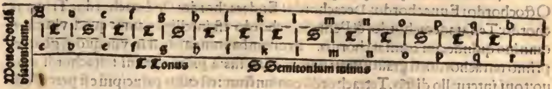
Tetrachordum hyperboleon
Nete diezeugmenon
Trite hyperboleon
Paranete hyperboleon
Nete hyperboleon

Modum hic vocamus remissionem aut intensionem omnium tetrarchordorum gradatim in aliquo genere melorum: sui generis progressionem seruans.

Modi sunt septem.	
Primus Hypodorius	1
Secundus Hypophrygius	2
Tertius Hypolydius	3
Quartus Dorius	4
Quintus Phrygius	5
Sextus Lydius	6
Septimus Mixolydius	7

Monochordi regularis partitionem: in diatonico genere demonstrare.

¶ Qualis instrumenta musices q̃plurima reperiãtur vt Cithare: Tibie: Tube: Litui: Multiforatiles: Fistule: Dextre: Leue: Simplices: Duplices: in quibus vno spiritu animandis vt inquit Apuleius. fertur Hiaguis Lydorum rex Marsieq; pater primus in canendo manus discapedinasse: preterea vt Pelic: Chordaciste. Sambuci: Hydraule. Nabilie: Psalteria: Magades: Barbiti: Nanla. Pentadec: Comus: Heptagona. Mele: Testudo: Barbati: Plectra: Monochorda: Tetrachorda: Polychorda: et cetera id genus musica instrumenta. Placuit tamen philosophis in Monochordis; Tetrachordis: atq; Polychordis monstrandis: ceterorum nos intelligere rationem: atq; compositionem. quo circa vt de Monochordorum & Tetrachordorum compositione intelligemus: ita de reliquis est intelligendum. nunc ergo ad Monochordi regularis nos ostensionem conuertamus.

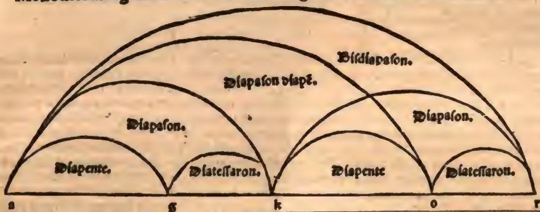


¶ Monochordũ igitur regulare idcirco dicitur q in vnico neruo musice consonãtie harmonica regula peruestigetur. Sit ergo a b chorda in qua volumus in diatonico genere consonantias regulariter collocare.

Recipio c planissimam regulam: nullaq; ex parte subsultantem: equalem linee a b. et per primam et decimā octauam secundi huius ab c in d intendo tonum: et ab d in e semitonium minus. et ab e in f ⁊ f in g intendo duos tonos. et ab g in h semitonium minus. ab h in i et i in k duos tonos. Rursus ab k in l tonum. et ab l in m semitonium minus. ab m in n et n in o duos tonos. ab o in p semitonium. ab p in q et q in r duos tonos ita q continue semitonio minori subiuncti sint duo toni: demptis c d qui ꝓ proslābanomeno primo semitonio prepositus est tonus: et k l tono qui tetrachordi diezeugmeni hoc est disiuncti principium est. Rursum applico totam regulam harmonicam c r toti chorde a b. ita vt c sit cum a | et r cum b. et in chorda a b vbi applicantur d | e | f | g | ⁊ relique sectionum regule note: signo d | e | f | g | h | i | k | l | m | n | o | p | q. et dico monochordum a b esse in genere diatonico regulariter diuisum. Quoniam enim sua interualla interuallis regule c r respondent: euaduntq; equalia a b et d b sonat tonum et d b et e b semitonium: et iterum e b et f b tonum cōtinet. igitur a b et f b duos tonos ⁊ semitonium minus continens: per sextam tertij consonat diatessaron. Et quia f b et g b vt in regula continet tonum. et g b ⁊ h b semitoniū minus. et h b: i b. ⁊ i b ⁊ k b duos tonos. ergo per decimam tertij f b ⁊ k b tres tonos semitoniumq; minus continens concinit diapente. Sed et monstratum est a b ⁊ f b modulari diatessaron: ergo per vicesimam tertij a b et k b quod ex consonantijs diatessaron ⁊ diapente consurgit coalitum: consonat diapason. Rursus k b et l b sonat tonum | l b et m b semitonium minus m b ⁊ n b et o b duos tonos: quare k b ⁊ o b tres tonos ⁊ semitonium minus cōtinens: per decimam tertij consonat diapente. Sed a b et k b monstrata est diapason consonantia: ergo a b ⁊ o b consonat diapason ac diapente. Preterea quia o b ⁊ p b semitonium est et p b ⁊ q b et b duo toni: ergo o b et b cōcinit diatessaron. k b igitur et b ex diapente: diatessaronq; constans: per vicesimam tertij consonat diapason. At vero a b ⁊ k b itidem monstratum est concinere diapason. ergo a b ⁊ b concinunt bis diapason. Et quia hec monochordi partitio per semitonium ⁊ duos tonos facta processit: et ee que modo monstrate sunt consonantie harmonice regule suffragio peruestigate: ergo monochordi regularis partitio in genere diatonico per diffinitionem monstrata est. quod est propositum.

ii

Monochordi regularis constitutionem: in genere chromatico declarare.



Monochordi Chromatici.

a d e f g h i k l m n o p q b

T | S | A | TA | S | A | TA | T | S | A | TA | S | A | TA

c d e f g h i k l m n o p q r

T. Tonus. S. Semitonium. A. Semitonium maius. TA. Trihemitonium.

¶ In omni Monochordo: atq; Polychordo hec obseruatur proprietas vt octaua modo nota: modo chorda prime: ⁊ decimaquinta octaue: in consonātia diapason recrepet. et vbiq; pro proslambanomeno preiungitur tonus: interseriturq; vbiq; inter mesen atq; paramesen pro concentu disiūcto tonus. hoc est in monochordis a prima nota in secundam et ab octaua in nonam collocatur tonus. Sit ergo a b vt prius chorda in qua volumus consonantias in genere chromatico regulariter reperire. capio c r regulā planissimā et illi assignate chorde equam. facioq; per primam secundi huius c d tonum: et per decimamoctauam eiusdem d e semitonium minus: ⁊ iterū per primam d f toni interuallum. erit ergo e f semitoniū maius: et d e et e f duo semitonia: sed ⁊ ab f ad g metior tonum ⁊ semitoniū minus: que equa erūt trihemitonio: et g h et h i facio duo semitonia: minus scilz atq; maius ⁊ i k extēdo ad toniū ⁊ semitoniū minus. Simili quoq; pacto k l fiat tonus: ⁊ l | m | n duo semitonia: et n o trihemitoniū. ⁊ iterū o | p | q duo semitonia: q r vero trihemitonium. Et regulam hoc pacto diuisam applico ex equo linee a b: et in linea a b signo cōsimiles ⁊ cōsimilibus distantijs notas: scilz a | d | e | f | g | h | i | k | l | m | n | o | p | q | b. quo peracto dico lineam a b esse regulariter in melodia chromatica diuisam. Nā c d onus ⁊ d f tonus ⁊ f g tonus ⁊ semitoniū minus. quare a ⁊ g continent tres tonos ⁊ semitoniū minus. ergo per decimā tertij a ad g cōsonat diapente. ⁊ quia g h i continēt tonum: ⁊ i k trihemitoniū: igitur g ad k duos tonos ⁊ semitonium minus cōtinens per sextam tertij modulatur diatessaron. sed et a g probata est diapēte: ergo a k cōstans ex a g et g k diapēte ⁊ diatessaron per vicesimam tertij cōcinit diapason. Et penitus eadem ratione probaueris k o consonare diapente: et k b diapason. quare a o diapason ac diapente ⁊ a b recrepabit bis diapason: quam consonātiam nos transcendere Pythagoricorum vetat autoritas. qui tamē volet vlterius conscēdere ex his que iam demonstrata sunt ⁊ que postea demonstranda suscipientur: facile

conſcendet. Et cum iam monſtrata partitio per ſemitonium ⁊ ſemitonium et trihemitonium proceſſerit: niſi vbi integer adiectus eſt tonus vt tum diapaſon: tum concētus diſiuncti ſeruetur proprietas. Patet ergo ex diffinitione factum eſſe quod in chromatico genere proponebatur faciendum atq; propoſitum.

Idem: in enarmonico genere regulariter oſtendere. 5

A							Monochordum Enarmonicum.							b
T	D	D	TT	D	D	TT	T	D	D	TT	D	D	TT	
c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r
			D. Dieſis tetrartemeria.							TT. Ditonus.				

Sit vt prius chorda a b et c r regula eidem vt in ceteris equa: ab puncto c ad d extendo tonum: et ab d ad f ſemitonium minus: et ſpacium d f partior in equalia per notam e. eruntq; d e f due dieſes. et f g facio duos tonos: qui ditonum implent. g h i vt prius duas dieſes. i k ditonum. k l tonum. l m n duas dieſes. n o ditonum. o p q duas dieſes. et q r ditonum. quam regulam hoc pacto partitam equaliter applico linee a b: et ſimiles notas: equaliaq; interualla in linea a b deſigno per medias inter a ⁊ b litteras d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p|q|b. et quia a d tonus: ⁊ d e f due dieſes ſemitonium minus implentes: et f g ditonus: ergo a g tres toni ⁊ ſemitonium minus per decimam tertij ſonant diapente. ſed ⁊ g h i due dieſes et i k ditonus duos tonos et ſemitonium minus continentes: per ſextam tertij ſunt diateſſaron. igitur vt prius per viceſimam tertij a k cōtinet diapaſon. ⁊ hoc pacto monſtretur k o continere diapente et k b diapaſon: quare a o conſonare diapaſon ac diapente: et a ad b conſonare bis diapaſon. et quia hec modulationis progreſſio per duas dieſes et ditonum procedit: conſtat per diffinitionem monochordum enarmonicum regulariter eſſe partitum: in eoq; muſicas ſituatas eſſe conſonantias et propoſitum.

Tetrachordum hypaton: in diatonico melo diuidere. 4

Proſlambanomenos	A	A				
Hypate Hypaton	b	T	B			
Parhypate Hypaton	c	S		C		
Lichanos Hypaton	d	T			D	
Hypate meſon	e	T				E

Superiores: Monochorda docuerunt ordinare. Inferiores autem: Tetrachorda: Pētachorda: Hexachorda et alia queq; Polychorda ad Penthadecachordum vſq;: quibus cognitis cetera que amplius deſiderarentur cognoſcentur facillime. Conſtituo ergo b c d e tetrachordum hypaton: ita vt b ſit hypate hypaton | c parhypate hypaton | d Lichanos hypaton | e Hypate meſon: cui preiungo ad grauitatis partem a Proſlambanomenon chordam quidem que in tetrachordis non computatur: ſed primo adiecta tetrachordo creat penthachordum. facio ergo interuallum chorde a ſeſquioctauum ad chordam b| ⁊ ſeſquitertium ad chordam d| ⁊ ſeſqualterum ad e. Item facio c ad d ſeſquioctauum. dico ergo tetrachordum hypaton in genere diatonico (vt dictum eſt) eſſe diuiſum. Nam per diffinitionem a ad b proſlambanomenos ad hypaten hypaton: erit tonus. et quia a ad d ſeſquitertium eſt: itidem per diffinitionem proſlambanomenos ad lichanon hypaton concinit diateſſaron. ſed et cum a ad e proſlambanomenos ad hypaten meſon ſit ſeſqualterum: per idem a ad e conſonat diapente. per decimamtertiam igitur tertij d ab e lichanos hypaton ab hypate meſon tono diſiungitur. Rurſum quia c ad d ſeſquioctauum eſt: ergo c ad d ſonat tonum. at vero quia a ad d diateſſaron eſt: ⁊ a b tonus eſt| ⁊ c d tonus: igitur per ſextam tertij b ad c relinquitur ſemitoniū minus. Eſt itaq; hypate hypaton ad parhypaten hypaton ſemitonium minus. et parhypate hypaton ad lichanon hypaton tonus: lichanos hypaton ad hypaten meſon tonus. Cōſtitutum eſt ergo b|c|d|e tetrachordum hypaton: per ſemitonium minus ⁊ duos ſubiunctos tonos procedens: per diffinitionem in genere diatonico pariter ⁊ pētachordum a|b|c|d|e. Sed incidit dubitatio forſan: cur noſtra tempeſtate muſici duos tonos ad tetrachordorum partem ſeriem| grauemq; prelocant: nos autem ſolum tonum qui eſt proſlambanomeni atq; hypates hypaton: reſponſio peruia| in promptuq; eſt muſicos noſtra tempeſtate proſlambanomeno alteram chordam tono diſtantem prefixiſſe et id primum memorant Gregorium factitaſſe.

In eodem diatonico melo: tetrachordum meſon ſubiungere. & in octochordo: a proſlambanomeno in meſen: diapaſon contineri. 5

Proſlambanomenos	A	A								
Hypate Hypaton	b	T	B							
Parhypate Hypaton	c	S		C						
Lichanos Hypaton	d	T			D					
Hypate Meſon	e	T				E				
Parhypate Meſon	f	S					F			
Lichanos Meſon	g	T						G		
Meſe	h	T							H	

Sit e|f|g|h tetrachordum meſon. facio e ſeſquitertium ad h| et g ſeſquioctauum ad h| et f ſeſquioctauum ad g: erit ergo per diffinitionem e ad h hypate meſon ad meſen diateſſaron. et quia g ad h tonus et ſimiliter

f ad g tonus. nam vtrumq; ex sesquioctaua proportione nascitur. ergo per sextam tertij e ad f erit semito- nium minus. est itaq; e|f|g|h tetrachordum meson per semitonium minus ⁊ duos tonos procedens in ge- nere diatonico diuisum. et quia a e proslambanomenos ⁊ hypate meson in precedenti monstrata sunt conso nare diapente: et in presenti e h hypate meson ⁊ mese diatessaron. ergo per vicesimam tertij: proslambano- menos ad mesen consonat diapason. continet igitur octochordum a|b|c|d|e|f|g| h consonantiam diapason. quod est totum propositum.

6 Preposito octochordo: in eodem genere tetrachordum disiunctarum submittere. & dodecachordum diapason ac diapente continere.

Proslambanomenos	A	A
Hypate hypaton	b	b
Parhypate hypaton	c	c
Lichanos hypaton	d	d
Hypate meson	e	e
Parhypate meson	f	f
Lichanos meson	g	g
Mese	h	h
Paramese diezeugmenon	k	Trite coniunctarum k
Trite diezeugmenon	l	Paranete coniunctarū l
Paranete diezeugmenon	m	Nete coniunctarum m
Nete diezeugmenon	n	n

¶ Sit k l m n tetrachordum diezeugmenon quot et disiunctarum dicitur. facio h ad k mesen ad paramesen disiunctarū sesquioctauā. et ad m paraneten disiunctarum sesquitertiam. ad n vero netē disiunctarū sesquialte ram. deinde l ad m triten ad paranetē facio sesquioctauam: sic ergo mese ad paranetē disiunctarum concinit diatessaron et ad neten diapente. Est ergo per decimamtertiam tertij m ad n paranetes ad neten toni inter- uallum. et l ad m trites diezeugmenon ad paranetē similiter tonus est. sed ⁊ cum mese ad paranetē conso- net diatessaron et l ad m sit tonus ⁊ similiter h ad k tonus: ergo per sextam tertij k ad l erit semitonium mi- nus. erit itaq; paramese ad triten diezeugmenon semitonium minus: trite ad paraneten tonus: et paranete ad neten diezeugmenon consimiliter tonus. quare tetrachordum disiunctarum superiori octochordo in dia tonico genere subiunctum est. Et cum precedens monstrauerit a h esse diapason et presens h n esse diapente: igitur a n proslambanomenos ⁊ nete diezeugmenon in dodecachordo a b c n continent diapason ac diapē te. Qd si in molliori canendi modo: tetrachordum a chorda mese coniunctum partiri: cōstituereq; volumus: si id tetrachordum h k l m: que sunt mese trite synzeugmenon paranete synzeugmenon nete synzeugme- non: facioq; mesen ad neten synzeugmenon sesquitertiam. quare ⁊ concinentem diatessaron ⁊ l ad m para- netē synezeugmenon ad neten tono distantem pariter et k ad l tono. erit ergo per sextam tertij h ad k meses ad triten synzeugmenon semitonij minoris interuallum et k l ⁊ l m duo toni ⁊ tetrachordum synzeugme- non: hoc est disiunctarum in genere diatonico diuisum.

7 Tetrachordum hyperboleon in eodem diatonico genere predictis copulare: et in pentadecachordo: bis diapason consonantiam compleri.

A re	Proslambanomenos	A	A
b mi	Hypate hyppaton	b	b
c faut	Parhypate hypaton	c	c
d solre	Lichanos hypaton	d	d
e lami	Hypate meson	e	e
F faut	Parhypate meson	f	f
G solreut	Lichanos meson	g	g
a lamire	Mese	h	h
b mi	Paramese diezeugmenon	k	b fa Trite syn. k
C solfaut	Trite diezeugmenon	l	c solfaut Paranete syn. l
d lasolre	Paranete diezeugmenon	m	d lasolre Nete syn. m
e lami	Nete	n	n
f faut	Trite hyperboleon	o	o
G solreut	Paranete hyperboleon	p	p
a lamire	Nete hyperboleon	q	q

	Tetrachordũ hypaton							Tetrachordũ diezeugmenõ						
	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.
A	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	o	p	q
				Tetrachordũ meson							Tetrachordum hyperboleon			

℄ Sit n o p q tetrachordum hyperboleon facio vt in prioribus n neten diezeugmenon ad q netẽ hyperboleon sesquitertiam: ⁊ idcirco ad eam concinentem diatessaron. ⁊ p ad q facio toni interuallum. ⁊ o ad p itidẽ toni interuallum. per sextam tertij n ad o erit semitonium minus. Est ergo tetrachordum hyperboleon n o p q ex semitonio minore duobus subiunctis tonis in genere diatonico dimensum. sed et per precedẽtem h mese ad n neten diezeugmenon consonat diapente: ergo h ad q mese ad neten hyperboleon ex consonantia diapente ⁊ diatessaron constans: consonat diapason. ergo a ad q proslambanomenos ad netẽ hyperboleon consonabit bis diapason. et cum totum polychordum a q omnino quindecim perficiatur chordis: in pentadecachordo ⁊ in genere diatonico constitutum est bis diapason. quod est totum propositum.

Pentadecachordi in diatonica melodia constituti: numeros reperire. 8

Proslambanomenos	A	9	216	1728	13824	
Hypate hypaton	b	8	192	2536	12288	Tonus
Parhypate hypaton	c			1458	11664	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		162	1296	10368	Tonus
Hypate Meson	e		144	1152	9216	Tonus
Parhypate Meson	f				8748	Semi. minus
Lichanos Meson	g			972	7776	Tonus
Mese	h		108	864	6912	Tonus
Paramese diezeugmenon	k			768	6144	Tonus
Trite diezeugmenon	l			729	5832	Semi. minus
Paranete diezeugmenon	m		81	648	5184	Tonus
Nete diezeugmenon	n		72	576	4608	Tonus
Trite hyperboleon	o				4374	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			486	3888	Tonus
Nete hyperboleon	q		54	432	3456	Tonus
		p̃m⁹	scd̃us	tertius	quart⁹ loc⁹	

℄ Numeri qui in musica disciplina precipue desiderantur: sunt duplares: triplares: quadruplares: hemiolij: epitriti: epogdoi: hoc est dupli: tripli: quadrupli: sesqualteri: sesquitertij ⁊ et sesquioctaui. quo circa si desideras cognoscere ad quem numerum numerus maior est duplus. ipsum partire per duo. Ad quẽ triplus partire per tria. Ad quem quadruplus partire per quattuor. Ad quem sesqualter partire per tria et tertiam auge per duo. Ad quem sesquitertius partire per quattuor et quartam auge per tria. Ad quem sesquioctauus partire per nouem ⁊ nonam auge per octo. Et numeri: per octauam secundi Arithmetices vbiq; surgent petiti: si maior duplus: triplus: quadruplus: sesqualter: sesquitertius: aut sesquioctauus est. ℄ Et si rursum cognoscere desideras quem numerus minor duplum habet: ipsum auge per duo. Quem triplum: auge per tria. Quem quadruplum: auge per quattuor. Quem sesqualterum: partire per duo ⁊ illi medietatem adde. Quem sesquitertium: partire per tria: ⁊ tertiam adde. Quem sesquioctauum: partire per octo: et octauam adde: Et statim per eandem octauam et diffinitiones cognosces petitum. ℄ Sed nunc ad monstrandum propositum nos conuertamus. Sit pentadecachordum in diatonico genere modo repertum: cuius numeri queruntur: a b c d e f g h i k l m n o p q. duco in seinuicem duo: tria: quattuor: et minimos toni: hoc est vigintiquattuor in 9 et 8 minimos terminos toni et veniant in secundo loco a b que per septimam secundi Arithmetices sunt in proportione sesquioctaua: ⁊ cõtinentia tonum. capio sesquitertium numeri a: sitq; d: et sesqualterum qui sit e ⁊ subduplum qui sit h. Rursum sumo sesquitertium numeri h qui sit m et sesqualterum qui sit n et eius subduplum qui sit q. quia a ad d est diatessaron et a ad e diapente: ergo per decimamtertiam tertij d ad e tonus est et eadem quoq; ratione ad n tonus. Et si d octauam partem haberet ea eidem adiecta facerem c sesquioctauum ad d: ⁊ c d continentia tonum. modo autem quia d comperitur octaua parte carere: augeo a b d e h m n q per octo: surgantq; tertio loco a b d e h m n q: qui numeri per eandẽ septimã adinuicẽ eandẽ seruabũt proportionẽ: quã ⁊ numeri secũdo loco positi. quia ergo d tertio loco positus habet octauam: ea igitur adiecta ad d fiat c: eritq; c ad d sesquioctauus atq; cum eo tonum continens. itidem adiecta octaua parte h ad h fiat g. et octaua parte m

ad m fiat l. & octaua q. ad q fiat p. eruntque identidem g ad h l ad m & p ad q sesquioctaui & numeri tonorum. et h comperitur habere nonam partem: illam augeo per octo et veniat k: eritque h ad k per octauam secundi Arithmetices sesquioctauus. Et si g octauam partem haberet facerem f sesquioctauum ad g. At vero quoniam ea caret: augeo omnes numeros tertio loco repertos per octo et exurgant in quarto loco a b c d e g h k l m n p q: qui per eandem septimam erunt in eisdem habitudinibus vt et numeri tertij loci. adiecta igitur octaua eius parte ad g facio f. & octaua parte ad p facio o. dico ergo numeros quarto loco constitutos esse numeros pentadecachordi. Nam a ad d est diatessaron. et a ad b tonus: & c ad d tonus. ergo per sextam tertij b ad c semitonium minus. & quia a h est diapason et a e diapente: ergo per vicesimam tertij e h est diatessarō et g h & f g monstrati sunt sesquioctaui atque toni. ergo per sextam tertij e f est semitonium minus. et eodem pacto ostendas k l et n o esse semitonia minora: & ceteri adinuicem sunt cogniti toni. igitur pentadecachordi diatonici numeri sunt reperti. Est enim numerus proslambanomeni ad numerum hypates hypaton tonus: & hypates hypaton ad parhypaten hypaton semitonium minus. parhypates hypaton ad lichanon hypaton: et lichani ad hypaten meson duo toni. hypates meson ad parhypatem meson semitonium minus. parhypates meson ad lichanon meson: et lichani ad mesen: & meses ad paramesen disiunctarum: tres toni. parameses ad triten semitonium minus. trites ad paranetē: & paranetes ad neten: duo toni: Netes ad triten hyperboleon semitonium minus. trites ad paraneten et paranetes ad neten duo toni. Est igitur notum propositum.

9 Tres diatonice diatessaron consonantie species a proslambanomeno ad parhypaten meson concinunt. & quattuor diapente species a proslambanomeno ad triten diezeugmenon. septem vero diapason species inter proslambanomenon & paraneten hyperboleon.

		Species diatessarō				Species diapente					Species diapason						
Proslamba.	A	pma	scda	tertia		pma	scda	tertia	qrta		pma	scda	tertia	qrta	qnta	sexta	septia
Hypate hyp.	b	To.	o	o		To.	o	o	o		To.	o	o	o	o	o	o
Parhyp.hyp.	c	Se.	Se.	o		Se.	o	o	o		Se.	Se.	o	o	o	o	o
Licha.hypa.	d	To.	tonꝰ	tonꝰ		To.	tonꝰ	o	o		To.	tonꝰ	tonꝰ	o	o	o	o
Hypate meson	e		tonꝰ	tonꝰ		To.	tonꝰ	o	o		To.	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	o	o	o
Parhyp.me.	f			Se.			Se.	Se.	o		Se.	Se.	Se.	Se.	Se.	o	o
Licha.meson	g						tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ		To.	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	o
Mese	h							tonꝰ	tonꝰ		To.	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonus
Para.diezeu.	k							tonꝰ	tonꝰ			tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonus
Trite diezeu.	l								Se.				Se.	Se.	Se.	Se.	Se.
Para.diezeu.	m													tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonus
Nete diezeu.	n														tonꝰ	tonꝰ	tonus
Trite hyper.	o															Se.	Se.
Para.hyper.	p																tonus
Nete hyper.	q																

¶ Prima species diatessaron tono semitonio minore atque tono constat. Secunda semitonio et duobus tonis. Tertia duobus tonis et sequente semitonio. ¶ Prima species diapente est que constat ex tono semitonio minore & duobus tonis. Secunda duobus tonis: semitonio: atque tono. Tertia semitonio et tribus tonis. Quarta tribus tonis et semitonio. ¶ Prima species diapason est que constat ex tono | semitonio minore | duobus tonis | semitonio minore | atque duobus tonis. Secūda semitonio duobus tonis | semitonio et tribus tonis. Tertia duobus tonis | semitonio | tribus tonis | atque semitonio. Quarta tono | semitonio | tribus tonis | semitonio | atque tono. Quinta semitonio | tribus tonis | semitonio | duobus tonis. Sexta tribus tonis | semitonio | duobus tonis semitonio. Septima duobus tonis | semitonio | duobꝰ tonis | semitonio | atque tono. ¶ Erit itaque per diffinitionem prima diatessaron species a proslambanomeno in lichanon hypaton. Nam proslambanomenos ad hypaten hypaton tonus est: et hypate hypaton ad parhypaten hypaton semitonium minus est: parhypate vero hypaton ad lichanon hypaton tonus. & itidem per diffinitionem secunda diatessaron species ab hypate hypaton in hypaten meson reperietur. & tertia a parhypate hypaton in parhypaten meson. ¶ Species vero diapente hoc pacto per diffinitiones sumentur. Prima a proslambanomeno in hypaten meson. Secunda a parhypate hypaten in lichanon meson. Tertia ab hypate meson in paramesen diezeugmenon. Et quarta a parhypate meson in triten diezeugmenon. ¶ Et septem species diapason consimiliter per diffinitiones querentur. Prima a proslambanomeno in mesen. Secunda a parhypate hypaton in paramesen diezeugmenon. Tertia a parhypate hypaton in triten diezeugmenon. Quarta a lichano hypaton in paraneten diezeugmenon. Quinta ab hypate meson in neten diezeugmenon. Sexta a parhypate meson in triten hyperboleon. Septima vero a lichano meson in paraneten hyperboleon. sed hec cognitu facilia sunt: inspecta diligenter superiore figura.

Chromaticum principalium tetrachordum: constituere. 10

Proslambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b	Tonus	b
Parhypate hypaton	c	Semi. minus	c
Lichanos hypaton	d	Apotome	d
Hypate meson	e	Trisemitonium	e

Chromata apud Lachedemonios induxit olim Timotheus milesius molliorem cantum superiore diatonico: in quo canendi modo hic tetrachordum hypaton querimus. Sit ergo b c d e tetrachordum ad hypatas in chromatico melo constituendas assignatum. prepono chordam a: que sit proslambanomenos: quam facio sesquioctauam ad b hypaten hypaton primam tetrachordi cōstituendi chordam: deinde facio a sesqualteram ad e hypaten meson: eritque vt in omnibus a ad b tonus et a ad e diapente. deinde facio b ad c semitonium minus et b ad d tonum. erit ergo c ad d apotome. ⁊ quia per decimam tertii dempto a b tono ab a e cōsonantia diapente: relinquitur diatessaron. ergo b e modulabitur diatessaron. Sed cum per sextam diatessaron ex duobus tonis et semitonio minore constet ⁊ b c et c d simul sint tonus: ergo d e continet tonum et semitonium minus. est igitur d e trisemitonium. Cum ergo b c hypate hypaton et parhypate hypaton sit semitonium minus. ⁊ c d parhypate hypaton ⁊ lichanos hypaton sit semitonium maius et d e lichanos hypaton ⁊ hypate meson trisemitonium vt monstratum est. constat ergo per diffinitionem tetrachordum b c d e in genere chromatico esse constitutum. idem enim trisemitonium et trihemitonium dicimus.

Chromaticum tetrachordum meson: subiungere. 11

Proslambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b	Tonus	b
Parhypate hypaton	c	Semi. minus	c
Lichanos hypaton	d	Apotome	d
Hypate Meson	e	Trisemitonium	e
Parhypate Meson	f	Semi. minus	f
Lichanos Meson	g	Apotome	g
Mese	h	Trisemitonium	h

Sint pro tetrachordo meson in genere chromatico constituendo e f g h: facio a ad h duplam et concinentem diapason. ⁊ e ad f semitonium minus ⁊ idem e ad g facio tonum. erit ergo f ad g apotome. sed cum a ad e monstrata sit consonantia diapente. ea igitur substracta ab a h consonantia diapason: per vicesimamse cundam tertii relinquitur diatessaron. Est ergo e ad h hypate meson ad mesen diatessaron. ⁊ cum diatessaron duos tonos ⁊ semitonium minus impleat: ⁊ e g sit tonus ergo g h continet tonum et semitonium minus. erit ergo g h trisemitonium: erit igitur e f g h ex duobus semitoniis e f ⁊ f g: et trisemitonio g h constitutum in genere chromatico tetrachordum. quod erat monstradum.

Reliqua duo tetrachorda: in eodem genere predictis adiicere. & in pētadecachordo consonantiam bis diapason collocare. 12

Proslambanomenos	A			A
Hypate hyppaton	b	Tonus		b
Parhypate hypaton	c	Semi. minus		c
Lichanos hypaton	d	Apotome		d
Hypate meson	e	Trisemitonium		e
Parhypate meson	f	Semi. minus		f
Lichanos meson	g	Apotome		g
Mese	h	Trisemitonium		h
Paramese diezeugmenon	k	Tonus	Trite syn. Semi. minus	k
Trite diezeugmenon	l	Semi. mi.	Paranete syn. Apotome	l
Paranete diezeugmenon	m	Apotome	Nete syn. Trisemitonium	m
Nete diezeugmenon	n	Trisemitonium		n
Trite hyperboleon	o	Semi. minus		o
Paranete hyperboleon	p	Apotome		p
Nete hyperboleon	q	Trisemitonium		q

¶ Sint pro reliquis tetrachordis complendis k l m n o p q: quia tetrachordum meson disiunctum est a tetrachordo netarum diezeugmenon: idcirco facio mese ad paramesen diezeugmenon distantiam esse toni: et mesen ad neten diezeugmenon facio consonare diapente. ⁊ ad neten hyperboleon diapason. et tetrachordum k l m n partior vt tetrachordon hypaton. tetrachordum vero n o p q partior vt in precedenti tetrachordum meson eritq; vtrisq; id genere chromatico diuisum. ⁊ quia a ad h cognita est esse diapason: ⁊ h ad q itidem diapason. ergo a ad q consonabit bis diapason. Quod cum quindecim vocibus atq; chordis contentum sit: constat effectum esse id quod erat propositum. Sed si k l m facio tetrachordum synzeugmenon ipsum partieris vt tetrachordum chromaticum meson: et facile factum intuebere propositum.

15 Chromatici pentadecachordi numeros assignare.

Proslambanomenos	a		2592	5971968	
Hypate hypaton	b	256	2304	5308416	Tonus
Parhypate hypaton	c	243	2187	5038848	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		2048	4718592	Semi. maius
Hypate meson	e		1728	3981312	Trisemitonium
Parhypate Meson	f			3779136	Semi. minus
Lichanos Meson	g			3538944	Semi. maius
Mese	h		1296	2985984	Trisemitonium
Paramese diezeugmenon	k		1152	2654208	Tonus
Trite diezeugmenon	l			2519424	Semi. minus
Paranete diezeugmenon	m			2359296	Semi. maius
Nete diezeugmenon	n		964	2221056	Trisemitonium
Trite hyperboleon	o			2108268	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			1974272	Semi. maius
Nete hyperboleon	q		648	1492992	Trisemitonium

¶ Sint b et c minimi numeri semitonii minoris per decimamoctauam secundi huius reperti. quia b nona parte caret: augeo b et c per nouem et veniant b et c in secundo loco. quoniam igitur in secundo loco b nonam partem habet: eam augeo per octo et fiat d. tunc b ad d per septimam secundi Arithmetices erit sesquioctauus. quare b d continentia tonum. et b ⁊ c per eandem est semitonium minus. ergo c d est apotome. Rursum quia b habet octauam adiicio eidem suam octauam ⁊ fiat a: eritq; a ad b sesquioctauus atq; tonus ⁊ quoniam a habet tertiam facio a ad e sesqualterum. ⁊ quia habet secundam facio itidem a duplum ad h. Reperio item h habere nonam tertiam et secundam. facio igitur h sesquioctauum ad k: sesqualterum ad n ⁊ duplum ad q. quo facto duco b secundi loci in a b c d e h k n q et veniant in tertio loco a b c d e h k n q. Deinde duco c d secundi loci in e secundi et veniant f g ⁊ in k et veniant l m et in n ⁊ veniant o p in tertio loco. eritq; per septimam et octauam secundi Arithmetices numeri pentadecachordi chromatici in tertio loco assignati. Nam a b erit tonus et b c semitonium minus et c d apotome. et quia a ad e est sesqualter: a et e sunt numeri diapente. ⁊ a b numeri toni. dempto igitur a b tono relinquitur b e diatessaron. ⁊ b c ⁊ c d simul sunt tonus igitur per sextam tertii d e sunt trisemitonium. Et a h est diapason ⁊ a e diapente. igitur e h est diatessaron. ⁊ per octauam secundi Arithmetices e f et f g sunt semitonium minus ⁊ apotome. igitur g h est trisemitonium et consimiliter monstrabis h k esse toni k l ⁊ l m duo semitonia et m n trisemitonium n o p duo semitonia ⁊ p q trisemitonium. clarum igitur euadit propositum.

14 Modorum diatonici et chromatis parhypate parhypatis: paramese paramesis: atq; trite tritis correspondent.

¶ Nam in vtrisq; generibus hypate ad parhypatas semitonii minoris obseruant internallum. et mese ad parameses tonum. ⁊ trite ad tritas minus semitonium. est igitur notum illas voculas in vtroq; canendi modo sibimuicem respondere. ⁊ non modo id verum sit: sed et hypate hypatis ⁊ mese mesis ⁊ nete netis correspondent. Nam vtrobiq; proslambamenoni ad hypatas hypaton concinunt tonum. ⁊ ad hypatas meson diapente. ad mesas diapason. ad netas disiunctarum diapason ac diapente. ⁊ ad netas hyperboleon bis diapason. Est ergo quod proponebatur et amplius: facile cognitum.

Pentadecachordum enarmonicum constituere.

Proslambanomenos	A			A
Hypate hypaton	b	Tonus		b
Parhypate hypaton	c	Diesis		c
Lichanos hypaton	d	Diesis		d
Hypate Meson	e	Ditonus		e
Parhypate meson	f	Diesis		f
Lichanos meson	g	Diesis		g
Mese	h	Ditonus		h
Paramese diezeugmenon	k	Tonus	Trite syn. diesis	k
Trite diezeugmenon	l	Diesis	Paranete syn. diesis	l
Paranete diezeugmenon	m	Diesis	Nete syn. ditonus	m
Nete diezeugmenon	n	Ditonus		n
Trite hyperboleon	o	Diesis		o
Paranete hyperboleon	p	Diesis		p
Nete hyperboleon	q	Ditonus		q

¶ Huius compositio perfacilis est. facio enim vt in ceteris precedentibus a ad b interuallum toni. et a ad e diapente. ⁊ b ad d facio semitonium minus. ⁊ diuido chordam c in medio differentie b ad d erit ergo b ad c diesis tetrartemeria atq; quadrupartialis pariter et c ad d diesis. sed per quartam secundi huius hec latior illa vero contractior: neq; per tricesimamsecundam eiusdem semitonium minus in duo equa certo: constitutoq; numero diuidi potest. et a ad e diapente. substracto igitur a b tono relinquitur b ad e esse diatessaron. et cum diatessaron semitonium minus ⁊ duos tonos complectatur: et b ad d sit semitonium minus: relinquitur igitur d ad e esse ditonus. erit igitur b c d e hypates hypaton parhypates hypaton lichanīq; hypatō et hypates meson tetrachordum: per b c: c d et d e diesim ⁊ diesim ⁊ ditonū procedens per diffinitionē in enarmonico genere diuisum. Similiter constituas e f g h tetrarchordum meson faciendo a ad h diapason. et e ad g semitonium minus. ⁊ partiendo mediam differentiam per f ita vt e f et f g sint due dieses. Nam ab a h consonantia diapason subducta a e consonantia diapente: relinquitur e h esse diatessaron. et cum e g sit semitoniū minus: igitur g h erit ditonus. ⁊ cum e f ⁊ f g sint due dieses ⁊ g h ditonus. ergo hec tetrachordi partitio in genere enarmonico facta conspicitur. Et facta h mese ad neten disiunctarum diapente: ⁊ ad neten hyperboleon diapason: et chorda mese a paramese tetrachordi disiunctarum tono disclusa: perinde ac proslambanomeno ab hypate hypaton: partieris tetrachordum disiunctarum k l m n vt b c d e tetrarchordum hypaton. ⁊ tetrachordum n o p q hyperboleon excellentiumq;: vt e f g h tetrachordum meson. tetrachordum autem coniunctarum h k l m partieris vt tetrachordum meson et id quodq; facile est.

Pentadecachordi enarmonici numeros colligere.

Proslambanomenos	A	13824		13824	
Hypate hyppaton	b	12288	Tonus	12288	Tonus
Parhypate hypaton	c	11664	Semi. minus	11976	Diesis
Lichanos hypaton	d	10368	Tonus	11664	Diesis
Hypate meson	e	9216	Tonus	9216	Ditonus
Parhypate meson	f	8748	Semi. minus	8982	Diesis
Lichanos meson	g	7776	Tonus	8748	Diesis
Mese	h	6912	Tonus	6912	Ditonus
Paramese diezeugmenon	k	6144	Tonus	6144	Tonus
Trite diezeugmenon	l	5832	Semi. minus	5988	Diesis
Paranete diezeugmenon	m	5184	Tonus	5832	Diesis
Nete diezeugmenon	n	4608	Tonus	4608	Ditonus
Trite hyperboleon	o	4374	Semi. minus	4491	Diesis
Paranete hyperboleon	p	3888	Tonus	4374	Diesis
Nete hyperboleon	q	3456	Tonus	3456	Ditonus

Sint numeri a b c d e f g k l m n o p q in primo loco constituti numeri pentadecachordi diatonici per octauam huius reperti. pono iterum a b e h k n q in secundo loco ⁊ in respondentibus locis rursum c in secundo loco transmuto ad d et f ad g ⁊ l ad m ⁊ o ad p. quibus ita in secundo loco dispositis: ex ipsis quidem in secundo loco capio differentiam b d ⁊ eius medietatem adiicio ad d et fiat c. Similiter differentiam e g et medietatem addo ad g et fiat f. ⁊ differentiam k m ⁊ medietate differentie adiecta ad m fiat l. et differentiam n p ⁊ medietate adiecta ad p fiat o. dico a b c d e f g h k l m n o p q numeros secundo loco positos esse numeros pentadecachordi enarmonici. Nam a b erit tonus. b c et c d due dieses constituentes semitonium minus b d. quod enim est b c in diatonico factum est b d in enarmonico et d e est ditonus. Nam quod est in diatonico c e est hic in enarmonico d e. at diatonice modulationis c e ditonus est. Nam continens c d tonum et d e tonum. ⁊ hoc pacto reperientur e f g due dieses ⁊ g h ditonus. h k tonus: k l m due dieses: m n ditonus. n o p due dieses: p q ditonus. Sunt itaq; collecti numeri pentadecachordi enarmonici quemadmodum propositum fuerat. quod est propositum.

17 Moddi diatonici parhypate hypaton: in enarmonica modulatione transit in lichanon: & parhypate meson in lichanon meson atq; trite in paranetas.

Id prospici statim promptum est. Nam in diatonico pentadecachordo a proslambanomeno ad hypaten hypaton incidit tonus. et ab hypate ad parhypaten hypaton semitonium minus. in enarmonico vero a proslambanomeno ad hypaten hypaton similiter incidit tonus. et ab hypate ad lichanon hypaton semitonium minus. diatonica igitur parhypate: in enarmonica modulatione permutatur: transitq; in lichanon. et hoc pacto de reliquis ostendatur. quod ⁊ facile sensu deprehendetur: si in vtroq; emodulandi genere et diatonico et enarmonico proslambanomeni ponatur equisoni. tunc enim manifestum erit huius lichanos: illius parhypatis esse equisonos: vnisonosq;: pariter et huius paranetas: illius tritis esse equisonas.

18 Consentiunt in tribus modulationū generibus: proslambanomeni: hypate principales: hypate medie: mese: paramese: nete: cum disiuncte: tum coniuncte atq; excellentibus netis excellentes.

Nam in tribus generibus per quartam: quintam: sextam: septimam: decimam: vndecimam: duodecimā: et quintamdecimam huius proslambanomeni ad hypatas hypaton sonant tonum. et iidem ad hypatas meson sonant diapente. ad mesas diapason. ad netas disiunctas sonant diapason ac diapente. ad netas autem coniunctas dempto tono sonarent diapason ac diatessaron. et ad netas excellentes: consonant vbilibet proslambanomeni bis diapason. consentiunt igitur in tribus generibus que aducte sunt vocule. quod est propositum.

19 Que chorde mobiles queue immobiles in p̄tadecachordis existant: inuestigare.

Proslambanomeni	a	Stabiles	
Hypate hypaton	b	Stabiles	
Parhypate hypaton	c	Instabiles	
Lichanos hypaton	d	Instabiles	
Hypate meson	e	Stabiles	
Parhypate Meson	f	Instabiles	
Lichanos Meson	g	Instabiles	
Mese	h	Stabiles	
Paramese diezeugmenon	k	Stabiles	Trite synzeugmenon. Instabiles
Trite diezeugmenon	l	Instabiles	Paranete synzeugmenon. Instabiles
Paranete diezeugmenon	m	Instabiles	Nete synzeugmenon. Stabiles
Nete diezeugmenon	n	Stabiles	
Trite hyperboleon	o	Instabiles	
Paranete hyperboleon	p	Instabiles	
Nete hyperboleon	q	Stabiles	

Chordas stabiles immobilesq; vocamus: que in omni pentadecachordorum diuisione: eadem seruant interualla: eandemq; ad proslambanomenon habitudinem. Instabiles vero atq; mobiles: que id non seruant. sic ergo stabiles ac instabiles reperiemus. cum enim per precedentem in tribus generibus consentiant proslambanomeni: principales hypate. medie hypate: mese: paramese: nete tum synzeugmene tū diezeugmene ac hyperboles: et eadem vt ex demonstratis iam patet seruent interualla. erunt ergo proslambanomenos hypate hypaton: hypate meson: mese: paramese nete synzeugmenon: nete diezeugmenon: et nete hyperboleon: simpliciter immobiles atq; firme. Sed cum decimaseptima huius monstrauerit parhypatas diatonice modulationis: in enarmonico melo transire permutariq; in lichanas: et tritas in paranetas:

consſtat ergo reliquas a predictis eſſe mobiles: vt parhypaten hypaton | lichanon hypaton | parhypaten meſon | lichanon meſon | triten ſynzeugmenon | paraneten ſynzeugmenon | triten diezeugmenon | paranetē diezeugmenon | triten hyperboleon | paranetē hyperboleon. Jd tamen animaduerti dignum eſt ꝙ cum per decimamquartam huius parhypate | et trite in diatonicis et chromaticis reſpondeant | ſimiliaq; poſſideant interualla: eas non vſq; adeo (vt cetere ſunt) eſſe inſtabiles. Et proinde partim mobiles | partimq; immobiles bono iure dici poſſe videntur.

In tetrachordis diatonicis ab hypate hypaton primo limite conſonantiarum: ad quartum vſq; limitem ter diateſſaron cōtinetur ſed ſemel dumtaxat in ſtabilibus: immobilibuſq;. Et ad quintum limitem idētidem ter diapente: ſemel in mobilibus: ſemel partim variabilis: et ſemel penitus inuariabilis atq; firma. Ad octauum vero ſepties conſonabit diapaſon: ter in immobilibus: & quater in mobilibus.

hypate hypa.	et conſequentes ſuis locis.												
	Semi.	Ton⁹	Ton⁹	Semi.	Ton⁹	Ton⁹	Ton⁹	Semi.	Ton⁹	Ton⁹	Semi.	Ton⁹	Ton⁹
Stabiles	b		e			h	i			m			p
Inſtabiles	c	d		f	g			k	l		n	o	

¶ Cum dicitur a primo limite ad quartum vſq; limitem: quintum: ac octauum: primus limes non excluditur ſed quartum: quintū: ac octauum excludi intelligimus. Sint ergo b c d e f vſq; ad p quattuor tetrachorda et b hypate hypaton: cetere vero conſequentes. Dico primo ab b vſq; e ter contineri diateſſaron: ſed ſemel ſolum in immobilibus. Nam per quartam huius b ad c continet ſemitonium minus et c ad d tonum et d ad e tonum. ergo b ad e conſonat diateſſaron: eritq; b ad e prima diateſſaron conſonantia reperta. Et cum oſtenſum ſit c ad d et d ad e eſſe duos tonos et per quintam huius e ad f ſit ſemitonium minus: ergo c ad f cōſonat diateſſaron. eritq; c ad f ſecunda diateſſaron. Jtem monſtratus eſt d ad e eſſe tonus et e ad f ſemitonium minus: et per quintam huius f ad g eſt tonus. ergo d ad g eſt diateſſaron: eritq; d ad g tertia diateſſaron. Sed cum prima harum trium que eſt b ad e ſit ab hypate hypaton ad hypaten meſon: quas monſtrauit precedens ſtabiles immobileſq;: et ſecunda ab c in f parhypate hypaton in parhypaten meſon: et tertia ab d in g lichano hypaton in lichanon meſon. et parhypate ꝛ lichane monſtrate ſunt mobiles. conſtat ergo ab b ad e ter diateſſaron ſed ſemel dumtaxat in ſtabilibus: immobilibuſq; contineri. ¶ Secundo dico ab b hypate hypaton ad f vſq; parhypaten meſon: ſolum ter contineri diapente. Nam per decimam tertij diapente tribus tonis ſemitonioq; minore cōſtat. ſed per quartā et quintam huius b ad f ſolum duos tonos et duo ſemitonia minora continet: que duo ſemitonia minora per 34 ſecundi minus vno tono: commate reſtituunt. ergo vt b ad f diapente conſonantiam compleat: plena deeſt apotome. non conſtituit ergo b ad f diapente. Jtem c ad g per quartam et quintam huius continet tres tonos qui ſunt c ad d: d ad e: ꝛ f ad g: et vnum ſemitonium minus quod eſt e ad f. igitur per decimam tertij c ad f conſonat diapente. eritq; c ad g prima diapente et per eaſdem d ad h continet tres tonos: qui ſunt d ad e: f ad g: et g ad h: ꝛ ſemitonium minus e ad f. ergo d ad h conſonat diapente: eritq; d ad h ſecunda diapente. ꝛ ab e ad i per quartam et ſextam conſimiliter contineantur tres toni et ſemitonium minus. erit ergo e ad i tertia diapente. ter igitur ab b vſq; ad f continetur diapente. ſed cum prima ſit ab c parhypate hypaton in g lichanon meſon. et parhypatas et lichanos monſtrauerit decimanona huius eſſe mobiles. erit ergo c ad g prima diapente in mobilibus conſtituta. ꝛ cum ſecunda ſit ab d lichano principalium in h meſen: lichanos autem mobilis ſit: ꝛ meſe immobilis: ſecunda igitur diapente partim variabilis exiſtit. Et cum tertia ſit ab e hypate meſon ad i parameſen que per eandem decimamnonam ſtabiles monſtrate ſunt. erit igitur tertia diapente omnino ſtabilis atq; firma. ¶ Tertio dico ab b hypate hypaton vſq; ad i parameſen ſepties contineri diapaſon. ſed ſolum ter in immobilibus: quater autem in mobilibus. Nam b ad i per quartam quintam et ſextam huius continet quinq; tonos et duo ſemitonia minora. ergo per viceſimamprimam tertij b ad i conſonat diapaſon: eritq; b ad i prima diapaſon. Et per idem c ad k: d ad l ꝛ e ad m: ſingule intercipiunt quinq; tonos et duo ſemitonia minora: erit ergo c ad k ſecunda diapaſon. et d ad l tertia. ꝛ e ad m quarta. ſed per quartam: quintam: ſextam atq; ſeptimā ſimul f ad n ſimiliter continebit quinq; tonos ꝛ duo ſemitonia minora. ſimiliter et g ad o et h ad p. erit ergo quinta diapaſon f ad n. ſexta g ad o. et ſeptima h ad p. igitur ab b ad i vſq;: continetur ſepties diapaſon. atqui primam prebent hypate hypaton ꝛ parameſe diezeugmenon. ꝛ quartam hypate meſon ꝛ nete diezeugmenon. et ſeptimam meſe ꝛ nete hyperboleon. hypatas autem meſas parameſas et netas monſtrauit decimaoctaua immobiles atq; ſtabiles. igitur inter illas ſeptem diapaſon conſonantias diapaſon ter in immobilibus reperitur. Sed ſecundam prebent parhypate hypaton et trite diezeugmenon. Tertiam lichanos hypaton et paranete diezeugmenon. Quintam parhypate meſon ꝛ trite hyperboleon. Sextam lichanos meſon et paranete hyperboleon: ſed decimanona parhypatas: tritas: lichanas ꝛ paranetas: monſtrauit eſſe mobiles. igitur inter illas ſeptem conſonantie diapaſon vices: quater in mobilibus mutabilibuſq; facta reperitur: quod eſt totum propoſitum. ¶ Quod autem diuus Seuerinus ſapientum latinorum diſciplinas ſectantium primus: quem ꝛ in hoc opere quantum valemus imitamur ſuis diſciplinis non parum adiuti decimotertio capite quarti ſue muſices ſpecies diapente numerando eas quattuor faciat: id introductorie factum putetur: vbi preciſam nō curauit veritatē. ſed cōmunem ſecutus illic eſt extimationē: quod facile ex eius ſuperiori determinatione cognoſcitur. hic autē nō introductionis ſed exacte determinationis locus eſt.

21 Tessaradecachordi chromatici inter assignatos limites ter itidē diatessaron: solū semel immobiliter. bis diapēte: semel immobiliter: semelq; partim mobiliter. septies autē diapason: ter vt in diatonico genere immobiliter: quaterq; mobiliter cōtinetur.

Semi.	Apoto.	Trisemi.	Semito.	Apoto.	Trise.	Tonus	Semi.	Apo.	Trise.	Semi.	Apo.	Trise.

b e h i m p

c d f g k l n o

¶ Tessaradecachordum ex quattuor tetrachordis constituitur: idcirco sic nuncupatum: quia quattuordecim chordis [neruis] voculisue contineatur. dico enim primo quattuordecim chordarum in genere chromatico continue per litteras b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p| ab hypate hypaton dispositarum a primo ad quartum vsq; limitem: ter contineri diatessaron solum semel immobiliter. Nam per decimam b ad e concinit diatessaron. eritq; b ad e prima diatessaron. sed ⁊ quia per decimam c ad d est apotome et d ad e trisemitonium: ergo c ad e continet duos tonos. et per vndecimam e ad f est semitonium. ergo per sextam tertii c ad f duos tonos et semitonium continens: erit diatessaron. erit igitur c ad f secunda diatessaron. et quia rursus per vndecimam e ad f est semitonium minus et f ad g apotome: ergo e ad g tonus. sed d ad e monstratum est trisemitonium. ergo d ad g continet duos tonos ⁊ semitonium: estq; d ad g tertia diatessaron. Et cum prima b ad e sit ab hypate hypaton in hypaten meson per decimamoctauam sit immobiliter. secunda vero c f | et tertia d g: sunt a parhypate ⁊ lichano principalium: que decimanona patefecit esse mobiles. constat ergo primum. ¶ Secundo dico solum bis intra quintum limitem contineri diapente. quia enim b ad e per immediate monstratum est diatessaron. et e ad f: ⁊ f ad g simul tonus. ergo per decimamtertiam tertii b ad g concinit diapente. eritq; b ad g prima diapente. ea tamen sex vocibus ⁊ non quinq; explebitur: proprietatem diapente non seruans. at c ad g non explebit diapente. Nam per modo monstratum ad diapente complementum deerit b ad c semitonium minus. neq; c ad h. Nam per vndecimam huius g ad h continet trisemitonium. at c g ad diapente cōplementum solum deerat semitonium minus: superat igitur c h consonantiam diapente completo tono. neq; d h continet diapente. Nam cum c h superet consonantiam diapente integro: completoq; tono: dempta ergo c d apotome relinquetur d h superans diapēte consonantiam semitonio minore. sed e ad i consonat diapēte: est enim h ad i per duodecimam tonus. sed d ad h per immediate monstratum superat consonantiam diapente semitonio minore. dempto ergo d e trisemitonio minore: relinquitur e h deficiens tono a diapente: addito igitur h i tono fiet diapente. est itaq; e ad i secunda diapente. Ab b igitur ad f quintum limitem solū bis sumitur diapente. Et cum prima diapente b g sit ab hypate hypaton immobili ad lichanon meson partim mobilem: fit ergo primo partim mobiliter. At vero cum secunda e i sit ab hypate meson ad paramesen que monstrate sunt immobiles: fit ergo secundo modo immobiliter seruaturq; secundo modo diapente proprietas vt de quinto loco in quintum fiat locum. ¶ Tertio dico septies fieri diapason ter immobiliter: quater vero mobiliter. Nam cum b ad e per primam partem huius monstrata sit diatessaron: et per secundam e ad i diapente. ergo per vicesimam tertii b ad i consonat diapason. erit itaq; b ad i prima diapason. Preterea quia c ad f fuit inuenta secunda diatessaron: et f g est apotome g h trisemitonium: ergo f h duo sunt toni et h i tonus et i k semitonium. ergo f k diapente: et c f vt iam dictum est diatessaron. concinit igitur c ad k diapason: eritq; c k secunda diapason. et eodem iure d l tertia diapason adiuuante duodecima huius. et e m quarta. f n quinta. g o sexta. ⁊ h p septima. Sed ter fieri immobiliter et quater mobiliter eodem modo vt in vicesima monstratur.

22 In tetradecachordo enarmonico: inter assignatos limites ter diatessaron & septies diapason vt in precedētibus cōtinetur. at semel dūtaxat diapente atq; immobiliter.

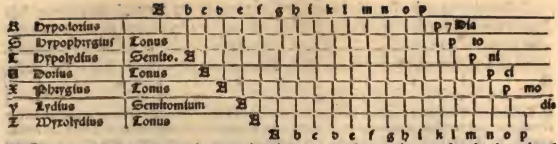
Diesis	Diesis	Dito.	Die.	Diesis	Dito.	Tonus	Diesis	Diesis	Dito.	Diesis	Diesis	Dito.

b e h i m p

c d f g k l n o

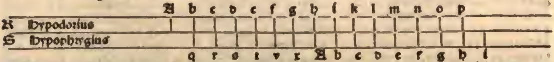
¶ Tetradecachordum et tessaradecachordum idem dicimus. sit igitur b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p tessaradecachordum enarmonicum. dico primo inter b e ter contineri diatessaron. Nam quia per decimamquintam huius b c d sunt due dieses tetrartemerie: erit b d semitoniū minus. et d e est ditonus. erit igitur b e prima diatessaron. et eodem iure c f secunda. ⁊ d g tertia. ⁊ quia b e sunt hypate hypaton ⁊ hypate meson: fit igitur prima immobiliter. et c d sunt parhypate hypaton ⁊ lichanos hypaton mobiles: fit igitur et duobus modis mobiliter. ¶ Secūdo dico solum semel a primo ad quintum limitem fieri diapente: et id quidem immobiliter. nam non fiet diapente b f quia solam superaddit consonantie diatessaron b e diesim tetrartemeriam. neq; b g quia solum superaddit consonantie diatessaron duas dieses que sunt semitonium minus. neq; fiet b h quia consonantie diatessaron superaddit semitonium minus ⁊ duos tonos. neq; per idem fiet diapente c g aut c h. nam hic abundabit tonus ⁊ diesis: illic autem deerit tonus minus vna diesi. neq; d g. nam deerit tonus. neq; d h. nam tonus abūdabit. at vero cū e h sit diatessaron: nam e f g due dieses: ⁊ g h ditonus | et cum h i sit tonus: erit igitur e i diapente. et cum e sit hypate meson et i paramese que monstrate sunt immobiles. fit igitur inter assignatos limites solum semel diapente atq; immobiliter. Tertio septies fieri diapason vt in diatonicis ex decimaquinta declaratur quemadmodum vicesima huius monstrata est.

23 Diatonice modulationis: septem modos ordine collocare.



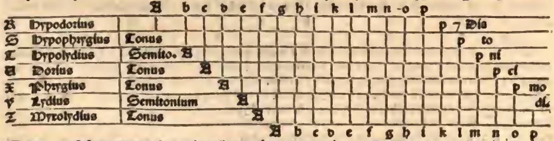
❡ Sit a b c d vsq; ad p pentadecachordum diatonicum. sit r pro hypodorio pentadecachordum diatonicum a b c d e f g h i k l m n o p grauissimum: quod vt aliorum basis atq; fundamentum statuatur: extendo vno tono in acumen proslambanomenon pentadecachordi s amplius q̃ sit proslambanomenos r ad quem ceteras voces suo ordine per quartam quintam & sextam huius in diatonico modulandi genere subiigo. eritq; pentadecachordum s per diffinitionem hypophrygii modi. Similiter extendo proslambanomenon pentadecachordi t semitonio amplius q̃ tensus sit proslambanomenos pentadecachordi s cui tetrachorda per quartam quintam & sextam huius vt prius coapto. eritq; per diffinitionem t pentadecachordum hypolydii modi. et proslambanomenon v vno tono extendo amplius q̃ hypolydii: cui ceteras voces suo ordine sequentes in diatonico genere coapto. eritq; concentus pentadecachordi v per diffinitionem dorius. et si amplius extendo x vno tono: erit pentadecochordi x cantus phrygius. et si y semitonio minore: erit eius concentus lydius. At z amplius extenso vno tono: fiet concentus myxolydius. sicq; factum per diffinitiones patebit propositum.

Que diuersorum modorum in aliquo genere fuerit prime vocis ad primam habitudo: ea erit secunde ad secundam et tertie ad tertiam et cuiuslibet totius ad totam similis eademq; habitudo. 24



❡ Sit a|b|c|d ad p vsq; pentadecachordum hypodorium in aliquo genere vt diatonico: et q|r| s et sequentes pentadecachordū hypophrygium. distabitq; idcirco q proslambanomenos hypophrygii ab a proslambanomeno hypodorii modi acutior vno tono. dico ergo singulas hypophrygii: singulis hypodorii vt hypatas hypatis|parhypatas parhypatis|lichanas lichanis et ita consequentes: similiter tono|tonicq; proportione distare. Nam cum pentadecachordum a p et pentadecachordum q g sint vtraq; a proslambanomeno in neten hyperboleon diatonice extensa: ergo que proportio a ad b ea est per quartam huius q ad r: ergo per tertiam secūdi Arithmetices permutatim vt a ad q ita b ad r. at a ad q mōstratus est esse tonus: igitur et b ad r tonus. et consimiliter de sequentibus ostendatur.

Totus ordo diatonicus pentadecachordi hypophrygii modi: totum hypodorium vnius acumine toni superat: & totus hypolydius eūdem trisemitonio. singule quoq; dorii singulas hypodorii diatessaron consonantia. totus vero phrygius consonantia diapente. lydius autē diapēte atq; semitonio. & myxolydius diapēte atq; sesquitono. 25



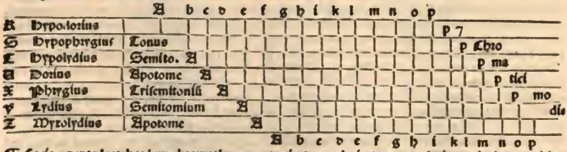
❡ Nam proslabanomenos hypophrygii tono superat acumine proslambanomenon hypodorii. ergo per precedentem totus hypophrygius ordo totum hypodorium ordinem: toni superat acumine. et quia proslambanomenos hypolydii superat acumine semitonii minoris hypophrygium: ergo idem superat acumine proslambanomenon hypodorium trisemitonio. igitur per precedentem totus hypolydius ordo totum hypodorium ordinem trisemitonio superevadit acutior. sed & quia dorius toni acutie vincit hypolydium: ergo dorius duobus tonis & semitonio acutior est hypodorio. ergo per sextā tertii eo acutior est conso-

nantia diatessaron. quare per precedentem singule dorij singulis hypodorij diatessaron consonantia sonant acutiores. et phrygius addit tonum in acumine dorio: igitur totus phrygius toto hypodorio diapente consonantia modulatur acutior. et lydius phrygio addit semitonium minus et myxolydius lydio tonum. igitur lydius hypodorio diapente & semitonio & myxolydius diapente et sesquitono sonabit acutior. quod totum est propositum.

26 Hypolydius diatonicus hypophrygium diatonicum semitonio / & dorius trisemitonio / phrygius diatessaron / lydius diatessaron & semitonio / myxolydius diatessaron consonantia / atq; sesquitonio superevadit acutior: & dorius hypolydio tono / phrygius ditono / lydius diatessaron & myxolydius diapente: phrygius autē ad dorium sonat tonum lydius trisemitonium & myxolydius diatessaron / lydius phrygio semitonium & myxolydius sesquitonum: myxolydius autem lydio tonum.

¶ Hec vt precedens vel q; facilime monstrabitur.

27 Septem modos chromatice modulationis constituere.

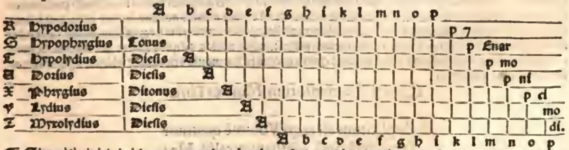


¶ Facio r pentadecachordum chromaticum per decimam vndecimam et duodecimam huius & similiter sex alia scilz s | t | v | x | y | z: facioq; pentadecachordum s tono acutius r. & t pentadecachordum semitonio acutius s. v vero apotomes intervallo acutius t. et x trisemitonio amplius q; v. y semitonio amplius q; x. et z apotome transcendere y: dico ergo septem modos chromatice modulationis esse ordinatos. nam r erit hypodorius s per diffinitionem hypophrygius chromaticus. t hypolydius. v dorius. x phrygius. y lydius. z myxolydius.

28 Quo pacto singuli cuilibet inter se chromatici modi respōdeant: ostendere

¶ Distat per precedentem hypophrygius ab hypodorio chromatico tono. et hypolydius ab hypophrygio semitonio. distat igitur hypolydius ab hypodorio acutior trisemitonio. et dorius ab hypolydio distat apotome. igitur dorius ab hypodorio remotus est ditono. phrygius autem ab dorio trisemitonio. igitur phrygius ab hypodorio removetur tribus tonis & semitonio: hoc est totius consonantie diapente intervallo. & lydius a phrygio semitonio. igitur lydius ab hypodorio diapente atq; semitonio. myxolydius ab lydio distat apotome. igitur myxolydius ab hypodorio diapente consonantia distat acutior atq; tono. Et hoc pacto de reliquis ex precedente perfacilis est ostensio. vt hypolydius ab hypophrygio distat semitonio. dorius tono. phrygius diatessaron. lydius diatessaron et semitonio myxolydius diapente. dorius a phrygio distat apotome. phrygius ditono. lydius diatessaron. myxolydius tritono. Phrygius a dorio trisemitonio. lydius tono et duobus semitonijs minoribus. myxolydius vero diatessaron. Lydius a phrygio semitonio et myxolydius tono. distat autem myxolydius vt iam quoq; dictum est a lydio maiore semitonio. sicq; constructum est propositum.

29 Septem itidem enarmonicos modos ordinare.



¶ Sint r | s | t | v | x | y | z | septem pentadecachorda: et sit per decimamquintam huius r pentadecachordum enarmonicum: intendo proslambanomenon pentadecachordi s vno tono amplius pentadecachordo r. et t diesi amplius q; s. et v diesi amplius q; t. et x ditono amplius q; v. & y amplius diesi x. et z amplius itidem diesi q; y. erunt ergo secūdū acumen intensa sex post primum pentadecachorda: primo tono. deinde duabus diesibus et ditono. demum duabus diesibus: qui quidem intendendi modus enarmonice modulationis

peculiaris propriusq; habetur. sunt igitur septem pentadecachorda r|s|t|v|x|y|z: septem enarmonice modulationis modos continentia. quod demonstrari propositum erat.

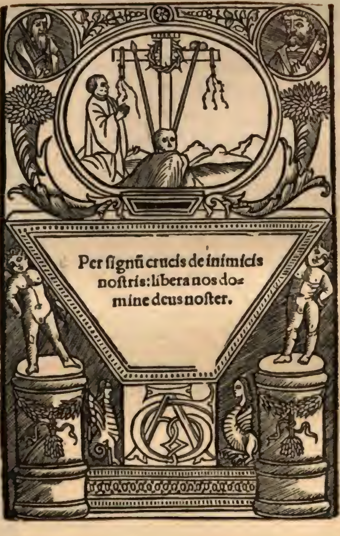
Singulorum enarmonicorum modorum: ad quelibet habitudines demonstrare. 30

¶ Huius ex precedenti demonstratio clara esse potest. Primo hypophrygii ab hypodorio distantiam esse tonum. hypolydii tonum et diesim. dorii sesquitonum. phrygii diapente. lydii diapente ac diesi. myxolydii diapente et semitonio. Secundo hypolydium distare ab hypophrygio diesi. dorium semitonio. phrygium diatessaron. lydium diatessaron et diesi. myxolydium diatessaron et semitonio. Tertio dorium ab hypolydio diesi. phrygium ditono et diesi. lydium diatessaron. myxolydium diatessaron et diesi. Quarto phrygium a dorio ditono. lydium ditono et diesi. myxolydium diatessaron. Quinto lydium a phrygio diesi. et myxolydium semitonio. Sexto myxolydium distare diesi a lydio. ¶ Septem enim modos et nō plures adiecit priscorum autoritas Pythagoricorum. vt enim numerus a monade ad denarium vsq; varius crescens progreditur: mox vero sequens denarius vnitatis vicem obtinet primāq; explicat vnitatem eiusdem indiuidue monadis consors|et emulus: qui ad centenarium vsq; rursus nouenaria progressione se extendit: relapsus tandem in tertiam vnitatem. Ita quoq; vocum dissimilitudo ac varietas ex quibus instar celestis harmonie concentus humani: modiq; formātur ad octonarium vsq; surgit. suntq; septem continue voces inter se varie quibus succedens octonaria vocis plenitudo (Primus eñ numeralis cubus primaq; tessera octonarius) ad primam rursus sonat vt eadem: et ad eam sese habens perinde ac denarius ad vnitatem. Et hec octonaria series in omni modulationis genere sic rata procedit: vt continue octauo quoq; loco octauum per similem sibi et pene eiidem sonus offendat sonum. ita vt ex duobus natiua quadam: concordiq; affinitate iam vnum sonum et non multos parere videantur: vsq; adeo enim se miscent: et mutua se iungunt: copulantq; amicitia. Et harum septem vocum que grauissima tardissimaq; est: Saturno debetur. proxima Ioui: tertia Marti. quarta Phebo. quinta Veneri. sexta Mercurio. septima vero earū acutissima: cōcitatissimaq; Lune. octaua autem rursum reuoluitur ad Saturnum: nona ad Iouem: decima ad Martem. et hoc pacto consequentes: vt sapiens voluit antiquitas. Et re vera totius vniuersi harmonia septenario completa est. et hec septem in celo celestem: in his autem inferioribus corpoream: sensibilemq; temperant harmoniam. sed hec magi plenius discutiant. hinc licet cognoscere cur hypermyxolydius: septem pythagoricis modis haud multum veniat accommodandus. Nam si in diatonico genere myxolydium pentadecachordum pro hypermyxolydio vno tono amplius acuatur: totus is vbiq; modus ad hypodorium consonaret diapason: octauusq; natus esset sonus: qui ad primum idem: congeneusq; naturali affinitate redditur. quare non ab hypodorio primo modo omnifariam varius putandus est. et eque si myxolydius intenderetur trisemitonio in chromate et ditono in enarmonio: sed de his fore amplius q̄ presenti negocio par sit dictum est. Et modi quos adiecere recentiores vt diuus Gregorius ab hac modorum antiquitate recedunt. et pleraq; alia que posteriores musici inculcauerunt et que ab illis facile requiras. et nostra quoq; tempestate musicum modulamen: atq; omnem concinentiam ad celeritatem quādam precipitemq; leuitatem reducere conantur: modestiam grauē seriāq; ac decoram concentuum moderationē perparū attendentes. a moderatione enim dicti sunt modi. parum itē attendentes priscum musices honestatis: grauitatisq; decus: qua amentes arreptitiosq; soluebant. sanitates inducebant feros hominum mores vt olim Thracius Orpheus: ad mansuetos et virtutis callem reuocabant. et ex sensibilium harmonia ad celestis harmonie desiderium captiuas animas tanq̄ sui iam memores exilii vbertim fluentibus oculis euocabant. hoc enim modorum accommoda mediocritate Pythagore discipuli faciebant. Non enim is inter homines modestior: cuius omnis incessus cursus videtur. neq; is cuius preceps nimium loquela presentium ludit intelligentiam. Ita quoq; neq; ii modestiores modi: qui nimia sui festinantia quasi in venerea chorea lasciuientes preterfugiant auditum. Hac enim de causa Pythagorea schola molles chromatis modos repudiauit et Spartiate solēni decreto Timotheum Millesium increpuerunt vehementer diatonicos concentus potius approbantes. qui si apte moderentur virtutis pre se ferunt modestiam. vt enim nimia tarditate seu torpore quodam fastidimur inani. ita nimia celeritas molliciē quādam pre se fert inhonestam. medium enim neq; celeritate preceps nec ignaua tarditate pigrum: laudabile virtutisq; emulum. quam omnis etas probauit probaturaq; est: et ad quam musici modi tanq̄ moderationis animi quedam certe regule nos perducere debent: et ad diuina mentes nostras iugiter rapere. et felices ii erunt qui hoc fine et musicen et omnem mūdanam philosophiam quesierint. neq; talibus deesse solet celestis fauor atq; presidium. qui autem secus faciunt miseri: quales nullos ad quos nostra hec modulationum elementa peruenerint futuros desideramus: quin eis omnis harmonie vite decus: feliciter optamus: nostriq; victuros memores.

Quarti Elementorum Musices Finis.

Explicitum est ergo Volumē quattuor Introductionū Mathematicaliū Magistro Petro Ciruelo Darocensi interprete simul et correctore. Laus deo.

1 5 1 6


Per signũ crucis de inimicis
nostris: libera nos do=
mine deus noster.

ARITHMETICA IOANNIS MARTINI

Silicei, theoricen praxín'que luculenter complexa, innumeris mendarum offucijs à Thoma Rhæto, haud ita prídem, accuratissime vindicata. quod te collatio huius æditionis cum priore palàm doctura est.

PARISIIS
Apud Simonem Colinæum
1 5 2 6

STVDIOSO LECTORI SALVTE, M THOMAS ÆGLOLphides Rhætus.

ARithmeticam theoricen praxinq́ numeris, propè omnibus absolutam, ita nobis compegerat Siliceus, mathematicorum inferior nemine, vt nihil videretur nec assuendū, nec dissuendum: sed tamen chalcographorum aut ignauia supiniore, vt ferè fit, aut inscitia, sic & mutilus passim & maculosus erat Siliceus, vt in reformando negocio mihi, quàm in formando illi, opus fuerit: tot loca hicillic luxata, tot conspurcata deprauatáque, quot lector non oscitabundus facile deprehendet. Quid quòd æditionis prostremæ ductu, nemo vnquam vel radicum extractionem quadratis cubisue, studio quamlibet vigilaci ad plenū extuderit? Quæ igitur deerant, bona fide attexui, modum videlicet reducendi fractiones fractionum ad simplicem, Regulas item aliquot, quibus prolixior atque subtilior fractio, ad crassiorem breuioremq́ reducatur, Probationibus per 9 aut 7 fieri solitis, & à me speciatim exploratis dijudicatisq́, tertiam per 5 non pœnitendam, & alia propemodum inexputabilia, præter ea omnino necessaria margini plurima inspersi, aspera edolaui quo potui leuore, ne qua tibi salebra iam remoramēto sit futura. Quibus vero locis à Siliceo scripta de fractionibus vulgarijs planiora feci, digitos asteriscorum vice appinxi. Quòd si quas hinc inde maculas elui audire expectas, per mare quæris aquam. Parsdo maculosior Siliceus, quiduis erat verius, quàm Siliceus, vt creditu non facile sit tot támq́ monstrosa sordium portenta, annis non adeò multis tam alte silici impacta insedisse. In quod famæ discrimen & obliuionis ne rursus imprudens præcipitetur hominum iniuria vel temporum Siliceus: operam daturus est suo more incōniuam Simon Colinæus, literarum puriorum vindex assertórque viuacissimus. Porrò necubi te oleū operámque lusisse queraris, candide lector, librum priorem vix aliud quàm theoricas numerorum definitiones ex Iordano pariter ac Euclide huc corrogatas loquētē, si pede sicco præteruolaueris, aut etiam ne attigeris quidem, nisi pauca admodū in ipso statim principio, pauca item sub finem cum duodecim demonstrationibus, nullum vt operę, ita nec disciplinę dispendiū fuerit. Vale, & laborē hūc meū ęqui consule. Parisijs idibus Augusti, anno à salute aperta mortalibus M. DXXVI.

IOANNES MARTINVS SILICEVS, DIOCESIS PACENSIS, nobilissimo domino Alfonso Manrrique, Pacēsi episcopo dignissimo, cum literarum, tum virtutis moribus fulgentissimo, salutem.

OCium: rubiginem ingenij, pariter & omnium vitiorum fomitem, atq; sentinam, non minus eleganter, quàm erudite Hieronymus ecclesiæ iubar asseuerat, præsulum clarissime. Cum enim mortale hominum genus ob primi parentis morbidam labem, & voluntatis cum appetitu sensitiuo confinium, ad scelera, q̄ ad virtutes longe sit procliuius: summa ope nitendum est, ne lethæa obliuione torpescentes, Epimenidis dormiamus somnum. inertia medius fidius succrescūt malitiæ, & mentibus humanis affatim irrepit iniquitas. Itaque grauissimus ille Cato, ciuilis honestatis quondam semita, & omnium bonarū artium splendor eminentissimus, memoriæ proditum diuinitus reliquit, non minus ocij q̄ negocij reddendam esse rationem. Eocirca, Gymnosophistas ipsos Indiæ sapientes non possum non plane dilaudare: quippe qui desidiam, ac ignauiam tanto opere detestabātur (Apulæio floridorum primo authore) vt priusquā edulijs mēsę instruerētur, adulescētes ex diuersis officijs redeūtes, soliti essent interrogare quid à lucis ortu dignū, vel didicissent, vel fecissent. qui autē nihil habebant quod expedite, promptéque responderent, impransi turpius eliminabantur. à qua cōsuetudine Augustus ille Cæsar haud procul discedens, quos in vrbe offendebat ociantes, censorio sermone, linguáque Catoniana increpabat, abominabatur, deterrebat. & ne in lasciuiā ociositate raptarentur, singulis singula decernebat officia: opus profecto imperatore dignissimū. Hæc itaq; mecum reuolutans antistitum humanissime, tantillum quod habeo ingenij honestis studijs, præsertim liberalium artium, quoad potero, & licebit, accommodare mihi persuasi. Proinde temporis ineptus ne viderer dissipator, diebus proxime lapsis theoricæ Arithmetices gregario quodam, & tumultuario sudore compilaui, practicæ Arithmeticæ addendū, vt ex quo cum altero vnum absolutius efficeretur corpus. Et quia sublimitatem tuam audiui reuerendissime pater primaria lucubrationum nostrarum monumenta hilari quodam animo, fronteq; liberali excepisse: hos nostros secundos labores amplitudini tuæ dedicare haudquaquam erubesco. quos quantulicunq; sint, vultu beneuolo, facieq; serena, perinde ac omnia soles, intuearis velim. Nec eò dementiæ rapi me credas, vt tales nūgas dignas esse existimem, quæ tanto viro, tam pulchre literis & virtutum specimine candidato, voueri deberent. verum enimuero humanitas tua (à qua nemo nisi inuitus discedit) rusticitatem nostram id cōmittere monuit, instigauit, & denique compulit. Et si quæ mendis deformata reperias: id partim chalcographorū incuriæ, partim dialecticæ studio, in cuius nunc compositione versor, acceptum referas. Non me latet complura fuisse minus circunspecta, longe minus scrutata, ac indagata, quàm materiæ grauitas, & nominis tui sublimitas expostulet: sed quæ vel neglecta, vel indigesta fuerint, mansuetudo tua excusabit. Accipe igitur præsulum decus, accipe clientuli tui donariola: & me felicitatis tuæ amantissimum semper ames, efflagito. Vale.

IOANNIS MARTINI SILICEI, SVCCINCTA IN ARITHmeticam theoricen Præfatio.

Arithmetices inuentio. Pythagoras. Nicomachus. Euclides. Apuleius Boetius. Iordanus

ARITHMETICEN A PHOENICIBUS, QVI (TEste Iosepho) Græcas literas inuenerunt, primo inuentam fuisse referunt authores: & primum inter Græcos inuentorem habuisse Pythagoram, ex verbis diui Seuerini Boetij, priori suæ Arithmeticę libro, facile constat. Post quem Nicomachus Aristotelis parens, longe diffusius eandem amplificauit: deinde Euclides Megarēsis. Inter Latinos autem primus extitit Apuleius: secundus vero noster memoratus Boetius, qui duos Arithmetices amplissimos, & eosdem subtilissimos ædidit libros. postmodum Iordanus, vir sane in Arithmetica facultate eruditus. Sed inter recentes, qui nostra viuunt tempestate, duos non prætereundos reperio: alterum Iacobum Fabrum Stapulensem, alterum Iudocum Clichtoueum Neoportuensem, eiusdem Fabri verum expositorem: quos debito iure omnium horarum viros esse dixerim. His enim si nostra Arithmetice, rationalis efficeretur creatura: perpetuo esset deuincta: quippe qui ex eadem existenti materia, animatum effecerunt corpus. ¶ Arithmetica, secūdum diuum Isidorum episcopum Hispalensem, suarum tertio Etymologiarum libro, numerorum disciplina nuncupatur: quæ inter Mathematicas disciplinas, primas sibi vēdicat partes. Græci autem, numerum, arithmon dicunt, à quo originem Arithmetica sumpsit. ¶ Tot nobis huius facultatis laudationes occurrunt, vt de ipsius laudibus alterum, & quidem prolixius, efficere possemus opus. Et quia sermo longus (vt inquit Apollonius) in multis peccat: ideo his omnibus prætermissis, rem ipsam tangamus oportet. ¶ Arithmeticam in duo scindi membra, alterum theoricum, alterum vero practicum, ambigit nemo. Theoricum de numeris, & ipsorum passionibus consyderat: Practicum, operandi modum ostēdit. Quare nobis congruum visum est, ipsam Arithmeticam in duos libros secandam. In quorum priori, theorice absoluetur: in altero vero praxis. ¶ Priorem igitur aggrediendo librum, ipsum in quinque tractatus diuisum esse significamus. In quorum primo de consyderato secundum se numero, dicemus. In secundo, de relato ad alterum numero, disputabimus. In tertio, de accepto secundum figuram numero, discutiemus. In quarto, de relatis numerorum habitudinibus agemus. In quinto, & vltimo, numerorum demonstratas proprietates annectemus.

Iacobus Faber. Iudocus Clichtoueus. Arithmetica quid & vnde. Arithmetices diuisio. Arithmetices theoricę partitio.

DE CONSYDERATO SECVNDVM SE NVMEro, tractatus primus.

Aristoteles. Cleobolus Lydius. Solon Salaminius

IN mediocritate virtus consistit, inquit Aristoteles secundo Ethicorū. & statim pòst sequitur, Mediocritas autē, est duorum vitiorū, vnius per exuperationem, alterius per defectū. Cleobolus autem ille Lydius, vnus ex septem sapientibus, in vno suorum Apophthegmatum inquit, Mediocritas optimum quoddam est. Cui sententiæ adstipulatur Solon Salaminius, vnus etiam ex septem, quos Græcia iactat sapiētes, sic inquiens, Ne quid nimis. Mediocritatem igitur opitulante dei numine in hoc primo tractatu (qui sequentium est firmamentum) obseruare nitemur. Nam hoc ipso intellecto, facilis ad sequentes aditus apparebit: & ipso prætermisso, cæteri obscurentur oportet. Præsens igitur tractatus in octodecim diffinita scindetur: in quibus de numero secundum se consyderato, dicemus. Is autem numerus secundum se consyderatur, qui nec in comparatione ad alterum sumitur, neque vt ad geometricas figuras habet analogiam, deprehenditur,

Numerus secūdum se consyderatus.

SEQVVNTVR DIFFINITA.

¶Vnitas, est qua vnumquodq; vnum esse dicitur. 1

¶Siue enim corporea, siue incorporea fuerit res, necessum est vt vnitate dicatur vna. Nec in proposito insistẽdum est, an vnitas, qua gloriosa Christi anima dicitur esse vna, cum eadem identificetur anima, aut ab eadem realiter distinguatur: hoc autem enodare, alterius est facultatis. ¶Vnitas autem, omnium numerorum est parens, basis'que firmissima, in quam omnes resoluuntur numeri: & ipsa vna simplici manente, nullam patitur numeralem compositionem. Vnde merito dici potest, quandam inter vnitatem, & materiam affinitatem reperiri. hanc quidem materiam, primam esse in compositionis via, vltimámque in resolutione, omnes testantur philosophi: ita in cuiuslibet numeri compositione, prima se offert vnitas, & vltima, atque vidua iacet, cum quiuis numerus in suas omneis scinditur partes.

Vnitas, numerorũ basis.

☞ Duæ istæ diffinitiones sunt Euclidis lib. 7 elementorum, ab initio. reliquę itẽ omnes, ibidẽ reperiuntur. licet alijs verbis contextæ sint.

¶Numerus, est composita ex vnitatibus multitudo. 2

¶Exempli gratia: ex vnitate & vnitate, componitur binarius, qui omnium numerorũ dicitur esse primus, & ex vnitate & binario, resultat ternarius: quemadmodum ex binario & binario, efficitur 4. In data diffinitione, diffinitum est capiendum pro numero proprie dicto, qui numerus numeratus dicitur, & non pro numero numeranti. Vnde aliud nihil numerantem numerum appellamus, quàm ipsum intellectum: qui vnitates colligendo, compositam ex illis efficit multitudinem. Illum autem numeratum dicimus numerum, qui ex collectis resultat vnitatibus. ¶Numerorum generatio ab vnitate (quæ proprie non numerus, sed initium numeri est dicenda) incipiens, per continuum vnitatis additamentum in infinitum protenditur. Eisdẽmque tali modo comprehensis vnitatibus, nostris placuit maioribus eas naturalem numerorum seriem nuncupare: quam præsenti elementorum combinatione poteris dignoscere.

Numerꝰ Numerãs Numeratus.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	&c.

¶Pars aliquota, est quæ aliquoties sumpta, suum numerum efficit atque metitur. 3

¶Vt 1, quæ omnẽ numerũ dimetitur. Vnde si bis sumatur, binariũ efficit: & si ter, ternarium: & si quater, quaternariũ: & ita consequẽter. Binarius etiam respectu quaternarij, senarij, octonarij, aliquota dicitur pars: cũ bis sumpta, quaternariũ cõponat. & si ter sumatur, senariũ efficit: & si quater, octonariũ. Inde cõstat binariũ aliquotã esse partẽ, atq; mensurã 4, 6, & 8. Id autẽ quod in præsentiarũ aliquotã dicimus partẽ, apud plærosq; antiquos, & præsertim Euclidem septimo elemẽtorũ, partẽ nominatũ reperies. Pars aliquota, terminus est relatiuus: cũ bene sequatur, Pars aliquota est, ergo numerus mẽsuratus est. ¶Pro partiũ aliquotarũ generatione, id solũ habeas documẽtũ. Quouis tibi proposito numero, videbis quoties in ęquas resoluitur partes. Quod si semel tantũ cõtigerit: vnitas duntaxat talis numeri est pars aliquota. Si bis accidat: præter vnitatẽ, aliquis numerus pars aliquota est dicẽdus. Si ter: oportet, præter vnitatẽ, duos diuersos numeros partes aliquotas esse. & hoc pacto cõsequẽter. Exẽplũ primi: 2 semel tantũ in partes æquales est resolubilis, scilicet in vnitatẽ, & vnitatẽ: ideo sola vnitas est pars aliquota 2. Eodẽ modo 3 & 5 semel dũtaxat in æquas resoluũtur partes: 3 quidẽ in tres vnitates, & 5 in quinq;: quapropter illorũ sola vnitas est pars aliquota. Exẽplũ secũdi: 4 bis in partes æquales diuiditur, semel in quatuor æquales vnitates, & deinde in binarios duos: quare, vltra vnitatẽ, numerus binarius est pars aliquota quaternarij. Pari modo 9 & 25, bis in partes diuidũtur æquales: 9 enim in nouẽ vnitates, & tres ternarios: & 25, in vigintiquinq; vnitates, & quinarios quinq;. igitur præter vnitatẽ, 3 est pars aliquota nouenarij: & 5, numeri 25. Exemplum tertij: habeas 6, 8, & 10, qui ter in partes æquas scindũtur. 6 in sex vnitates, tres binarios, & duos ternarios. & 8, in octo vnitates, quatuor binarios, & duos 4. 10 autem in decem 1, & quinq; 2, & duos quinarios resoluitur.

Euclides

Partium aliquotarũ generatio.

¶Pars non aliquota, est numerus qui non aliquoties sumptus suũ numerum efficit, atq; metitur. 4

Vt binarius in ternario inclusus, qui pars non aliquota dicitur, cũ non aliquoties sumptus, ternariũ efficiat. eodem modo 3, qui in quinario reperitur, respectu eiusdem pars non aliquota appellatur. Etiam quaternarius in septenario inclusus, pars non aliquota respectu eiusdẽ nuncupatur. Aduerte tamen Euclidem, & Boetium partes nuncupare, quod non aliquotã dicimus partẽ. Pars autẽ non aliquota, vti & aliquota, relatiuus est terminus. Pro quarum generatione nullo tibi alio opus est documento, q̃ quocunq; oblato numero, cõsyderabis an in ipso sit aliquis numerus, qui non aliquoties sumptus suum numerũ efficiat: & quoscũq; tales reperias numeros, scias eosdẽ in dato numero non aliquotas esse partes. Exẽpli gratia: in ternario, solus binarius est pars non aliquota. pari modo in quaternario, solus ternarius pars non aliquota dicitur. in quinario autẽ, tres non aliquotæ inueniũtur partes, scilicet 2, 3, 4. cũ nulla prædictarũ aliquoties sumpta, quinariũ procreet. & de cæteris conformiter est dicẽdũ. Solus enim binarius, inter omnes numeros à parte nõ aliquota eximitur: parte vero aliquota nullus nũerus vacat.

Euclides Boetius

Partium nõ aliquotarum generatio.

5 **Numerus par, est numerus in duas partibilis medietates, totum numerum componentes.**

Sicut est 2, & 4, & 6, cæteri'que eo ascendentes modo. binarius nanque in duas medietates partibilis est: scilicet vnitatem, & vnitatẽ. Etiam 4 in duo æqua scindi permittit, videlicet in binariũ, & binarium. Idem de 6 & altioribus numeris cẽsendum est. Particulam illam, totũ numerũ componentes, applicatã habebis in infrapositis diffinitis. Si à naturali numerorum serie primũ numerum abstrahas, videlicet 2, & secũdo prætermisso, scilicet 3, tertiũ abstrahas, vtpote, 4: deinde quinto relicto, immediate sequentem numerum, scilicet 6 auferas, & ita consequenter consimili scalaritate procedendo: omnium numerorum parium genitam inuenies lineam. Exemplum.

Pariũ numerorũ procreatio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Linea parium numerorum		2		4		6		8		10		12		14	

Hanc parium numerorum lineam in infinitum protende per assiduam 2 additionem.

6 **Numerus impar, est numerus in duas medietates impartibilis.**

Quemadmodum sunt 3, & 5, & 7. alij'que infiniti eo procedentes ordine. ternarius enim in duas medietates minime potest diuidi: sicut nec 5, nec 7. Et quamuis 7 in duas senarij medietates, scilicet in 3 & 3 secetur: in duas tamen medietates ipsum 7 componentes diuidi non permittit. Generatio imparium numerorum facile apprehendi potest, ijs quæ in præcedenti diffinitione dicta fuere, intellectis. Vnde si (vt ibidem dicebatur) à naturali numerorum serie linea parium numerorum abstrahatur, cæteri manentes numeri impares erunt: qui à 3 incipientes, tali ordinantur linea.

Impariũ productio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Linea imparium numerorum			3		5		7		9		11		13		15

Sic in infinitum procedant numeri impares per continuum binarij crementum.

7 **Numerus pariter par, est numerus par, in æquales continuo resolubilis partes, quousq; ad impartibilem deuentum fuerit vnitatem.**

Vt 16 numerus, qui in 8 & 8 suas æquales partes diuiditur: deinde illæ in æquales pariter secantur partes, videlicet in 4 & 4: hæ vero in 2 & 2 æquas scinduntur partes: quæ deniq; in duas impartibiles vnitates resoluuntur, vltra quas non est amplius procedendum. pari modo 32 & 64 numeri pariter pares dicũtur. Generatio pariter parium numerorum talis est. Fiat continua numerorum duplatio, ab vnitate incipiendo, ita vt semper productus numerus dupletur: & cunctos pariter pares inuenies. Vnde si vnitatem duplaueris: primum pariter parem habebis, scilicet 2: quem si duplaueris, secundus pariter par producetur, scilicet 4: qui si duplatus fuerit, productus numerus erit 8, qui tertius pariter par dicetur. & ita in infinitum procedere potes. Horum autem lineam, tali compositione procreatam inuenies.

Pariter pariũ generatio.

Linea pariter parium numerorum	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Quæ si per continuam numerorum duplationem in infinitum crescat: omnes pariter pares numeros procreatos inuenies.

8 ¶Numerus pariter impar, est numerus par, in duos impares, & æquales partibilis numeros.

¶Vti est 6, qui in 3 & 3 impares numeros, & æquales partitur. Eodem modo 10 & 14, & cæteri eodē excessu ascendentes numeri, pariter impares nuncupantur. ¶Hæc autē est pariter impariū numerorū generatio. Dispositis seriatim numeris imparibus, si omnes duplaueris, seu per 2 multiplicaueris: cūctos pariter impares reperies. Vnde si primum imparem, videlicet 3, duplaueris: primū pariter imparem generabis, qui 6 erit. Item si 5 secundus numerus impar in binarium ducatur: producetur 10 secundus pariter impar. Et si 7 tertius impar per binarium multiplicetur: cōsurget 14 tertius pariter impar. Et consequenter in infinitum procede. hos enim numeros pariter impares infra posita linea (si absq; statu elongetur) per duplationem superioris poterit repræsentare.

Pariter impariū pductio.

Linea imparium numerorum	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
Linea pariter imparium numerorum	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46

Et ita consequēter sine termino protendatur per continuū quaternarij additamentum.

9 ¶Numerus impariter par, est numerus par, in duos æquales, paresq; secabilis numeros, qui in duas æquales continuo resolui partes ad vnitatem vsque haud permittunt.

¶Quemadmodū est 12, qui etsi in 6 & 6 pares, duásq; æquales partes resoluatur, & illæ iterū in duas æquales, scilicet in 3 & 3: hæ tamen minime in partes duas diuidi possunt æquales. Hinc deducitur numeros 20 & 24 impariter pares esse. ¶Pro impariter parium numerorū generatione, duę accipiantur lineæ, altera impariū numerorum, altera vero pariter pariū, binario excepto, & eo disponantur ordine, vt imparium numerorum linea in superiori parte locetur, & pariter parium linea à 4 incipiendo, in latere sinistro ponatur: deinde sinistræ lineæ quiuis numerus per quēlibet superioris lineæ multiplicetur, & ex tali ductu cōsurgens numerus ea locetur domo, quæ ad vtrunq; numerum, & multiplicandū, & multiplicantem, directum habet aspectū. quo facto, omnium impariter parium generationē habebis: quam facile præsens figura poterit propalare.

Impariter pariū gñatio.

¶Longitudo lineæ imparium numerorum in infinitum protensa.

Latitudo lineæ pariter parium numerorum in infinitum protensa.	3	5	7	9	11	13	15	17	
4	12	20	28	36	44	52	60	68	
8	24	40	56	72	88	104	120	136	
16	48	80	112	144	176	208	240	272	
32	96	160	224	288	352	416	480	544	
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	
128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	
256	768	1280	1792	2304	2816	3328	3840	4352	
512	1536	2560	3584	4608	5632	6656	7680	8704	

¶Generatio impariter parium numerorum artificiose reperta.

Hāc igitur si animaduertas figurā, reperies primū impariter pariū numerorū callem generari ex multiplicatione quaternarij per omnes impares numeros: ita vt ex ductu quaternarij in 3, prima efficiatur domus, in qua 12 reperitur: ex ductu autē quaternarij in 5, secūda emanat domus, qua 20 habetur, qui supra 12 habet 8. Hoc pacto consequenter cæteræ eiusdē callis procreātur domus, per assiduū octonarij augmentū. Secūdus callis ex ductu octonarij per omnes impares generatur, sic vt ex multiplicatione 3 in 8, illius callis prima domus generetur, in qua 24 reperitur. Et si 8 in 5 ducatur, secundam inuenies domum, qua 40 inuenitur, qui 24 excedit per 16. Et consequēter eundo per cōtinuū 16 cremētū, cæteras poteris in eodē calle generare domos. ¶Ex quibus omnibus

deducitur, quemuis numerum secūdi callis in dupla se habere proportione ad quemlibet sibi correspondentem in primo,& tali se habere proportione tertij callis numeros ad sibi correspondentes in secundo, & quarti callis numeros ad sibi correspondentes in tertio:& consequenter procedendo ita fieri necessum est.

10 ¶Numerus impariter impar, est numerus impar,in partes impares, & æquales partibilis.

¶Vt 9,qui in tres ternarios impares numeros, & æquales partitur. similiter 15 & 25, cæteri'q; infiniti ascendentes,numeri impariter impares nominentur. ¶Impariter impares eo pacto generantur.Sumantur duæ lineę,quarum vtraque sit imparium numerorum,& altera supremo ponatur loco,altera sub illa ad modum diametri quadrati sit sita. Deinde diametralis linea in superiorem ducatur, sic vt illius primus numerorum imparium,videlicet 3 per omnes superioris lineæ numeros multiplicetur:& prouenientes numeri eo calle, ijs'que locentur domibus, quæ ad 3 directum habent aspectum. Postmodum secundus diametralis lineę numerus,scilicet 5,per omnes superioris lineę numeros (dempto primo) multiplicetur:& consurgentes numeri eo calle,& directis domibus disponantur proportionabiliter ad primum. Consequenter tertius diametralis lineæ numerus, qui 7 est, in omnes supremæ lineæ numeros (præter duos primos) ducatur: & resultantes numeri decentibus domibus,atque calle ponantur. Et si ita in infinitum multiplicando procedas, omnes impariter impares numeros procreatos īuenies:quos omnes haud difficulter præsenti characterū contextu intelligere quilibet valebit.

Impariter imparium creatio.

¶Imparium numerorum linea, ad modum costæ quadrati sita, & in infinitum protensa.

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69
3	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
	5	49	63	77	91	105	119	133	147	161
		7	81	99	117	135	153	171	189	207
			9	121	143	165	187	209	231	253
				11	169	195	221	247	273	299
					13	225	255	285	315	345
						15	289	323	357	391
							17	361	399	437
								19	441	483
									21	329
										23

¶Imparium numerorum linea, ad modū diametri quadrati sita, & in infinitū protensa.

¶In hac suprapoſita figura,generationem impariter imparium numerorum facile est reperire.

11 ¶Numerus primus,est numerus quem sola metitur vnitas.

¶Vt 2 & 3 & 5.nullum autem reperies numerum qui aliquoties sumptus,2 vel 3 vel 5 efficiat.sola igitur vnitas est illa, quæ non modo impares numeros, verumetiam omneis & pares,& impares metitur.Primum & incompositum numerum Boetius nominauit,quem Euclides,post quem nos, primum diffinimus. ¶ Horum autem primorum numerorum generationem reperies accepta imparium numerorum linea, si ab eadem impariter impares numeros abstuleris,quod hoc pacto fieri potest. Disponantur impares numeri secundū ipsorum naturalē seriem: & si cūctos numeros subtrahas, qui æqua scalaritate (à 3 incipiendo) cōtinuo per tres numeros distāt,& à 5,per,quinque, & à septenario per septem, & sic consequenter, cæteri manentes, primi dicentur numeri. Verbi gratia, subtrahat 9, qui à 3 per tres numeros distat,& 15, qui à 9 per tres pariter distat,& 21,qui à 15 etiā per tres numeros distat,& sic consequenter. Deinde subtrahe 15,qui à 5,per quinq; numeros distat,& 25,qui à 15 per quinque eodē modo distat:& 35,qui à 25 per 5 numeros elongatur.& sic de alijs.Postmodū 21 subtrahe, qui à 7 per septem numeros recedit:& 35,qui à 21 per 7 etiam distat:& 49,qui à 35 per septem distat numeros: & si hoc pacto deinceps procedas, genitam inuenies primorum lineam. Sequitur exemplum.

Primorū numerorum creatio.

Linea imparium numerorum		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Linea primorum numerorum	2	3	5	7		11	13		17	19		23	25

¶ Numeri adinuicem primi, sunt numeri quos communi mensura sola vnitas metitur. 12

¶ Vt 2 & 3. etiam 3 & 4. similiter 8 & 15. Et quãuis 8 præter vnitatẽ, 2 & 4 habeat mensuras, sicut & 15 ternarium & 5: quia nulla tamen illarum cõmunicant, ideo numeri adinuicem primi dicuntur. Patet igitur ex diffinitione 8 & 15 primos adinuicem esse numeros: primi autem esse non possunt, cum neuter illorum sit primus. Et quoniam vnico documento, vnicáve regula huiuscemodi numerorum adinuicem primorum generatio cõprehendi nequit: ideo in eius inquisitione longius æquo immorari refutamus.

¶ Numerus compositus, est numerus qui aliquo numero metitur. 13

¶ Vt 6, 8, 9. quilibet istorum, præter vnitatem, aliquem habet numerum, qui aliquoties sumptus ipsum totum efficiat. 6 enim, 2 habet, qui ter sumptus, 6 componit. & si quater accipiatur, 8 reddit. sed nouenariũ, 3 mensurat: cum ter tria, 9 generent. Hũc, quem compositum numerum significamus: Boetius, & plęriq; alij, secundum, & incompositum numerum dixerũt. ¶ Horum compositorũ generatio, facile admodum comprehendi potest, intellectis quæ in 11 diffinito dicta fuere. Vnde si à data impariũ numerorum linea cunctos impariter impares numeros abstuleris, arte & modo prius signatis, & cum eisdem abstractis, cunctos etiam numeros pares (à 4 incipiendo) sumpseris: omnes numeros compositos procreatos habebis. Exemplum.

[Compositorum generatio.]

Linea ipariũ nũerorũ	3		5		7		9		11		13		15		17		19		21	
Linea ipariter ipariũ							9						15						21	
Linea pariũ nũerorũ		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22
Linea compositorũ		4		6		8	9	10		12		14	15	16		18		20	21	22

¶ Numeri adinuicem compositi, sunt numeri quibus aliquis numerus est pars aliquota, siue communis mensura. 14

¶ Vt 4 & 6, quos 2 metitur. pari modo 6 & 8, cum ipsos 2 dimetiatur. etiam 9 & 12, quibus 3 est pars aliquota, & cõmunis mẽsura. 9 & 25. etsi cõpositi sint numeri: nõ tamen adinuicẽ sunt compositi, cũ nullus numerus cõmuni dimensione ipsos metiatur. ¶ Nullam numerorum adinuicem cõpositorum assignamus generationẽ: vtpote quia per lõgas oporteret ire ambages, & adhuc nullũ inde contractũ haberetur documentũ.

¶ Numerus compositus, ad alterum vero primus, est numerus compositus alteri numero cõparatus, quibus sola vnitas est cõmunis mẽsura. 15

¶ Vt 6 in ordine ad 7. si enim 6 secundũ se tantũ concipiatur, compositus est, cũ ipsi numerus 2 sit mensura. ipse tamen ad 7 relatus, compositus ad alterum primus dicitur, ex eo ꝙ sola vnitas ipsis est cõmunis mẽsura. Itẽ 8 ad 9 relatus, talis est numerus, sicut & 9 ad 25. ¶ Eadem est numeri copositi, & ad alterum primi generatio, cum numeri cõpositi generatione: cũ sit ita omnem numerum compositũ, & ad alterũ primũ numerum, compositũ esse, & ediuerso: hac sola differunt ratione, ꝙ compositus simpliciter secundum se consyderatur, & numerus ad alterum primus, alteri refertur.

[Compositi, & ad alterũ primi generatio.]

¶ Numerus abundans, est numerus cuius summã omnes in vnum adiunctæ partes aliquotæ excedunt. 16

¶ Vt 12, cuius 1, 2, 3, 4, 6, partes aliquotæ simul acceptæ, 16 componunt, qui 12 maior est numerus. Pari ratione dicendum est 24 & 48, numeros abundantes esse. ¶ Horũ autẽ abundantiũ numerorũ propagationem nullã assignamus: quippe quæ adeo fertilis, atq; deuia est, ac hominũ caterua quæ virtutis superabundans insequitur extremũ.

¶ Numerus diminutus, est numerus cuius omnes partes aliquotæ simul collectæ, suum numerum non attingunt. 17

¶Vt 8, cuius partes aliquotæ, quæ sunt 1, 2, 4, dũtaxat 7 cõplẽt. Idem de 9 & 10 dicẽdum est. Appellatur etiã imperfectus, quẽ diminutũ numerũ diffinimus. ¶Mutilis, & diminuta diminutorũ numerorũ educatio reperitur. Nam cũ in deficiendo, non minus q̃ in superabundãdo peccatũ attribuatur: sic in diminutis, perinde atque in abundantibus inordinata generatio inuenitur: quare tanquam ruinosa à nobis non est quærenda.

18 ¶Numerus perfectus, est numerus par, cuius omnes aliquotæ simul collectæ partes, suum numerum complent.

¶Vt 6, cuius omnes partes aliquotæ, videlicet 1, 2, 3, suum numerum scilicet 6, efficiunt. Etiam 28, & 496. perfecti numeri dicuntur. ¶Pro perfectorum numerorum generatione, ab vnitate incipies, cunctos pariter pares secundum ipsorum lineam disponendo, & illorum ordinata fiat additio: & quotiescunque ex tali additione numerus primus consurgat, illum per maiorem addendorum multiplicabis: & creatus ex tali ductu, numerus perfectus nuncupabitur. Exempli gratia, si 2 pariter parem addas vnitati, efficitur 3, qui numerus est primus, eo q̃ sola metitur vnitate. hunc igitur 3 si per 2 multiplices, 6 generabis: qui primus numerus perfectus est. Deinde si 1, 2, 4, simul addantur, consurget 7, numerus primus: quem si in 4 ducas, 28 generabis, qui secundus numerus perfectus dicitur. Item si 1, 2, 4, 8, addantur, 15 resultabit, qui non primus, sed compositus est numerus: ideo illo prætermisso, consequenter procedas, 1, 2, 4, 8, 16, simul colligendo: & proueniet 31 qui primus est numerus. illum igitur si per 16 multiplices: numerus 496 emanabit, qui perfectus, & tertius est in ordine. Et si cõsequenter taliter operando procedas: omnes quidem perfectos poteris generare numeros. Vt autem quæ dicta *sunt, solidius intelligere* valeas: præsentem numerorum respice formam.

Perfectorum numerorũ gñatio.

Linea pariter parium numerorum	1	2	4	8	16	32	64
Linea perfectorum numerorum		6	28		496		8128

Corollarium. Ex his sequitur numeros perfectos interpollata terminatione, vtpote senaria, & octonaria inueniri. Nam primus in senario finitur, quoniam ipse 6 est: & secundus in 8, cum sit 28. tertius in senario, quartus in octonario, & consequenter hoc pacto.

DE RELATO AD ALTERVM NVMERO, tractatus secundus.

Hesiod⁹. EX sese qui omnia nouit, optimum vocat Hesiodus poeta. Quare omnia quæ in præsenti tractatu se offerunt dicenda, optimo relinquo Deo, qui ex sese omnia nouit. oportet enim seipsum homo cognoscat, antequam philosophari incipiat. Imò tunc incipit homo philosophari, cum seipsum incipit cognoscere, vt inquit Demonas. *Dæmonas* Nam cum turpe aliquid egerit quisquam, ne putet latere posse, Isocrates dicebat. *Isocrates* In hoc igitur secundo tractatu, quinq; & viginti erunt diffinita de relato ad alterum numero discernentia: quæ lectoribus pulchra (meo quidem iudicio) videbuntur. Q̃ si turpe aliquid sit reperire: eos omnes exoratos velim habere, à quibus hoc tale deprehẽdetur, in dexteriorẽ partem interpretentur. Nec prætereundũ est duos duntaxat in hac parte numeros esse capiendos: eum videlicet qui ad alterum refertur, & eum ad quem alter numerus cõparatur. Is enim numerus ad alterũ refertur, cuius denominatio duos indifferenter primos casus sortitur: & ei numero alter numerus comparatur: cuius nuncupatio poscit accusatiuum, præpositione, ad, præcedente: vt 9 ad 3. primus nanq; numerus, puta 9, in recto, siue in genitiuo est exprimẽdus: & secũdus in accusatiuo: & de cæteris pari modo. Et pro huius tractatus cõplemẽto, quinq; vniuersales regulas annectemus: quibus prompte, atq; erudite primos terminos, siue primos numeros proportionales in omni proportionum genere poteris inuenire.

Numer⁹ ad alterũ relatus.

¶Numerus proportionalis, est numerus qui ad alterum refertur, vel ad quem alter numerus comparatur. 1

¶Verbi gratia, si 3 binario cōparetur, 3 relatus, & 2 cui refertur, numerus proportionalis appellatur. Et si 5 vnitati, & 6 octonario cōparentur, tam numeri cōparati, q̄ hi ad quos referūtur, numeri proportionales dicentur. Illa vero quæ 3 ad 2, 5 ad 1, 6 ad 8, inuenitur habitudo, proportio (seu ratio secundū Euclidē) nūcupatur. Vnde proportio, est certa duorū numerorū habitudo. Et quāuis vnitas proprie numerus nō dicatur: in proposito tamē, numeri appellationē obtinet. & per cōsequens si ad ipsam aliquis numerus comparetur, vel ad aliquem ipsa referatur: vterq; numerus proportionalis cēsebitur. ¶Generatio autē omniū proportionaliū numerorū, pariter & proportionū haberi potest: si tota naturalis numerorum series cuilibet eiusdem numero comparetur.

Euclides. Proportio quid.

Proportionaliū gñatio.

¶Aequalitas, est numerus æquali numero comparatus. 2

¶Vt 2 ad 2, 3 ad 3, 4 ad 4. in datis exemplis, vterq; cōparatorum æqualitas nominatur. cum enim 2 binario refertur, 2 relatus dicitur æqualitas: & 2 cui refertur pari modo æqualitas nuncupatur. Eodem modo 3 ad 3, 4 ad 4, vterq; relatorū æqualitas exprimitur. Sed illa quæ 2 ad 2, 3 ad 3, 4 ad 4, reperitur habitudo, proportio æqualitatis appellatur. Nā proportio æqualitatis, est certa duorum numerorum æqualiū habitudo. Aduerte tamen illum numerum alteri esse æqualem, qui ex æque multis consurgit vnitatibus: inæqualē vero, qui ex pluribus, aut paucioribus. Nam si ex pluribus constet, maior numerus dicitur: quòd si ex paucioribus aggregetur, minor numerus nuncupatur. ¶Generatio æqualitatum, siue ęqualium numerorum, pariter & proportionum ęqualitatis facile habetur: si datis lineis naturaliū numerorum secundum sub & supra dispositis, vnius omnes numeros ad sibi correspondentes in altera comparaueris.

Proportio ęqualitatis.

Æqualiū tū numerorum tū proportionū generatio.

¶Inæqualitas, est numerus inæquali numero comparatus. 3

¶Exemplum: 8 ad 4, 4 ad 2, 6 ad 7. Cū autem 8 comparatur 4: tam 8 q̄ 4 inæqualitas dicitur. Pari modo si 4 binario, & 6 septenario referātur, vterq; comparatorū inæqualitas nominabitur. Illa vero quę 8 ad 4 inuenitur habitudo, sicut & 4 ad 2, 6 ad 7, inæqualitatis proportio exprimitur. Vnde proportio inæqualitatis, est certa duorū numerorum inæqualium habitudo. ¶Pro generatione inæqualitatum, siue inæqualium numerorum, simul & proportionum inæqualitatis: accipiatur naturalis linea numerorum, & eius primo numero, videlicet vnitati, quilibet sequens comparetur, & ediuerso vnitas cuilibet sequentiū numerorum referatur: deinde eius secūdo numero, scilicet 2, quilibet sequentium numerorum comparetur. & econtra 2 cuilibet sequentium referatur: postmodum tertio eius numero quilibet sequentium comparetur, & econuerso. & si hoc pacto deinceps in infinitum fiat processus: propositum emanabit.

Proportio inæqlitatis. Inæqualium numerorū & proportionū generatio.

¶Maior inæqualitas, est numerus maior minori numero cōparatus. 4

¶Verbi gratia: 8 ad 4, 6 ad 3, 4 ad 1. Si autem 8 cōparetur 4: comparatus 8, maior inæqualitas dicitur. Consimili modo si 6 ad 3, & 4 ad 1 referatur, tam 6 quàm 4 maior inæqualitas exprimetur. Sed quæ 8 ad 4, 6 ad 3, 4 ad 1 reperitur habitudo, proportio maioris inæqualitatis nuncupatur. Nam proportio maioris inæqualitatis, est certa maioris numeri ad minorem habitudo. ¶Generantur maiores numeri, qui maiores inæqualitates dicuntur, similiter & proportiones maioris inæqualitatis, accepta naturali numerorum serie: si primo eius numero, videlicet 1, omnes numeros sequentes comparaueris: deinde si secundo eiusdem lineę, scilicet 2, cunctos sequentes referas: item si tertio, puta 3, omnes sequentes comparentur, & hoc pacto deinceps.

Proportio maioris inæqlitatis & eius procreatio.

¶Minor inæqualitas, est numerus minor maiori numero cōparatus. 5

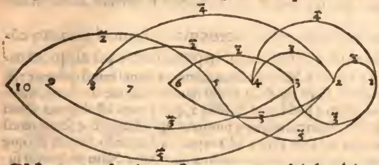
Vt 2 ad 4, 3 ad 6, 1 ad 8. Si enim 2 ad 4 referatur: 2 relatus, minor inæqualitas dicitur. Etiam si 3 ad 6, & 1 ad 8 referantur: & 3 & 1, minor inæqualitas appellatur. Quæ tamē 2 ad 4, 3 ad 6, 1 ad 8 inuenitur habitudo, proportio minoris inæqualitatis nuncupatur. Vnde proportio minoris inęqualitatis, est certa minoris numeri ad maiorem habitudo. ¶Procreantur numeri qui minores inæqualitates appellantur, pariter & pro-

Proportio minoris īæqualitatis & eius generatio.

portiones minoris inęqualitatis, natuali numerorum linea accepta: ſi primus numerus, ſcilicet vnitas, cuilibet ſequentium comparetur: deinde ſi ſecundus, videlicet 2, cuili- bet etiam ſequẽtium referatur: poſtmodum ſi tertius cuilibet pariter ſequẽtium com- paretur, & hoc modo conſequenter.

6 ¶ Numerus multiplex, eſt numerus maior minori numero relatus, quem pluries continet æque.

¶ Exemplum: 2 ad 1, 6 ad 2, & 12 ad 3. Nam 2 maior numerus, bis continet 1, quæ mi nor eſt numerus, & nihil aliud. Pari modo 6 maior numerus ad 2 minorem numerum comparatus, multiplex eſt: cum eum ter æque contineat. Sic 12 ad 3 relatus, multiplex eſt numerus: eum enim quater continet, & nihil aliud. Illa autem quæ 2 ad 1 reperitur habitudo, proportio multiplex nominatur. Eodem modo quæ 6 ad 2, & 12 ad 3 inue- nitur habitudo, proportio multiplex eſt dicenda. Nam proportio multiplex, eſt propor tio, cuius maior numerus minorẽ pluries æque continet. Numerus autem multiplex, ſicut & proportio multiplex, in infinitas diſtribuitur ſpecies. Prima numeri multiplicis ſpecies eſt duplus, ſecunda triplus, tertia quadruplus, & hoc pacto deinceps. Propor- tionis vero multiplicis, prima ſpecies eſt dupla, ſecunda tripla, tertia quadrupla, & cõ- ſequenter eo modo. Numerus enim multiplex, ſimiliter & proportio, peculiarem ſu- munt denominationem à numero vicium, quibus maior numerus minorem continet. Vnde ſi maior numerus minorem, cui refertur, bis ſolum contineat, duplus nominabi- tur: & inter ipſos habitudo, proportio dupla dicetur. Si numerus maior minorem ter includat, triplus dicetur: & inter eos habitudo, proportio tripla. Quòd ſi maior nume- rus minorem numerum quater contineat, quadruplus nominabitur: & inter eaſdem ha bitudo, proportio quadrupla exprimetur. Sed de his ſpeciebus, earúmque contractis productionibus ſtatim fiet ſermo. ¶ Producuntur omnes multiplices numeri, ac cũctę multiplices proportiones, habita naturali numerorum ſerie, ſi vnitati 2 comparetur: deinde, proximo ſequenti neglecto, vtpote 3, ſequẽs 4 binario referatur: poſtmodum 5 abiecto, 6 ſequens ternario comparetur: item 7 prætermiſſo, qui ſequitur, 8 quater- nario referatur. & ita conſequenter in infinitum tali intercapedine obſeruata. Deinde ſi ad initium redeas, & vnitati ternarium compares, & duobus proxime ſequentibus di miſſis, ſequens 6 binario referatur: poſtea duobus etiam proxime ſequentibus negle- ctis, qui primus ſequitur, 9 ternario comparetur, & hoc pacto deinceps, ſemper bina numerorum obſeruata ſubtractione. Poſtmodum ſi iterum ad initium iuuat redire, vnitati 4 referendo, & tribus proxime ſequentibus numeris relictis, ſequens 8 binario comparetur: deinde tribus alijs, qui proxime ſequuntur extractis, qui ſe offert, 12 terna rio referatur: & hac arte conſequenter. Nam ſi in infinitum initij reitera- tio creſcat, arte & modo prætactis, omnes mul- tiplices, & numeros, & proportiones creatos in uenies. quos omnes fa- cile dat intelligere quæ hic deſcribitur figura.



Proportio multiplex.

Multiplicũ, tum numerorum, tum proportionũ generatio.

7 ¶ Numerus duplus, eſt numerus multiplex bis minorem numerum æque continens.

¶ Exemplum: 2 ad 1, 4 ad 2, 6 ad 3. Nam 2, bis ſolum 1 continet, cui refertur: quare du plus numerus eſt dicendus. Eodem modo 4, bis continet 2, & 6, ternarium: dicẽdi igi- tur ſunt ex diffinitione, numeri dupli. Illa tamen quæ 2 ad 1, 4 ad 2, 6 ad 3 inuenitur habitudo, proportio dupla nominatur. Vnde proportio dupla, eſt proportio multiplex, cuius numerus maior minorem bis continet æque. ¶ Producũtur omnes numeri du-

Proportio dupla, eiuſdẽ q; procreatio.

pli, pariter & duplæ proportiones, accepta naturali numerorum serie: si illi supponatur naturalis numerorum parium linea, & continua fiat relatio primi paris ad primum superioris lineæ numerum, & secundi paris ad secundum suprapositum, & tertij ad tertium, & hoc pacto deinceps. Exemplum.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Linea duplorum numerorum	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28

¶Numerus triplus, est numerus multiplex ter æque minorem numerum includens. 8

¶Exemplũ: 3 ad 1, & 6 ad 2, & 9 ad 3. Si enim 3 vnitati cõparetur: 3 cõparatus (postquam adæquate 1 ter cõtinet) dicendus est numerus triplus. & eodẽ modo si 6 binario referatur, & 9 ternario: vterq; illorum triplus numerus denominabitur. Sed quæ 3 ad 1, 6 ad 2, 9 ad 3 habitudo reperitur, proportio tripla nuncupatur. Nam proportio tripla, est proportio multiplex, cuius maior numerus minorem ter cõtinet æque. ¶Generantur omnes numeri tripli, cunctæ etiam triplæ proportiones: habita naturali numerorũ serie, & hoc loco superiori, si illi supponatur linea à 3 inchoata, infinitorum numerorũ se continuo ternario excedentium: cuius primus numerus primo superioris lineæ comparetur, & secũdus secundo, & tertius tertio: & consequenter hoc modo. Exemplum.

Proportio tripla, ac eiusdẽ productio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Linea triplorum numerorum	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

¶Numerus quadruplus, est numerus multiplex, quater æque minorẽ numerum intercipiens. 9

¶Exemplum: 4 ad 1, 8 ad 2, 12 ad 3. Nam si 4 vnitati referatur (postquã ipsam quater præcise continet) dicendus est quadruplus. Pari modo 8 ad 2 comparatus, quadruplus appellatur: sicut & 12 si ad 3 referatur. Quæ tamen 4 ad 1, 8 ad 2, 12 ad 3 inuenitur habitudo: proportio quadrupla est censenda. Vnde proportio quadrupla, est proportio multiplex, cuius numerus maior minorẽ quater continet æque. ¶Consurgunt omnes numeri quadrupli, sicut & omnes quadruplæ proportiones, accepta naturali numerorum linea: si illi subijciatur vna alia à 4 incepta, quæ infinitos cõtineat numeros, se continuo per 4 excedentes: quorum primus primo superioris lineæ referatur, & secundus secundo, tertius tertio: & consequenter eo modo. Exemplum.

Proportio quadrupla, eiusdẽmq; creatio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Linea quadruplorum numerorũ	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52

Cæteræ multiplices species quæ sequuntur, clare admodum se offerunt, intellectis iam tactis speciebus.

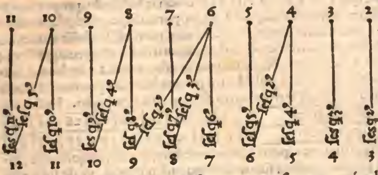
Cæteras multiplices species licebit videre in tabula Pythagorica, i qua quidẽ tota est proportio numerorum ad primã seriẽ, quota fuerit linea descendens, quæ numeros illos cõtinet. vt q secũda linea cõtinentur numeri, ad numeros superiores omnes sunt dupli: & tertia, tripli: quarta, quadrupli: quinta quintupli &c.

¶Numerus superparticularis, est numerus maior minori numero cõparatus, quem tantũ semel, & eius aliquam partẽ intercipit aliquotam. 10

¶Exemplum: 3 ad 2, 4 ad 3, 5 ad 4. Nam 3, maior numerus, semel tantũ continet 2, & vltrà, 1. quę est pars aliquota 2. Eodẽ modo, 4 maior numerus, ternario relatus, superparticularis dicitur: cõtinet enim 3 solũ semel, & vltrà 1, quæ 3 pars est aliquota. Consimili modo, 5 ad 4 cõparatus, superparticularis numerus appellatur: cũ 4 semel tantũ cõtineat & 1, partẽ aliquotam 4. Quæ vero 3 ad 2 reperitur habitudo, sicut & illa quę 4 ad 3, & 5 ad 4 reperitur: proportio superparticularis nũcupatur. Nam proportio superparticularis, est proportio cuius maior numerus minorem tantũ semel continet, cũ aliqua eius parte aliquota. Numerus superparticularis, quẽadmodũ & proportio superparticularis, infinitas habet species. Prima numeri superparticularis species est sesquialter, siue sesquimedius, aut sesquisecũdus: secunda sesquitertius: tertia sesquiquartus, & hoc pacto cõsequẽter. Proportionis autẽ superparticularis prima species est sesquialtera: secũda sesquitertia: tertia sesquiquarta: & sic deinceps. Cõtrahũt autẽ specialẽ denominationem numerus superparticularis, similiter & proportio, à parte aliquota minoris numeri in maiori numero cõtenta, adiũcta semper hac particula, sesqui. Vnde si maior

numerus minorem,cui refertur,semel tantum contineat,& vltrà,illius medietatem:sesquialter,siue sesquimedius nominabitur:& inter ipsos habitudo,proportio sesquialtera dicetur. Si vero numerus maior minorem tantũ semel continet,& vltrà,eius tertiam partẽ,sesquitertius exprimetur:& inter ipsos habitudo,proportio sesquitertia denominabitur. Qꝫ si numerus maior minorẽ semel tantũ,& vltrà,quartã minoris partẽ aliquo tam habeat,sesquiquartus dicetur:& quę inter ipsos inuenitur habitudo,proportio sesquiquarta nũcupabitur. Sed de his speciebus exactius statim fiet sermo. ¶Generãtur omnes superparticulares numeri,similiter & proportiones, acceptis duabus lineis naturalium numerorũ: quarum prima à 2 inchoetur,& superius sit sita:secunda vero à 3 initium sumat,& sub alia situetur:ita vt primus inferioris lineæ numerus,superioris primo correspondeat,& secundus secũdo,& tertius tertio:& sic consequẽter. Deinde,si primus inferioris lineæ numerus,videlicet 3,superioris primo,vtpote 2 comparetur,cõparatus 3,superparticularis numerus dicetur:& habitudo inter ipsos reperta,superparticularis proportio nuncupabitur. Postmodũ si duobus numeris,immediate sequentibus 3,substractis,qui sequitur 6,illi numero superioris lineæ cõparetur qui sequitur 2, vno numero interiecto, scilicet 4:numerũ,& proportionẽ superparticularẽ generabis. Item si omissis duobus numeris inferioris lineæ immediate sequẽtibus 6,sequens 9 illi numero superioris lineæ referatur,qui statim sequitur 4,post 5:& numerum,& proportionẽ superparticularẽ produces. Et si hoc pacto cõsequẽter procedas,ab inferiori linea duos numeros eadem vicissitudine subtrahendo, vbi à superiori vnus tantũ deponatur, & inferioris ad superiorẽ assidua cõparatio fiat: productos inuenies infinitos numeros superparticulares,etiam infinitas proportiones. Deinde si iterũ ad initiũ redeas,& secũdus inferioris lineæ numerus scilicet 4,secũdo superioris cõparetur:postmodũ tribus numeris proxime sequẽtibus 4,inferioris lineę semotis,qui sequitur,8,numero statim sequenti 3 in linea superiori post duorũ proxime sequentiũ ablationẽ,referatur,vtpote 6: numerũ,& proportionem superparticulares generabis. Et postea tribus etiam numeris proxime sequẽtibus 8 inferioris lineæ ablatis, si sequẽs 12 illi superioris lineæ cõparetur,qui sequitur 6 immediate,post duorũ numerorũ proxime sequẽtium remotionẽ:numerus & proportio superparticulares producẽtur. Et si eo modo consequẽter procedas obseruata cõtinua triũ numerorũ ablatione in inferiori linea,vbi à superiori duorũ numerorũ dũtaxat fit remotio,& semper inferiorũ ad superiores fiat cõparatio:infinitos,& numeros & proportiones superparticulares inuenies. Consequẽter si iterũ ad initium redeas,& tertius inferioris lineę numerus,videlicet 5,tertio superioris referatur,videlicet 4, & interpollata fiat quatuor numerorũ in inferiori linea subtractio, & in superiori solũ triũ,modo,& arte declaratis:infinitos numeros,& proportiones superparticulares generabis. Et si hæc initij reiteratio in infinitũ crescat, obseruatis numerorum subtractionibus se cõtinue per vnitatẽ excedẽtibꝰ:omnes numeros superparticulares,& proportiões inuenies procreatos,quos poteris præsenti figura dignoscere.

Super particularium generatio.



¶Numerus sesquialter,est numerus superparticularis, qui semel tantum minorem cui refertur intercipit, & eius medietatem.

¶Vt 3 ad 2,6 ad 4,9 ad 6. Nempe si 3 binario comparetur,3 relatus,sesquialter numerus dicetur:quoniam semel tantum continet 2,& vltra, 1. quæ 2 est medietas. Eodem modo si 6 ad 4,& 9 ad 6 referantur: vterque & 6 & 9 sesquialter appellabitur. Illa vero quę 3 ad 2,6 ad 4,9 ad 6 inuenitur habitudo:sesquialtera proportio dicetur.

Nam proportio sesquialtera, est proportio superparticularis, cuius maior numerus minorem semel tantũ continet, & vltra, minoris medietatẽ. ¶ Emanant cuncti sesquialteri, pariter & proportiones: duabus lineis acceptis, quarũ altera sit parium numerorum loco superiori sita, altera infinitorũ numerorũ assiduo ternarij excessu progredientium à 3 inchoata, & inferiori interuallo fixa: si huius primus numerus superioris primo cõparetur, & secũdus secundo, & tertius tertio, & hoc pacto deinceps. Exemplum.

Proportio sesquialtera, sesquialterorúmq; gñatio.

Linea parium numerorum	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Linea sesquialterorum numerorũ	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36

¶ Numerus sesquitertius, siue epitritus, est numerus superparticularis, tantum semel minorem includens, eiúsq; tertiam adhuc partem. 12

¶ Vt 4 ad 3, 8 ad 6, 12 ad 9. Nam si 4 ad 3 referatur, comparatus 4, sesquitertius numerus dicetur: cum minorẽ, cui refertur, semel duntaxat includat, vltráq; 1, quę 3, tertia pars est aliquota. Pari modo dicendum est vbi 8, senario comparatur, & 12 ad 9 refertur, relatorum vtrunq; sesquitertium appellari. Sed quæ 4 ad 3, 8 ad 6, 12 ad 9 inuenitur habitudo, proportio sesquitertia censebitur. Nam proportio sesquitertia, est proportio superparticularis, cuius maior numerus minorem semel tantum cõtinet, & eius tertiam partem. In diffinito sub disiunctione posui sesquitertius, siue epitritus, & hoc ea de causa, vt vberiorem habeas vocabulorum idem significantium intellectum. Nam numerus qui minorem semel tantum intercipit, & vltra, tertiam minoris partem aliquotam, sesquitertius, seu epitritus nũcupatur: & proportio inter tales numeros inuenta, sesquitertia, siue epitrita exprimitur. ¶ Generãtur omnes sesquitertij, ac cunctæ sesquitertiæ proportiones, captis duabus numerorum lineis, quarum vna à 3 inchoetur, & infinitos numeros se continua ternarij additione exuperãtes, includat: altera vero à 4 sumat initium, & in infinitum sit protensa, per assiduam numerorum se 4 excedẽtium positionem: si huius lineæ primus numerus primo superioris lineæ comparetur, & secundus secundo, & tertius tertio, & consequenter hoc modo. Exemplum.

Proportio sesquitertia.

Sesquitertiorũ gñatio.

Linea numerorum se 3 excedentium	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Linea numerorum sesquitertiorum	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

¶ Numerus sesquiquartus, est numerus superparticularis, qui minorẽ semel tantum includit, & quartam eius partem. 13

¶ Vt 5 ad 4, 10 ad 8, 15 ad 12. Nam si 5 quaternario cõparetur, 5 relatus 4, sesquiquartus numerus dicetur: cõtinet enim cui refertur 4, semel tantum cũ ipsius quarta parte. Eodẽ modo cẽsendũ erit si 10 ad 8, & 15 ad 12 referãtur, eosdẽ relatos, sesquiquartos numeros appellari. Ea tamẽ quę 5 ad 4, 10 ad 8, 15 ad 12 emanat habitudo, proportio sesquiquarta nominatur. Nã proportio sesquiquarta, est proportio superparticularis, cuius numerus maior minorẽ semel tantũ cõtinet, & quartã eius partẽ. ¶ Pullulãt omnes numeri sesquiquarti, similiter & proportiones, duab9 numerorũ lineis assũptis, quarũ vna à 4 incœpta, infinitos sese 4 excedẽtes cõtineat numeros, altera autẽ à 5 inchoata, infinitos pariter numeros sese 5 exuperãtes possideat: si primus hui9 lineę numerus primo illius cõparetur, & secũdus secũdo, & tertius tertio, & deinceps hoc pacto. Exẽplum.

Proportio sesquiquarta. Sesquiquartorũ generatio.

Linea numerorum se 4 excedentium	4	8	12	16	20	24	28	32	36
Linea numerorum sesquiquartorum	5	10	15	20	25	30	35	40	45

¶ Quæ sequuntur superparticulares species, vtpote sesquiquintus, sesquisextus, sesquiseptimus, & cæteri: si priorum habita fuerit doctrina, adeo patent, vt de ipsis amplior processus non deceat fieri.

¶ Numerus superpartiẽs, est numerus maior, qui ad minorem numerum comparatus, ipsum semel tantum continet, & eius aliquot partes aliquotas, nullam respectu minoris aliquotam efficientes. 14

¶ Vt si cõparetur 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5. Nam 5 maior numerus cõtinet 3 semel tantũ: & vltra, duas vnitates, partes aliquotas 3, nullam respectu eiusdẽ partẽ aliquotam cõpo

nentes. Pari modo 7 numerus maior, ſemel tantum cõtinet 4, & vltrà, tres vnitates, quæ 4 ſunt partes aliquotæ, nullam tamen reſpectu eiuſdem 4 efficientes aliquotam: quare dictus 7 ſuperpartiens numerus dicetur. Eodem modo 9 ad 5 relatus, numerus ſuperpartiens eſt dicendus: cum ſemel tantum contineat 5, & vltrà, quatuor 5 partes aliquotas, nullã aliquotam reddentes in ordine ad 5. Sed quę 5 ad 3 inuenitur habitudo, ſicut & illa quæ 7, ad 4, 9 ad 5 reperitur: dicenda eſt proportio ſuperpartiens.

Proportio ſuperpartiens.

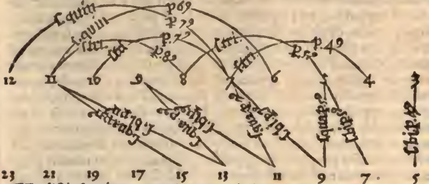
Nã proportio ſuperpartiens, eſt proportio cuius maior numerus minorem ſemel tantum continet, & vltrà eius aliquot partes aliquotas, nullã reſpectu minoris partem aliquotam cõponentes. Numerus ſuperpartiens, ſimiliter & proportio, infinitas obtinet ſpecies. Prima numeri ſuperpartientis ſpecies, eſt ſuperbipartiens: ſecunda, ſupertripartiens: tertia, ſuperquadripartiens: & hoc pacto deinceps. Proportionis ſuperpartientis ſpecies, eiſdem appellationibus nuncupatur. Numerus ſuperpartiens, & etiam proportio, ſpecialẽ ſumunt denominationẽ à partibus aliquotis minoris numeri in maiori numero contentis, differenter tamen: nã numeri ſuperpartientis denominatio eſt in recto numeri ſingularis, ſed proportionis appellatio, eſt in accuſatiuo numeri pluralis. Ideò ſumme conſyderanda taliũ partiũ denominatio. Nã ſi maior numerus minorẽ (cui refertur) ſemel tantũ cõtineat, & vltrà duas numeri minoris partes aliquotas, quę tertiæ denominantur: numerus ille maior ſuperbipartiens tertias dicetur: & inter ipſos numeros reperta habitudo, proportio ſuperbipartiens tertias appellabitur. Si autem maior numerus minorẽ (cui cõparatur) tantũ ſemel includat, & vltrà, duas partes aliquotas minoris, quę quintę nominãtur: numerus maior, eſt ſuperbipartiẽs quintas dicẽdus: & habitudo inter ipſos numeros reperta, proportio ſuperbipartiẽs quintas vocabitur. Q̃ ſi numerus maior ſemel tantũ minorẽ cõtineat, & vltrà, tres minoris numeri partes aliquotas, quæ quartæ nũcupãtur: dicetur numerus maior, ſupertripartiẽs quartas: & inter ipſos numeros inuẽta habitudo, proportio ſupertripartiẽs quartas appellabitur. Sed de his ſpeciebus ſtatim fiet ſermo.

Superpartiẽtiũ gñatio.

¶Pro generatione numerorũ ſuperpartientiũ, ſimul & proportionũ, pręſupponendũ eſt hoc documentũ, quod in hac parte eſt maxime obſeruandũ: ſcilicet, Nullus numerus alteri cõparetur, inter quẽ, & ipſũ aliquis nũerus eſt pars aliquota. Nã pro regula tenendũ eſt: nullos nũeros efficere proportionẽ ſuperpartientẽ, quibus aliquis numerus eſt pars aliquota. Hoc igitur ſuppoſito: producuntur omnes numeri ſuperpartientes, pariter & proportiones, captis duabus lineis, quarũ prima ſit naturalis numerorum ſeries, à 3 incepta, & ſecunda ſit imparium numerorum linea, à 5 inchoata, & ſub priori linea ſita, ſi primus numerus inferioris lineæ, puta 5, primo ſuperioris cõparetur, ſcilicet 3: & ſecundus inferioris lineę, tertio ſuperioris referatur: & tertius inferioris, quinto ſuperioris: & conſequenter hoc pacto: ita vt numeri inferioris lineæ qui impares ſunt, imparibus ſuperioris lineę cõparentur. Deinde in ſola ſuperiori linea fiat cõparatio: & hoc ſic, cuilibet ſuperioris lineæ numero (præter q̃ primo) ille numer⁹ cõparetur, qui quartus eſt poſt ipſum. verbi gratia, 4 ſuperioris lineæ ſeptenario cõparetur, qui quartus eſt in ordine ad 4: & ad 5 octonarius referatur, qui etiã eſt quartus in ordine ad 5: ſed 9 ſenario nõ cõparetur, quãuis in ordine ſit quartus, & hoc quia numerus 3 eſt pars aliquota vtriuſq;: ipſis igitur prętermiſſis, 10 ſeptenario cõparetur, qui in ordine quartus eſt: & in infinitũ creſcat iſte proceſſus. Poſtmodũ fiat cõparatio inferioris lineę ad ſuperiorẽ, à tertijs numeris incipiẽdo, puta 9 inferioris, & 5 ſuperioris, & cuncti ſequentes numeri in linea inferiori, cunctis imparibus ſequentibus in linea ſuperiori cõparentur: ita vt 9 inferioris lineæ, 5 ſuperioris cõparetur, & 11 inferioris ad 7 ſuperioris referatur, & 13 ad 9. & hoc pacto cõſequenter. Deinde iterũ in ſola ſuperiori linea fiat cõparatio, à 6 quarto numero incipiendo: cui ſextus in ordine referatur, videlicet 11: poſtea ſeptenario ſextus in ordine, ſcilicet 12 cõparetur: & octonario 13. & hoc pacto deinceps. Poſtmodũ linea inferior ſuperiori cõparetur modo iã dicto: ſed cõparatio à q̃ntis numeris incipiet, ſcilicet 13 inferioris, & 7 ſuperioris. Deinde iterũ ĩ ſola ſuperiori ſerie fiat cõparatio modo iã dicto, quę ab 8 incipiet: cui octauus nũerus in ordine puta 15 referatur: & cõſequẽter, vt ſupra dictũ eſt, fiat progreſſus. Et breuiter ſẽper quãdo in ſola ſuperiori linea fit cõpara-

☞ Iſta diffinitio intelligitur de partib⁹ numeri minoris, quæ ſimul ſũptæ nõ efficiũt vnam eius partẽ aliquotã: vt duę vnitates ſimul ſũptæ nõ cõſtituũt aliquã partem ternarij, ſic tres vnitates nõ ſunt pars aliquota 7 aut 5, neq; 8 aut 4. Vnde notandum, ſi maior contineat minorẽ, ad quẽ cõparatur, & inſuper eius aliquot partes, quę ſimul ſũptę vnã minoris partem efficiunt: numerus maior nõ ſuperpartiẽs, ſed ſuperparticularis dicẽdus eſt. atque hoc eſt inter eos diſcrimẽ ſtudioſe obſeruãdum. vt 8 ad 6 ſuperat hunc duabus vnitatibus, q̃ ſimul ſumptæ tertiã partem 6 efficiunt. vnde ſuperparticularis, epitritus, nõ ſuperpartiens dicetur 8 ad 6 relatus.

tio,ipsa incipit à numero pari,cui numerus ille debet referri,qui totus est ab illo,quota est ab vnitate denominatio illius numeri paris. Et si in infinitũ tali intercapedine procedas:cunctas species numeri superpartiẽtis, & proportionis inuenies. Et si omnia indiuidua producta cupis habere: id facies, vtraq; lineã assignatã duplando,triplando, quadruplãdo, & consequenter: si productos numeros (vt dictũ est) comparaueris. Nũc autẽ respice (vt q̃ dicta sunt, clarius intelligere valeas) p̃sẽtis figuræ cõpositionẽ.



¶Ex dictis sequitur,ꝙ omnis proportio superpartiens,cuius immediata denominatio sequens ly super est par,generatur ex cõparatione inferioris lineæ ad superiorẽ: omnis vero proportio cuius talis denominatio est impar,producitur ex sola numerorũ superioris lineæ comparatione. volo dicere omnes proportiones superbipartientes,superquadripartientes,supersextipartientes &c. ex comparatione inferioris lineæ ad superiorem (modo prius signato) produci: omnes autem proportiones supertripartientes, superquintipartientes,superseptipartientes &c. ex sola comparatione numerorum superioris lineæ modo dicto consurgunt. Corollarium.

¶Numerus superbipartiens,est numerus superpartiens semel tantum minorem continens,& duas minoris partes aliquotas,quæ nullam respectu minoris,partem aliquotam efficiunt. 15

¶Vt 5 ad 3,7 ad 5,9 ad 7. Nam si 5 numerus maior referatur ad 3 numerũ minorem, ipse 5 relatus superbipartiens numerus dicetur:quoniam tãtum semel continet minorem,& duas vltrà minoris partes aliquotas,scilicet duas vnitates : quæ nullam respectu minoris partẽ aliquotam efficiunt. Sed postq̃ partes illæ aliquotæ tertiæ donominantur (cum sint partes 3) ideò comparatus 5 ,discretiori appellatione superbipartiens tertias dicetur. Pari modo dicendum est, si 7 quinario comparetur, ipsum 7 superbipartientem numerũ appellari:cum vltrà hoc ꝙ semel 5 includat, adhuc continet duas 5 partes aliquotas,nullam respectu eiusdem aliquotã efficientes. Et quia à 5 quintæ denominãtur,duæ illæ partes aliquotæ:ideò termino cõtractiori numerus 7 superbipartiens quintas nominatur. Cõsimili arte est dicendũ si 9 ad 7 referatur:relatũ 9 numerũ superbipartientẽ esse. Nam semel tantũ 7 includit,& vltrà,duas 7 vnitates,quæ septimæ dicuntur. Quare cõparatus 9,propria nominatione superbipartiẽs septimas dicetur. Quæ tamẽ 5 ad 3,7 ad 5,9 ad 7 inuenitur habitudo, proportio superbipartiens nominatur. Vnde proportio superbipartiẽs,est proportio superpartiens, cuius numerus maior minorẽ semel tãtũ includit,& minoris duas partes aliquotas:nullã respectu eiusdẽ aliquotã efficiẽtes. Sed si ad discretiores appellationes recurras:inuenies ꝙ habitudo 5 ad 3,proportio superbipartiẽs tertias nũcupatur:& 7 ad 5 habitudo,proportio superbipartiẽs quintas dicitur:illa vero quę 9 ad 7 reperitur habitudo,proportio superbipartiẽs septimas appellatur. ¶Generãtur oẽs numeri supbipartiẽtes,cũctę etiã proportiones,acceptis duabus lineis impariũ numerorũ:quarũ vna à 3 incipiat,& superiori loco ponatur:secunda vero,5 pro initio habeat,& sub priori locetur:si huius primus numerus,scilicet 5,primo superioris,videlicet 3,cõparetur:& secũdus secũdo, & tertius tertio &c. Deinde si vtraq; illarũ linearũ dupletur,& inferioris lineæ duplatæ primus numerus productus,superioris primo referatur: & secũdus secundo,& tertius tertio,& cõsequẽter. Postmodũ si lineę illę superiores triplẽtur, & producti numeri modo iã dicto cõparentur: & quadruplãdo,quintuplãdo,sextuplando & consequẽter hoc

Proportio superbipartiẽs

Superbipartiẽtiũ gñatio.

pacto procedas:quod intendimus reperies patefactum. Exemplum.

Superbipartientes	3	5	7	9	11	13	15
	5	7	9	11	13	15	17
Superbipartientes	6	10	14	18	22	26	30
	10	14	18	22	26	30	34
Superbipartientes	9	15	21	27	33	39	45
	15	21	27	33	39	45	51
	tripli.	quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	qnde.

Generale hoc documentũ habet Euclides libro 7, propositione 18. Si vnus numerus ĩ duos ducatur, tantus erit duorum inde productorum alter ad alterũ, quãtus duorũ multiplicatorũ alter ad alterũ. id'q; in quacũq; proportiõe se habeant numeri qui multiplicãtur per eundem numerũ, in eadem sese habebunt qui inde producũtur.

16 ¶Numerus supertripartiens, est numerus superpartiens, qui semel tantum minorem includit, & tres minoris partes aliquotas, nullam respectu eiusdem minoris aliquotam componentes.

¶Vt 7 ad 4, 8 ad 5, 10 ad 7. Nã si 7 quaternario cõparetur, ipse 7 cõparatus, supertripartiẽs numerus dicetur: continet enim semel tantũ ipsum 4, & tres vltrà vnitates, partes aliquotas ipsius, quæ respectu 4, nullam efficiunt aliquotam: & quoniã tres illæ vnitates sunt partes 4, ideò ab ipso, cuius sunt partes, quartæ denominãtur: quare numerus 7 termino magis peculiari, supertripartiẽs quartas est nominãdus. Eodẽ modo si 8 quinario referatur, 8 cõparatus, supertripartiẽs numerus dicetur: quoniã semel tãtũ 5 includit, & eius tres vnitates, partes aliquotas, nullã efficientes aliquotã respectu 5: sed quoniã tres illę partes, quintæ appellãtur, dicendus est 8 nomine magis proprio supertripartiens quintas. Cõsimili modo dicendũ est si 10 septenario cõparetur: ipsũ 10 supertripartientẽ numerũ esse: cũ 7 semel tantũ cõtineat, & eius tres vnitates, partes aliquotas, nullã aliquotã respectu 7 cõstituentes, quæ septimæ appellantur: quare numerus 10, supertripartiens septimas, nomine discretiori, appellabitur. Illa vero quæ 7 ad 4, 8 ad 5, 10 ad 7 emanat habitudo, proportio supertripartiens exprimitur. Nam proportio supertripartiens, est proportio superpartiens, cuius maior numerus minorẽ semel tantũ includit, & vltrà, tres minoris numeri partes aliquotas, quæ nullã respectu eiusdẽ numeri aliquotã partẽ efficiũt. Et si magis singulares inquiras appellationes: inuenies q; 7 ad 4, est proportio supertripartiens quartas: & 8 ad 5, proportio supertripartiens quintas. 10 vero ad 7, proportio supertripartiens septimas nuncupatur.

Proportio supertripartiens.

Supertripartientium generatio.

¶Producũtur õnes numeri supertripartiẽtes, similiter & proportiones, acceptis duabus lineis, quarũ prima à 4 incipiat, & oẽs ascẽdentes numeros includat: quorũ 3 nõ est pars aliquota: secũda vero linea, à 7 initietur, & infra primã ponatur, sic vt primus secundæ sub primo numero primæ locetur, & secundus sub secũdo, & tertius sub tertio: & hoc modo cõsequẽter: sed qlibet inferioris lineæ nũerus sibi correspõdentẽ in prima dũtaxat per 3 exuperet. Et si hui⁹ secũdę lineę primus nũerus primo superioris cõparetur, & secũdus secũdo, & tertius tertio, & cõsequẽter: deinde si ambę lineæ duplẽtur, & iterũ fiat cõparatio nũerorũ inferioris lineę ad nũeros superioris, vt in pręcedẽti diffinito dictũ est: postmodũ si triplẽtur, & fiat pariter numerorũ relatio: & si cõsequenter quadruplando, quintuplando, sextuplando procedas: propositum emanabit. Exẽplũ.

Supertripartientes	4	5	7	8	10	11	13
	7	8	10	11	13	14	16
Supertripartientes	8	10	14	16	20	22	26
	14	16	20	22	26	28	32
Supertripartientes	12	15	21	24	30	33	39
	21	24	30	33	39	42	48
	quarti	quinti.	septi.	octa.	deci.	vnde.	tride.

17 ¶Numerus superquadripartiens, est numerus superpartiens, semel tãtum minorem includens, & quatuor minoris partes aliquotas, quę nullam respectu minoris partem aliquotam efficiunt.

¶Vt 9 ad 5, 11 ad 7, 13 ad 9. Nã si 9 quinario cõparetur, cõparatus 9, superquadripar

tiens numerus erit Nã ſemel dũtaxat 5 cõtinet,& vltrà,quatuor 5 vnitates,partes aliquotas,quæ nullã efficiũt aliquotã reſpectu 5.& illæ vnitates à 5,quintæ appellantur: quare dictus 9,ſuperquadripartiens quintas dicetur. Eadẽ via, 11 ad 7 relatus, ſuperquadripartiens numerus dicitur:cũ ipſum ſemel tantũ,& eius quatuor vnitates inclu dat:quæ nullã reſpectu 7,partẽ aliquotã cõponunt:& quia ſeptenarij partes ſunt, ideò ſeptimę nuncupãtur:quare alia denominatione,cõparatus 11,ſuperquadripartiẽs ſeptimas dicetur. Cõſimili modo 13 ad 9 cõparatus,ſuperquadripartiẽs appellatur:complectitur autẽ ipſum ſemel tantũ,& quatuor vltrà vnitates,partes aliquotas 9,quæ nullã aliquotã reſpectu eiuſdẽ cõponũt:& nonę denominãtur a 9,cui9 partes ſunt aliquotę. quare cõparatus 13,diſcretiori appellatione ſuperquadripartiẽs nonas dicetur. Sed illa quę 9 ad 5,11 ad 7,13 ad 9 inuenitur habitudo,proportio ſuperquadripartiẽs nũcupatur. Nã proportio ſuperquadripartiẽs,eſt proportio ſuperpartiẽs: cuius maior numerus ſemel tantũ minorẽ intercipit, & quatuor minoris partes aliquotas,quæ nullã reddũt aliquotã reſpectu eiuſdẽ minoris. Qꝫ ſi magis proprias perquiras nominationes, inuenies ꝙ habitudo 9 ad 5,proportio ſuperquadripartiẽs quintas vocatur: & habitudo 11 ad 7,proportio ſuperquadripartiẽs ſeptimas dicitur:etiã habitudo 13 ad 9 reperta,proportio ſuperquadripartiẽs nonas nominatur.

Proportio ſuper quadripartiens.

¶Profluũt cũcti numeri ſuperquadripartiẽtes,quæq; pariter proportiones,duab9 numerorũ lineis acceptis:quarũ prior à 5 inchoetur,& infinitos numeros includat,ſe cõtinua progreſſione 2 excedẽtes:ſecũda vero à 9 incipiat,& infinitos numeros etiã contineat, ſe 2 exuperãtes,ſi huius primus primo prioris cõparetur,& ſecũdus ſecundo,& tertius tertio,& cõſequẽter:deinde ſi vtraq; iſtarũ linearũ duplẽtur,& prouenientiũ linearũ numeri eo pacto referãtur, vt primus inferioris primo ſuperioris lineæ numero, & ſecũdus ſecũdo, & tertius tertio,& conſequenter cõparenter:poſtmodũ ſi duæ illæ priores lineæ triplẽtur,& fiat numerorũ conſimilis cõparatio:& conſequenter ſi eaſdẽ quadruplãdo,quintuplãdo,ſextuplando,& hoc pacto deinceps,procedas:propoſitũ inuenies patefactũ. Exemplum.

Superquadripartientium generatio.

Superquadripartientes	5	7	9	11	13	15	17
	9	11	13	35	17	19	21
Superquadripartientes	10	14	18	22	26	30	34
	18	22	26	30	34	38	42
Superquadripartientes	15	21	27	33	39	45	51
	27	33	39	35	51	57	63
	quinti.	ſepti.	noni.	vnde.	tride.	de.qn.	d.ſep.

Cæteræ ſuperpartientes ſpecies,ſcilicet ſuperquintipartiẽs, ſuperſextipartiens, & quæ ſequuntur,ex præhabitis conſtant.

¶Numerus multiplex ſuperparticularis,eſt numerus maior qui ad minorem relatus,eũ pluries continet,& aliquã minoris partem aliquotã. 18

¶Vt 5 ad 2,7 ad 3,10 ad 3. Nã 5,bis continet 2,& vltrà,vnitatẽ,quę 2 eſt pars aliquota,ſcilicet medietas. Pari modo 7,plus ꝙ̃ ſemel continet 3,& inſuper vnitatẽ,quę 3 eſt pars aliquota. Et 10 ad 3 relatus,ipſũ ter cõtinet:& vltrà,vnitatẽ partẽ aliquotã. Quare deducitur,quẽlibet illorũ maiorũ numerorũ multiplicem ſuperparticularẽ eſſe. Sed habitudo 5 ad 2,7 ad 3,10 ad 3 inuenta, proportio multiplex ſuperparticularis nuncupatur. Vnde proportio multiplex ſuperparticularis , eſt proportio cuius maior numerus minorem pluries continet : & vltra, aliquam minoris partem aliquotam. Numerus multiplex ſuperparticularis,ſicut & proportio multiplex ſuperparticularis,infinitas continet ſpecies. Prima numeri multiplicis ſpecies,eſt duplus ſuperparticularis: ſecunda,triplus ſuperparticularis:tertia,quadruplus ſuperparticularis,& cõſequenter. Proportionis autẽ multiplicis ſuperparticularis ſpecies, eiſdẽ fere appellationibus nominãtur:nã prima ſpecies,eſt dupla ſuperparticularis:ſecũda,tripla ſuperparticularis: & tertia,quadrupla ſuperparticularis: & hoc pacto deinceps. Numerus multiplex ſuperparticularis,ex numero multiplici,&ſuperparticulari conſurgit:ꝙ enim pluries minorem contineat,à multiplici numero habet: & inſuper ꝙ aliquam aliquotam partem

Proportio multiplex ſuperparticularis.

includat, numerus ſuperparticularis permittit. Multiplex ſuperparticularis numerus, & proportio ſuperparticularis, peculiares ſibi vendicāt appellationes à vicium multitudine, quibus minorem maior numerus cōtinet, & à minoris numeri parte aliquota in maiori numero contenta, hac particula, ſeſqui, interſerta. Nam ſi maior numerus minorem, cui comparatur, bis includat, & vltrà, ipſius minoris medietatem, duplus ſeſquialter dicetur: & reperta inter ipſos habitudo, proportio dupla ſeſquialtera appellabitur. Quòd ſi numerus maior bis minorem includat, & tertiam ipſius partem, duplus ſeſquitertius nominabitur: & inter ipſos inuenta habitudo, proportio dupla ſeſquitertia exprimetur. Si vero maior numerus minorem ter contineat, & quartam adhuc minoris partem aliquotam, triplus ſeſquiquartus nuncupabitur: & habitudo inter ipſos reperta, proportio tripla ſeſquiquarta denominabitur. De his autem multiplicium ſuperparticularium ſpeciebus, diſcretior in ſequētibus fiet ſermo. ¶ Pro generatione omnium numerorum multiplicium ſuperparticularium, omnium pariter proportionū, accipiātur tres lineæ: quarum prima ſit naturalis numerorum ſeries, à 2 inchoata, & ſupremo loco ſita: ſecunda linea imparium ſit numerorum, & à 5 incipiat, & ſub priori ſituetur, ſic vt primus numerus huius ſub primo ſuperioris, & ſecundus ſub ſecundo, & tertius ſub tertio, & conſequenter ponantur: deinde alia linea in ordine tertia, à 5 ſumat initium, & ſit etiam imparium numerorum, & directe pendula in deorſum procedat, ita vt in 5 ſecunda, & tertia lineæ communicent, atque concurrant, & ex ambabus angulus rectus efficiatur, cuius conus in 5 inuenitur. conſequenter infinitæ lineæ eo pacto ducantur, ita vt à ſecundo numero tertiæ lineæ incipiendo qui eſt 7, in dextrum omnes numeri accipiantur ſe ternario excedentes, ſcilicet 10, 13, 16, & conſequenter: poſtmodum à tertio numero tertiæ lineæ videlicet 9, incipias, cunctos numeros accipiendo qui ſe quaternario vincunt, videlicet 13, 17, 21, & cæteros conſequenter: deinde à quarto numero ſcilicet 11, ipſius tertiæ lineæ, incipies omnes numeros ſe quinario exuperantes, colligendo videlicet 16, 21, 26, & cæteros: & ſi eo pacto conſequenter procedas, infinitas lineas generando, & eas omnes lineas quæ in dextrum protrahuntur, primæ ſuperiori loco lineæ affixę comparaueris, ita vt primi illarum linearum numeri primo ſupremæ lineæ comparentur, & ſecūdi ſecundo, & tertij tertio, & ita de alijs: cunctas ſpecies multipliciū ſuperparticulariū numerorū, pariter & proportionū productas inuenies. Sed vt quę dicta ſunt, clarius intelligere valeas: ſubiectā formulā cōſyderabis. Et ſi omnia indiuidua velles producere, id facies ſi & ſupremam, & omnes inferiores lineas duplaueris, poſtmodū triplaueris, & quadruplaueris, & conſequenter: comparando ſemper numeros productos inferiorū linearum, productis numeris ſupremæ lineæ.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
11	16	21	26	31	36	41	46	51	56
13	19	25	31	37	43	49	55	61	67
15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
17	25	33	41	49	57	65	73	81	89
19	28	37	46	55	64	73	82	91	100

Multiplicium ſuperparticularium gñatio.

19 ¶ Numerus duplus ſuperparticularis, eſt numerus multiplex ſuperparticularis, bis minorem numerum continens, & aliquam vltrà eiuſdem partem aliquotam.

¶ Vt 5 ad 2, 7 ad 3, 9 ad 4. Nam 5, bis includit 2, & adhuc vnitatem, 2 partem aliquotam: ideò 5, dicendus eſt numerus duplus ſuperparticularis: ſed quoniam vnitas illa, quam vltrà continet, eſt minoris numeri medietas: numerus ipſe 5, termino diſcretiori duplus ſeſquimedius, ſiue duplus ſeſquialter, aut ſeſquiſecūdus appellabitur. Eodem modo 7 ad 3 cōparatus, ipſum bis includit, & ipſius tertiam partem, quare 7, duplus ſuperparticularis eſt numerus: qui propriori appellatiōe, duplus ſeſquitertius nū-

cupatur. Pari via 9 ad 4 relatus, ipſum bis intercipit, & ipſius vltrà quartã partẽ: dicẽdus igitur eſt duplus ſuperparticularis, ſiue duplus ſeſquiquartus: & hoc termino magis proprio. Sed 5 ad 2, 7 ad 3, 9 ad 4 habitudo, proportio dupla ſuperparticularis dicitur. Nã proportio dupla ſuperparticularis, eſt proportio cuius numerus maior minorem bis intercipit, & minoris adhuc aliquã partem aliquotam. Diſcretius tamen loquẽdo, dicas inter 5 & 2, duplam ſeſquialteram inueniri proportionem: inter 7 & 3, duplã ſeſquitertiam: & inter 9 & 4, duplam ſeſquiquartam, & conſequenter. ¶ Pullulant omnes dupli ſuperparticulares, cũctæ etiam proportiones, acceptis duabus numerorum lineis, quarum altera ſit naturalis numerorum ſeries, à 2 inchoata, & ſuperiori loco ſita: altera vero ſit naturalis imparium numerorum linea, à 5 accepta, & inferiori parte affixa, ſi huius cuncti numeri ſibi correſpondentibus in ſuperiori comparẽtur: deinde ſi illarum vtraq; dupletur, & productorum cõſimilis fiat relatio: poſtmodũ ſi tripletur, & fiat pariter productorum comparatio: & ſi quadruplando, quintuplando, ſextuplando, & conſequenter procedas: quod quærebas, inuenies demonſtratum. Exemplum.

Proportio dupla ſuperparticularis.

Duplorũ ſuperparticulariũ gñatio.

Dupli ſuperparticulares	2	3	4	5	6	7	8
	5	7	9	11	13	15	17
Dupli ſuperparticulares	4	6	8	10	12	14	16
	10	14	18	22	26	30	34
Dupli ſuperparticulares	6	9	12	15	18	21	24
	15	21	27	33	39	45	51
	ſeſqſe.	ſeſqter	ſeſqqr	ſeſqquin	ſeſqſex	ſeſqſep	ſ.q 8

¶ Numerus triplus ſuperparticularis, eſt numerus multiplex ſuperparticularis, qui minorem numerum ter includit, & eius inſuper aliquam partem aliquotam.

20

¶ Vt 7 ad 2, 10 ad 3, 13 ad 4. Septenarius enim ad 2 comparatus, ipſum ter includit, & vltrà vnitatem continet, quæ 2 eſt medietas: ideo ipſe 7 comparatus 2, triplus ſuperparticularis dicetur, & clariori appellatione, triplus ſeſquialter nominabitur. Etiam 10 ad 3 relatus, triplus ſuperparticularis pari ratione vocetur. Continet autem ter 3, & tertiã adhuc 3 partem, puta vnitatem: quare 10 comparatus 3, termino ſpecialiori, triplus ſeſquitertius appellabitur. Necnon 13 qui ad 4 refertur, triplus ſuperparticularis, ſiue triplus ſeſquiquartus cenſebitur. Et habitudo 7 ad 2, 10 ad 3, 13 ad 4, proportio tripla ſuperparticularis exprimetur. Vnde proportio tripla ſuperparticularis, eſt proportio multiplex ſuperparticularis, cuius maior numerus ter minorem includit & aliquam minoris partem aliquotam. Proprius tamen dicendum eſt 7 ad 2. triplã ſeſquialterã inueniri proportionẽ: & 10 ad 3, triplã ſeſquitertiã: & 13 ad 4, triplã ſeſquiquartã: & hoc pacto deinceps. ¶ Cõſurgunt omnes tripli ſuperparticulares, & numeri, & proportiones, duabus numerorum lineis apprehenſis: quarũ alera ſit naturalis numerorũ ſeries, à 2 incepta: altera vero à 7 incipiat, & infinitos intercipiat numeros, ſe cõtinua progreſſione, ternario exuperantes: ſi huius cuncti numeri, cunctis ſuperioris comparentur, ita vt primus primo, ſecundus ſecundo, & tertius tertio, & conſequenter: deinde illis duabus lineis duplatis, ſi producti pariter referantur: & eiſdem lineis triplatis, ſi producti comparentur: & ſi hoc pacto quadruplando, quintuplando, ſextuplando, & productos numeros cõparando procedas, propoſitũ inuenies declaratũ. Exemplũ.

Proportio tripla ſuperparticularis.

Triplorũ ſuperparticulariũ creatio.

Tripli ſuperparticulares	2	3	4	5	6	7	8
	7	10	13	16	19	22	25
Tripli ſuperparticulares	4	6	8	10	12	14	16
	14	20	26	32	38	44	50
Tripli ſuperparticulares	6	9	12	15	18	21	24
	21	30	39	48	57	66	75
	ſ.quiſe	ſ.quiter	ſ.qquar	ſ.quiqn	ſ.quiſex	ſ.quiſep	ſ.qui 8

21 ¶Numerus quadruplus superparticularis, est numerus multiplex superparticularis, quater minorem numerum intercipiens, & eius aliquã partem aliquotam.

¶Vt 9 ad 2, 13 ad 3, 17 ad 4. Si autem 9 binario comparetur, relatus 9 quadruplus superparticularis nuncupatur: nam 2 quater intercipit, & vltrà, continet vnitatem, quæ 2 est medietas: quare dictus 9 proprie quadruplus sesquialter dicetur. Eodem modo si 13 ternario referatur, quadruplus superparticularis, siue quadruplus sesquitertius appellabitur: cum 3 quater includat, & vltrà, vnitatem, tertiam 3 partem. Simili arte dicendum est si 17 quaternario comparetur, quadruplum superparticularem esse, siue quadruplum sesquiquartum nuncupari. Sed quæ 9 ad 2, 13 ad 3, 17 ad 4 inuenitur habitudo, proportio quadrupla superparticularis vocetur. Nam proportio quadrupla superparticularis, est proportio multiplex superparticularis, cuius numerus maior minorem quater cõtinet, & minoris aliquã partem aliquotã. Rectius tamen loquendo dicẽdum est, habitudinẽ inter 9 & 2, proportionẽ quadruplã sesquialterã esse: & 13 ad 3, quadruplã sesquitertiã: & 17 ad 4, quadruplã sesquiquartã. & consequenter. ¶Producuntur oẽs numeri quadrupli superparticulares, omnes pariter proportiones, duabus numerorũ lineis acceptis: quarũ vna sit naturalis numerorũ series, à 2 inchoata, altera à 9 sumat initiũ, & infinitos numeros includat, se cõtinua progressione quaternario excedentes: si huius omnes numeri cũctis superioris lineæ numeris cõparentur, primus primo, secũdus secũdo, & tertius tertio, & cõsequenter: postmodũ si ambę lineę duplẽtur, & productorũ fiat cõsimilis cõparatio: deinde si triplẽtur, & producti numeri cõparentur: & si cõsequenter quadruplãdo, quintuplãdo, sextuplando, & modo dicto producti numeri comparentur: quod quærebamus, patefactum inueniemus. Exemplum.

Proportio quadrupla superparticularis.

Quadruplorũ superparticularium gñatio.

Quadrupli superparticulares	2	3	4	5	6	7	8
	9	13	17	21	25	29	33
Quadrupli superparticulares	4	6	8	10	12	14	16
	18	26	34	42	50	58	66
Quadrupli superparticulares	6	9	12	15	18	21	24
	27	39	51	63	75	87	99
	s.qui.2	s.qui.3	s.qui.4	s.qui.5	s.qui.6	sesq.7	s.qui.8

Omnes aliæ quæ sequũtur species multiplices superparticulares, videlicet quintuplus superparticularis, sextuplus superparticularis, septuplus superparticularis, & consequenter, ex prædictis facile possunt intelligi.

22 ¶Numerus multiplex superpartiẽs, est numerus maior minori numero cõparatus, quẽ pluries cõtinet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, nullam respectu minoris numeri partem aliquotam componẽtes.

¶Vt 8 ad 3, 11 ad 4, 11 ad 3. Nam 8, bis continet 3 & insuper duas vnitates, partes aliquotas 3, nullam partem aliquotam respectu 3 efficientes. Etiam 11 bis includit 4, & vltrà, tres vnitates, partes aliquotas 4, quæ nullam constituunt respectu 4 partem aliquotam. Pari modo 11, ter continet 3, & adhuc duas ternarij partes aliquotas, nullam componentes respectu 3 partem aliquotam. Sed illa quæ 8 ad 3, 11 ad 4, 11 ad 3 inuenitur habitudo, proportio multiplex superpartiens est dicenda. Nam proportio multiplex superpartiens, est proportio cuius maior numerus minorem pluries continet, & aliquot insuper minoris numeri partes aliquotas. nullam respectu eiusdẽ minoris partem aliquotã efficientes. ¶Numerus multiplex superpartiens, & proportio multiplex superpartiẽs, infinitas species intercipiũt. Prima numeri multiplicis superpartiẽtis species, est duplus superpartiẽs: secũda, triplus superpartiẽs: tertia, quadruplus superpartiẽs: & cõsequẽter. Species autẽ proportionis multiplicis superpartiẽtis, eisdẽ nominibus appellantur, variata terminatione, us in a. Prima nãq; species est dupla, superpartiẽs: secũda, tripla superpartiẽs: tertia, quadrupla superpartiẽs: & hoc pacto deinceps.

Proportio multiplex superpartiens.

Numerus multiplex superpartiẽs, ex numero multiplici, & superpartienti emanat. Nẽpe ꝙ pluries minorem includat, à numero multiplici habet: & ꝙ vltrà, aliquot contineat partes aliquotas, nullam respectu minoris aliquotam componentes, à numero superpartienti consurgit. Numerus multiplex superpartiens, similiter & proportio, alias discretiores adhuc habent nuncupationes: & hoc à vicium multitudine, quibus numerus maior minorem intercipit: & à numero partium aliquotarum, quas vltrà maior numerus continet, quæ respectu minoris nullam aliquotam partem efficiunt. Nã si numerus maior minorem bis includat, & minoris numeri duas partes aliquotas: videndum est an illæ sint tertiæ, quintæ, vel septimæ, & consequenter. Si primum detur, dicendus est numerus ille maior, duplus superbipartiens tertias: & habitudo inter illos numeros reperta, proportio dupla superbipartiens tertias nuncupabitur. Si vero partes illæ aliquotæ, quintę denominantur, duplus superbipartiens quintas vocabitur: & inter illos habitudo, proportio dupla superbipartiens quintas appellabitur. Qꝫ si partes illæ aliquotæ, septimæ dicantur, duplus superbipartiens septimas denominabitur: & inter tales numeros habitudo, proportio dupla superbipartiens septimas exprimetur. Sed de his omnibus speciebus, clarius in sequentibus fiet sermo. ¶Pro generatione multiplicium superpartientium, nõ opus est longa vti ambage. Nam si triũ infrapositorum diffinitorum productiones intelligas, facile admodum ex eis vnam cõprehendere potes communem productionem, pro omnibus multiplicibus superpartientibus numeris, & proportionibus.

23

¶Numerus duplus superpartiens, est numerus multiplex superpartiens, qui bis minorem numerum continet, & aliquot minoris partes aliquotas, nullam respectu eiusdem minoris aliquotam componentes.

¶Vt 8 ad 3, 11 ad 4, 12 ad 5. *Si enim* 8 ternario comparetur, duplus superpartiens appellabitur: nam 8, bis continet 3 & insuper 2, qui est duæ partes 3 aliquotæ, nullã respectu 3 partem aliquotam reddentes. Et quoniam partes illæ duæ sunt, & tertiæ denominantur: ideo discretiori appellatione numerus 8, duplus superbipartiẽs tertias dicetur. Pari modo 11 ad 4 comparatus, duplus superpartiens censebitur: nam bis 4 intercipit, & vltrà, tres vnitates, partes aliquotas 4 quæ nullam respectu ipsius 4 constituũt partem aliquotam. sed quoniam tres sunt illæ partes aliquotæ, & à 4 quartę nuncupãtur: ideo 11 clariori nuncupatione, duplus supertripartiẽs quartas vocabitur. Etiam 12 ad 5 relatus, duplus superpartiens nuncupabitur: includit enim bis 5, & adhuc duas 5 partes aliquotas, nullam efficientes aliquotam respectu 5. & quia duæ sunt, & quintæ dicuntur, dicetur 12 termino magis proprio, duplus superbipartiens quintas. Habitudo autẽ 8 ad 3, 11 ad 4, 12 ad 5 reperta, proportio dupla superpartiens exprimetur. Vnde proportio dupla superpartiens, est proportio multiplex superpartiens, cuius numerus maior bis minorem includit, & aliquot insuper minoris numeri partes aliquotas, nullam respectu eiusdem minoris aliquotam efficiẽtes. Et si habitudinibus datorũ numerorum discretiores petas assignari proportiones: dico ꝙ 8 ad 3 habitudo, est proportio dupla superbipartiẽs tertias: & 11 ad 4, dupla supertripartiẽs quartas: & 12 ad 5, dupla superbipartiens quintas. ¶Emanant omnes dupli superpartiẽtes, pariter & proportiones, infinitis numerorum lineis acceptis, quarum prima à 3 incipiat, cunctos sequentes impares includendo: secunda linea à 4 inchoetur, & omnes sequentes numeros, & pares, & impares intercipiat, quorum ternarius nõ est pars aliquota: tertia linea à 5 sumat initium, & omnes sequentes impares possideat: quarta vero linea à 6 consurgat, & omnes sequentes numeros, tam pares, q̃ impares contineat, quorũ 5 non est pars aliquota. Et consequẽter cõsimili intercapedine: sic videlicet ꝙ prima, tertia, quinta lineæ, & sequentes, quę à numero impari incipiunt, solos impares numeros cõprehendant: secunda vero linea, quarta, sexta, & cæteræ, quæ à pari numero prosiliunt, omnes sequentes numeros, tam pares, q̃ impares sibi vendicent. Hoc seruato documẽto, vt prima linearum, quæ à numero pari incipit, nullum numerum includat, cuius 3 sit pars aliquota: & secunda illarũ linearum nullum pariter contineat numerum, cuius

Proportio dupla superpartiens.

Duplorũ superpartientium creatio.

quinarius ſit pars aliquota:& tertia nullũ etiam numerũ poſſideat, cuius 7 ſit pars aliquota:& ita de alijs per numeros impares procedẽdo. Deinde accipiatur naturalis numerorũ ſeries à 2 incepta,& deorſum in infinitũ procedẽs:ſic vt primus eius numerus, ſcilicet 2, inter primã & ſecundã lineam ponatur:& ſecundus numerus, inter ſecundã & tertiam:& tertius,inter tertiam & quartam:& hoc pacto deinceps. Poſtmodũ quælibet illarũ infinitarum linearũ dupletur,& ſub qualibet illarũ ſua duplata linea ponatur: quo facto cuilibet numero lineæ duplatæ,2 primus numerus lineæ deſcendẽtis addatur: & cuilibet numero ſecundæ duplatæ lineæ,3 ſecundus numerus lineæ deſcendentis addatur:& cuilibet numero tertiæ lineæ duplatæ,4 tertius deorſum euntis lineæ addatur: & conſequenter. Deinde prima linea duplata cum ſua additione,primę ſuptemæ lineæ, quæ duplabatur,comparetur:ſic vt primus numerus primo,& ſecũdus ſecundo,& tertius tertio referatur:& conſequenter. poſtea ſecunda linea duplata cum ſua additione, ſecundæ lineæ quæ duplabatur, etiam cõparetur:poſtmodum tertia duplata, cum ſua additione,tertiæ quæ duplabatur referatur:& ſi hoc pacto in cæteris feceris,omnes ſpecies duplorum ſuperpartientium,& proportionum inuenies procreatas. Nam in prima linearũ comparatione,primos duplos ſuperbipartientes reperies:primas etiam proportiones duplas ſuperbipartiẽtes (voco primos duplos ſuperbipartientes,illos qui in minimis numeris reperiuntur: tales etiam dicuntur primæ proportiones duplæ ſuperbipartientes) in ſecunda vero linearum comparatione,primos duplos ſupertripartientes inuenire eſt,ſimiliter & proportiones:& in tertia linearum relatione,primos duplos ſuperquadripartientes,& primas ſimiliter proportiones inuenies procreatas:& conſequẽter de alijs. Pro quibus omnibus cognoſcendis,ſubiectam reſpice formam.

Prima linea		3	5	7	9	11	13	15
Dupli ſuperbipartientes	2	8	12	16	20	24	28	32
		tertij	quinti	ſepti.	noni	vnde.	tride.	deci.q.
Secunda linea		4	5	7	8	10	11	13
Dupli ſupertripartientes	3	11	13	17	19	23	25	29
		quarti	quinti	ſepti.	octa.	deci.	vnde.	tride.
Tertia linea		5	7	9	11	13	15	17
Dupli ſuperq̃dripartiẽtes	4	14	18	22	26	30	34	38
		quinti	ſepti.	noni	vnde.	tride.	de. qui.	de.ſep.

Et ſi indiuidua omnia duplicium ſuperpartientium cognoſcere velles:opus eſt omnes illas lineas duples,triples,quadruples,& conſequenter,ſemper ſingula ſingulis referendo,vt ſæpe in generatione præcedentium numerorum oſtenſum eſt.

14 **Numerus triplus ſuperpartiens,eſt numerus multiplex ſuperpartiens,ter tantũ minorem includens,& aliquot minoris partes aliquotas, nullam reſpectu eiuſdem minoris aliquotam efficiens.**

Vt 11 ad 3,15 ad 4,17 ad 5. Nam ſi 11 ad 3 comparetur,triplus ſuperpartiens appellatur:cum 3 ter includat,& duas vltrà,vnitates,partes aliquotas 3, nullam aliquotam reſpectu 3 componentes: quæ à 3, cuius partes aliquotæ ſunt, tertiæ denominantur: ideo 11,alia magis propria nuncupatione,triplus ſuperbipartiens tertias denominabitur. Eadem via 15 ad 4 relatus,triplus ſuperpartiens dicetur:ſed quoniam tres illæ vnitates, quas vltrà continet, à 4,quartæ nominantur: diſcretiori appellatione, datus 15,triplus ſupertripartiens quartas exprimetur. Dicendum eſt eodem modo 17 ad 5 comparatum,triplum ſuperpartientem eſſe,ſiue triplum ſuperbipartientem quintas, & hoc termino magis conuenienti. Sed 11 ad 3,15 ad 4,17 ad 5 inuenta habitudo,proportio tripla ſuperpartiens nũcupabitur. Nam proportio tripla ſuperpartiens,eſt proportio multiplex ſuperpartiens,cuius numerus maior ter minorem ſolum intercipit, & aliquot vltrà minoris numeri partes aliquotas, nullam aliquotam reſpectu eiuſdem minoris reddentes. Poſſunt autem datorum numerorum habitudinibus ſingulariores aſſignari proportiones:ita vt 11 ad 3 habitudo,eſt proportio tripla ſuperbipartiẽs ter-

Proportio tripla ſuperpartiens.

tias:& 15 ad 4 habitudo, proportio tripla supertripartiens quartas erit: etiam 17 ad 5 habitudo, proportio tripla superbipartiens quintas vocabitur. ¶Generatio triplorum superpartientium,& proportionum, eadem est cum præcedentis diffiniti productione: hoc solo dempto, quòd numeri illi infiniti primo accepti, qui ibidem duplabantur, hic debent triplari. Sufficiat igitur præsentis elementorum contextus, pro talium numerorum educatione intelligenda.

Triplorũ superpartientium gñatio.

Prima linea		3	5	7	9	11	13	15
Tripli superbipartientes	2	11	17	23	29	35	41	47
		tertij	quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.
Secunda linea		4	5	7	8	10	11	13
Tripli supertripartientes	3	15	18	24	27	33	36	42
		quarti	quinti	septi.	octa.	deci.	vnde.	tride.
Tertia linea		5	7	9	11	13	15	17
Tripli supquadripartientes	4	19	25	31	37	43	49	55
		quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.	de.sep.

25

¶Numerus quadruplus superpartiẽs, est nũerus multiplex superpartiẽs, quater dũtaxat minorẽ intercipiẽs,& aliquot insuper minoris partes aliquotas, nullã respectu eiusdẽ minoris partẽ aliquotã cõstituẽtes.

¶Vt 14 ad 3, 19 ad 4, 22 ad 5. Nempe si 14 ternario comparetur, quadruplus superpartiens vocabitur: cũ quater ipsum 3 possideat,& duas eiusdem 3 tertias, que nullam respectu eiusdem componunt partem aliquotam:& quoniam duæ sunt,& tertiæ nominantur: dicatur 14, nomine magis decenti quadruplus superbipartiens tertias. Consimili arte est dicendum 19 ad 4 relatum, quadruplum superpartientem: ipsum enim 4 quater continet,& vltrà, tres quartas, quæ nullam respectu 4, aliquotam partem efficiũt: quare dictus nouemdenarius, quadruplus supertripartiẽs quartas dicetur:& hoc, vocabulo conuenientiori. Eodem modo 22 ad 5 comparatus, quadruplus superpartiens nũcupatur: includit enim quater 5,& vltrà, duas quintas, partes aliquotas 5, quæ nullam respectu 5, aliquotam partem componunt:& quia duæ,& quintæ denominantur, datus 22, termino magis peculiari, quadruplus superbipartiens quintas vocatur. Habitudo autem 14 ad 3, 19 ad 4, 22 ad 5, proportio quadrupla superpartiẽs exprimitur. Nam proportio quadrupla superpartiens, est proportio multiplex superpartiens, cuius maior numerus quater minorem possidet,& aliquot vltrà minoris partes aliquotas, nullam aliquotam respectu eiusdem minoris cõstituentes. Et si habitudinibus in dictis numeris repertis, proportiones decentiores, seu specialiores cupis assignare: dicas 14 ad 3 habitudinem, proportionem quadruplam supertripartientem tertias esse:& 19 ad 4, quadruplam supertripartientem quartas:& 22 ad 5, quadruplam superbipartientem quintas appellari. ¶Prodeunt cuncti quadrupli superpartientes, quæque pariter proportiones, eisdem arte & modo in duobus præcedentibus diffinitis signatis: hac sola via excepta, ꝙ infinitæ illæ numerorum lineæ, quæ per generationem duplorum superpartientiũ primo sumebantur, debent hic quadruplari, vbi illic duplabantur. Quare hanc solam subiectam formam tenebis pro eorum productione capessanda.

Proportio quadrupla superpartiens.

Quadruplorũ superpartientiũ generatio.

Prima linea		3	5	7	9	11	13	15
Quadrupli supbipartiẽtes	2	14	22	30	38	46	54	62
		tertij	quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.
Secunda linea		4	5	7	8	10	11	13
Quadrupli suptripartiẽtes	3	19	23	31	35	43	47	55
		quarti	quinti	septi.	octa.	deci.	vnde.	tride.
Tertia linea		5	7	9	11	13	15	17
Quadrupli supq̃driptiẽtes	4	24	32	40	48	56	64	72
		quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.	de.sep.

Cæteræ quæ sequuntur species, vtpote quintuplus superpartiens, sextuplus superpartiens, septuplus superpartiens, & cõsequenter, ex iam dictis facile constant. ❡Notandũ præterea in hac parte est, quemadmodũ maior inæqualitas in quinq; vniuersalia genera scinditur, in multiplicem, superparticularẽ, superpartientẽ, multiplicem superparticularem, multiplicem superpartientẽ (de quibus abunde discussum est à 1 diffinitio, ad 25 vsq; inclusiue) eodẽ modo minor inæqualitas in quinq; etiam genera secari potest: quæ à præcedentibus, hac sola particula, sub, differentiã sumũt: & sunt submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpartiens, submultiplex superparticularis, submultiplex superpartiens. Nempe dictũ est binarium vnitati comparatũ, multiplicem & duplum esse: & habitudinem 2 ad 1 proportionẽ, multiplicẽ, atq; duplam nuncupari. Ita dicendum est si vnitas binario comparetur, ipsam vnitatem, submultiplicem, atq; subduplam appellari. Dicendũ est pari modo 3 binario comparatũ, superparticularem, & sesquialterum numerũ esse, & habitudinem 3 ad 2, proportionẽ superparticularem, & sesquialterã nominari. Ita asserendum est, si 2 ternario cõparetur, ipsum relatum binariũ, subsuperparticularem, & subsesquialterum numerum esse: & 2 ad 3 habitudinẽ, proportionem subsuperparticularẽ, pariter & subsesquialterã exprimi. Et de aliis hoc modo. ❡Nunc autem pro huius tractatus complemẽto, quinq; vniuersales regulas annectemus: quibus expedite primos numeros proportionales in omni genere proportionum, imò in omni proportionũ indiuiduo poteris inuenire. Voco primos terminos, siue primos numeros proportionales, eos numeros qui in tali proportione sunt minimi, vt in dupla, 2 & 1: in tripla, 3 & 1: in sesquialtera, 3 & 2: & de cæteris pari modo. Intellige semper omnia quæ in diffinitis huius artis dico, & in ipsorum declaratione, secundũ subiectã materiã. Nam in irrationabilibus proportionibus (de quibus nõ arithmeticus, sed potius geometra cõsyderat) primi numeri non sunt signãdi, cũ in numeris nulla talis proportio inueniatur.

Aduerte

Nota pro sequentibus regulis.

REGVLAE.

1 ❡Omnis proportio multiplex, inter suam denominationem pro vno termino, & monadem pro altero, inuenitur.

❡Nempe omnis mũdi proportio aliquam denominationem sortitur: quare vt multiplex omnis denominationem habeat, necessario sequitur. Nam proportio dupla, quæ inter multiplices est prima, à dualitate, seu à binario sumit appellationẽ, & tripla à ternario, & quadrupla à quaternario, & hoc pacto consequenter. Si igitur quispiam ex te petat primos dari terminos, siue primos numeros inter quos proportio dupla habeatur: id facies expedite, si pro termino priori denominationem duplæ recipias, vtpote binarium, & pro altero vnitatem: nam 2 ad 1, talis est proportio. Et si triplæ proportionis primi termini petantur: 3 pro vno termino, & monadem pro altero significabis. Si quadruplæ proportionis primi numeri postulẽtur: 4 & 1, offeres petenti. Et de reliquis pari modo. Quòd si secundi, tertii, quarti've, aut altiores termini in aliqua multiplici proportione petantur: id facies per ductionem primorum terminorum. Verbi gratia, si quærantur secundi termini, inter quos proportio dupla reperitur: eos facile significabis, si primos terminos duples: dabis igitur 4, & hoc pro vno termino, & pro altero dualitatem. Et si tertii termini petantur: primos terminos triplabis, & consurgentes inde numeros, vtpote 6 & 3, petenti significabis. Et in cęteris quadruplando, quintuplando, sextuplando, & consequenter procedere necessum est, si petantur.

2 ❡Omnis proportio superparticularis, inter numerum statim sequentem in linea naturali eius denominationem, pro vno termino, & eandem pro altero reperitur.

❡Si cognoscere velles, aut aliquis ex te petat, primos terminos inter quos proportio sesquialtera, vel sesquitertia, vel sesquiquarta, vel aliqua alia huius generis inuenitur: debes hoc pacto procedere. In primis consydera denominationẽ petitæ proportionis, hoc est numerum à quo talis proportio denominatur, vel sanius loquendo, numerũ in tali proportione facile intellectum: consyderabis deinde illum numerũ, qui statim in li-

nea naturali eum sequitur, pro termino priori proportionis accipias, & priorē numerū pro altero posteriori termino signabis. Exēplum. In sesquialtera proportione denominatio, siue numerus facile intellectus, est binarius: & 3, est ille numerus qui statim in naturali numerorū serie 2 sequitur: dabis igitur 3 pro termino priori, & 2 pro altero posteriori: nam 3 ad 2, est proportio sesquialtera: & illi signati numeri dicuntur primi in proportione sesquialtera. Eodem modo in proportione sesquitertia est dicendum: nam numerus facile intellectus in illa, est 3, & qui statim in linea naturali eum sequitur, est 4: signabis igitur 4, priorem terminum, & ternarium posteriorem, inter quos proportio sesquitertia inuenitur. Qđ si in proportione sesquiquarta primos terminos cupis inuenire: faciundū est eodem modo: numerus enim facile intellectus in illa proportione, est 4: & numerus qui statim in ordine naturali 4 sequitur, est 5: dabis igitur 5 & 4 primos terminos seu numeros, inter quos proportio sesquiquarta habetur: & hoc pacto deinceps.

¶ Ex hac regula sequitur, nullam proportionē superparticularem posse inueniri in numeris imparibus: sed necesse est alterū terminorum parem, alterū vero imparem esse. *Corollarium.*

¶ Omnis proportio superpartiens, inter compositum ex duabus suis denominationibus pro vno termino, & suam posteriorem denominationem pro altero consurgit. *3*

¶ Si ex te petat aliquis, aut tu ipse cognoscere velis primos numeros, inter quos aliqua proportio superpartiens inuenitur, colliges in primis petitæ proportionis denominationes, vel (vt melius loquar) duos in tali proportione numeros facile intellectos coniunges, & hoc pro termino priori: nam in omni proportione superpartiente, duo duntaxat facile intelliguntur numeri: deinde pro altero termino posteriore, denominationem siue numerum posterius intellectum præsentabis. Exempli gratia: vis scire primos terminos in proportione superbipartiēti tertias (in qua quidē proportione, bi, &, tertias, siue, 2 & 3, dicūtur denominationes, impropriе tamen) fac vt illi numeri, qui facile in tali proportione intelliguntur, addantur: & emanabit 5, prior terminus: deinde posteriorem denominationem puta 3, pro termino posteriori sumes, & dices 5 & 3 primos esse numeros in data proportione: 5 enim ad 3, proportio superbipartiens tertias nuncupatur. Si vero proportionis superbipartiētis quintas, primos numeros inquiras, fac vt 2 & 5 simul coniungantur, & consurget 7 pro termino priori accipiendus: postmodum pro termino posteriori capies 5, posteriorem denominationē: nam 7 ad 5, proportio superbipartiens quintas denominabitur. Et si proportionis supertripartientis quartas, primos terminos cognoscere cupis: 3 & 4 numeros in data proportione facile intellectos, in vnū numerum coniunges, & proueniet 7, prior datæ proportionis terminus: deinde pro termino posteriori, 4 posteriorem denominationem signabis, & inuenies 7 & 4 primos esse numeros proportionis supertripartientis quartas: cum 7 ad 4 talis sit proportio. Et de cæteris pari arte dicendum. ¶ Ex hac regula primo sequitur, in omni huius generis proportione posteriorem denominationem priori esse maiorem: quoniam opposito dato, facile sequeretur aliquam partē esse æqualem, aut maiorē suo toto: quod impossibilem ingerit ex terminis existentiā. ¶ Secundo infero, ꝙ cuiuslibet talis proportionis, si prior denominatio fuerit par, esse imparem posteriorē necesse est: & si posterior fuerit par, priorem esse imparem oportet: nam parem esse vtranq; possibile non est, imparē vero esse non incōuenit. Si enim huius illationis oppositum daretur: sequeretur eandē esse proportionē superparticularē, & superpartientē: sed illud inconueniēs reputamus: quare. ¶ Tertio infero, priorē denominationē posterioris esse partē aliquotā, impossibile esse: quare si forte ex te quispiā petat dari terminos inter quos proportio supertripartiēs nonas inuenitur: dicas id fieri nō posse. Nā 3, est 9 pars aliquota. *Corollarium primum.* *Secūdū.* *Tertium*

¶ Omnis proportio multiplex superparticularis, inter numerum consurgentem ex ductione prioris denominationis per posteriorem, cum sibi addita vnitate pro vno termino, & suā posteriorem denominationem pro altero, habetur. *4*

¶ Id autem in hac parte praenotare oportet, in omni huius generis proportione duas solum haberi denominationes, nec pauciores, aut plures. vtor in his regulis isto termino, denominatio, improprie, & hoc pro numeris nominatis, seu facile intellectis in datis proportionibus: nã proprie loquẽdo, in omni proportione, vnica inuenitur denominatio: vel si plures habeantur, illæ sunt æquiualentes, vt sesquitertia, & sesquiepitrita. Iam regula declaretur. Si igitur primos numeros inuenire desyderas, inter quos aliqua proportio multiplex superparticularis inuenitur: oportet in primis proportionis petitæ sumere denominationes, & vnam per alteram multiplicare, & cõsurgenti numero vnitas addatur, quo facto numerus resultans, prior terminus talis proportionis erit: deinde pro altero termino posteriorem denominationem accipies: quod si feceris, primos numeros in data proportione inuentos habebis. Exemplum: sit proportio dupla sesquialtera, quæ præsentetur, in qua, dupla, & altera, sunt duæ denominationes, & per quamlibet, 2 apprehendimus: ducatur vna illarum in alteram, hoc est 2 in 2, & proueniet 4: cui vnitas addatur, & consurget 5, pro termino priori: deinde pro termino posteriori, posterior denominatio sumatur, videlicet 2: & reperies 5 & 2 primos esse numeros, inter quos proportio data inuenitur. Pari modo si proportio dupla sesquitertia præsentetur, faciẽdum est: nam in ipsa, dupla, & tertia, sunt denominationes, per quarum priorem 2, & per posteriorem 3, facile intelligimus: multiplica igitur vnam illarum per alteram, dicendo bis tria, siue, ter 2, & consurget 6: cui si vnitas addatur, proueniet 7 pro termino priori: & pro termino posteriori sumatur 3, qui est datæ proportionis posterior denominatio, quo facto inuenies 7 & 3 primos esse terminos in data proportione. Q̃ si in tripla sesquialtera primi termini postulentur: fac eodem modo, & inuenies 7 & 2 primos esse datæ proportionis terminos, & hoc pacto deinceps.

5 ¶ Omnis proportio multiplex superpartiens, inter numerum emanantem ex ductione vltimæ denominationis per antepenultimam, cum sibi addita penultima denominatione pro vno termino, & suam vltimam denominationem pro altero consurgit.

¶ In omni multiplici superpartienti proportione, tres duntaxat denominationes inueniuntur: quare si data aliqua tibi proportione primos numeros inuenire cupis, oportet vt vltimam denominationem per antepenultimam multiplices, & consurgẽti numero penultima addatur: quo facto priorẽ terminum datæ proportionis habebis: deinde eandem vltimam denominationẽ pro termino posteriori sumes: & ita faciendo, primos numeros in data proportione procreatos inuenies. Exẽpli gratia. Si detur proportio dupla superbipartiens tertias, cuius, dupla, bi, & tertias, sunt tres denominationes: fac vt tertia denominatio, puta 3, per antepenultimã multiplicetur, videlicet per 2, & cõsurget 6: cui ipsa penultima denominatio, scilicet 2, addatur, & emanabit 8 datę proportionis prior terminus: deinde pro termino posteriori sumes ipsum 3, vltimam denominationẽ: quo facto, dices 8 & 3 primos esse numeros proportionis duplæ superbipartiẽtis tertias. Si autẽ detur dupla supertripartiẽs quartas, fac eodẽ modo, & inuenies primos numeros esse 11 & 4. nam 11 ad 4 talis est proportio. Et si proportionis triplæ superbipartiẽtis quintas primi termini petantur: si feceris arte, & modo tactis, dabis 17 & 5. nam 17 ad 5, talis est proportio. Pari modo in cæteris est faciendũ. ¶ Ex hac regula tria sequuntur corollaria, illis similia quæ in tertiæ regulæ declaratione inferebãtur. Primum est in omni huius generis proportione, vltimã denominationem, penultima esse maiorẽ. ¶ Secũdum est, cuiuslibet talis proportionis, si penultima denominatio fuerit par, oportet vltimã esse imparem: q̃ si vltima denominatio par fuerit, penultimam esse imparem necesse est: nam ambæ, & penultima, & vltima pares esse non possunt: impares bene quidem. ¶ Tertium corollarium est, nulla penultima denominatio potest vltimæ denominationis esse pars aliquota. Hæ sunt quinq; regulæ quibus facile admodum quisq; (vt in capite huius tractatus promisimus) in omni genere proportionũ primos terminos, seu primos proportionales numeros potest inuenire. Et si secũdos terminos,

Primum corollarium.

Secũdũ.

Tertiũ.

tertios, quartos've, aut aliquot altiores cupis habere: id facies per ductionem primorum numerorum, vt in fine primæ regulæ deductum est. Ex his facile signari poterunt petenti, numeri omnes proportionales, tam maiores inæqualites, q̃ minores. ¶Infero vltimo ex dictis in hoc tractatu, in genere proportionum multiplicium, minimam proportionem esse duplam, quæ prima est in illo genere: maximam vero reperire non est. in genere autem proportionum superparticularium, sesquialtera (quæ dicitur prima) maxima censetur, minima vero signari non potest: in alijs tribus generibus proportionum, nec maiores, nec minores in dato sensu possunt assignari.

Corollarium non prætermittẽdũ.

DE ACCEPTO SECVNDVM FIGVRAM NVMERO, tractatus tertius.

SVperest, duobus primis tractatibus expeditis, tertium subintremus, in quo quatuor & viginti constituemus diffinita: quæ omnem numerum secundum figuram consyderatũ, Laconica breuitate absoluent. Id autẽ pro huius tractatus intellectione prænotare oportet, omnem figuram esse linearem, planam, aut solidam. Linearem figuram eam esse dicimus, quæ solam dimensionum obtinet longitudinem, & duobus intercipitur pũctis: vt est linea omnis finita & mathematice consyderata. Planam figuram eam appellamus, in qua præter longitudinem, sola amplitudo habetur, & eædem lineis terminatæ inueniuntur: vt est quæq; superficies, prout sic consyderatur. Solidam vero figuram eam significamus, quæ limitatas longitudinem, amplitudinem, atq; crassitiem, sibi vendicat dimensiones: vt corpus de genere quantitatis. Is igitur numerus secundũ figuram sumitur, qui analogice aliquam aliquãs've obtinet dimẽsiones. Nam, si cuiuspiam numeri cunctæ vnitates recta via procedant, omnis talis, linearis numerus dicetur: si vero in longum, atque latum porrigantur monades, profunditate neglecta, planus, superficialis've numerus exprimetur: quòd si eius monades in longum, latum, & profundum dirigantur, solidi nuncupationem talis numerus obtinebit.

Linearis figura. *Figura plana.* *Solida figura.*

DIFFINITA.

¶Numerus linearis, est numerus qui suas omneis in eandem positionem porrigit vnitates. 1

¶Vt 2, 3, 4. & vt clarior omnibus sit doctrina: omnes vnitates, omnésque numeros per rotunda puncta designabimus. Nam si vnitas explicetur, id erit hoc pacto a •. si autem binarium velis significare, eo modo facies b ••. pari modo si ternarium linearem numerum describas, hoc pacto per tria puncta designabis c •••. hac arte consequenter procede. Quandam inter se obseruant analogiam numerus linearis in arithmetica, & linea in Geometria: ita vt quemadmodum in longum, quauis alia dimensione seclusa, Geometrica linea porrigitur, sic numerus linearis in solam dimensionum extenditur longitudinem. ¶Harum generatio apprehenditur, si ab vnitate incœperis (quæ principium linearis numeri appellatur) & naturalem numerorum seriem per rotunda puncta significaueris. Exemplum.

Naturalis series numerorum linearum	•	••	•••	••••	•••••	••••••

¶Numerus planus, est numerus qui per suas vnitates descriptus, solas longitudinem, latitudinemq; obtinet dimensiones. 2

¶Vt 3, 4, 5. Nam si ternarium instar trianguli hoc pacto disponas d: reperies illum numerum vtrisque dimensionibus gaudere, videlicet longitudine, atque latitudine: porrigitur enim à sinistro in dextrum, & à deorsum in sursum, vt sensui patet. Eodem modo si in longum, & latum, ad modum quadrati 4 describatur, vt e: dicendus est numerus planus: aperte enim patet in signato numero duas inueniri dimensiones, longitudinem scilicet, atque latitudinem. Consimiliter dicendum est de 5, qui si in altum, &

dextrum ſecundum ſuas vnitates diſtendatur, vt f: numeri plani nomen ſortietur. Hic autem quem numerum planum diffinimus, à plæriſque authoribus ſuperficialis numerus nuncupatur: quippe qui ſuperficiei ſimilis eſt, atque analogus. Et hic numerus planus, infinitas continet ſpecies: quarum prima eſt trigonus: ſecunda, tetragonus: tertia, pentagonus: & ita conſequenter. Sed de his inferius fiet ſermo. ¶Generatio omnium planorum incipit ab vnitate, ſolo binario excepto, nullum ſequentium numerorũ prætermittens: qui omnes, ſi ſecundum duas prænominatas dimenſiones protendantur, ipſorum propagatio omnibus reddetur aperta. Exemplum.

f

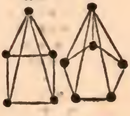
Linea naturalis planorũ numerorũ	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3 ¶Numerus ſolidus, eſt numerus qui ſuapte natura omnem ſibi vendicat dimenſionem, vt puta longitudinem, latitudinem, atq; craſſitiem.

¶Exemplum 4, 5, 6. Vnde ſi quaternarij tres vnitates admodũ trianguli diſponas, cui deſuper vnitas locetur tanquam conus, ſeu vertex pyramidalis figuræ, vt g: inuenies 4 omni dimenſione gaudere, & per conſequẽs ſolidus numerus erit. Eodem modo ſi quatuor quinarij vnitates ad modum quadrati deſcribantur, & alia vnitas deſuper tanquã vertex ſituetur, vt h: non minus ſolidus numerus dicetur. Pari ratione dicendum eſt de ſenario: nam ſi quinq; eius vnitates ad ſimilitudinem pentagonalis figuræ ordinentur, & deſuper tanquam conus vnitas vna ponatur, vt i: ſolidus numerus erit. Numerus autem ſolidus, & corpus de genere quantitatis, in hoc conueniunt, vt per omnem porrigantur dimenſionem. ¶Solidi numeri generantur, capta naturali numerorum ſerie, ſi præter binariũ, & ternariũ, ab vnitate incipiendo, cũctos ſumpſeris numeros. Exẽplũ.

g

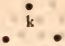
h i

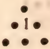


Linea naturalis ſolidorũ numerorum	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

4 ¶Numerus trigonus, eſt numerus planus tria cõtinens latera æqualia.

¶Vt 3, 6, 10. Nam ſi 3 triangulari diſtendatur interuallo, vt hic k, trigonus numerus appellabitur: vtpote quòd tribus conſtet lateribus æqualibus. Simili modo ſi 6 in tria æqualia latera porrigatur, vt hic l, numerus trigonus dicetur: nam quodlibet ipſius latus tres continet vnitates. Etiam vbi 10 in tres coſtas laterales profundatur, vt hic m: trigonus erit numerus. Dicitur etiam triangularis, quem trigonum numerum diffinimus. Nec prætereas omnium planorum numerorum, trigonum eſſe primum: ſicut in Geometria, omnium rectilinearum figurarum prima, triangulus appellatur. Duabus nanque vnitatibus, ſola linearis emanat figura: plana vero, ad minus tres exigit vnitates, ſicut & triangulus lineas tres: nam duabus lineis, ſaltem rectis, nulla geometrica intercipitur figura. ¶Generantur numeri trigoni naturali numerorum linea diſpoſita, ſi prioribus proxime ſequentes continuo addideris. Vnde ſi vnitati, quæ primus trigonus potentialiter appellatur, ſecundum adijcias numerum, videlicet binarium, conſurget 3, ſecundus trigonus. Et ſi 1, 2, 3 ſimul colligas: tertius trigonus procreabitur, ſcilicet 6. Pari modo ſi 1, 2, 3, 4 ſimul colligantur, quartus trigonus emanabit, videlicet 10. & hoc pacto conſequenter. Exemplum.


k


l

m

Naturalis linea numerorũ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

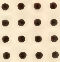
¶Hinc ſequitur omnem numerum trigonum ab vnitate totum eſſe, quota eius lateris fuerit aliqua vnitas pars aliquota.

5 ¶Numerus tetragonus, eſt numerus planus, quatuor æqualibus lateribus conſtans.

¶Vt 4, 9, 16. Si enim 4, quatuor angulis explicetur, vt n: dicendus eſt numerus tetragonus. Etiam ſi in quatuor æqualia latera, ad modum quadrati 9 diſtendatur, vt o: numeri tetragoni appellationem tenebit. Eſt conſimili arte dicendum de 16: qui ſi ad formam quadrati, in latera quatuor ęqualia dilatetur, vt p: non minus tetragonus nuncupabitur. Numerus autem tetragonus, alio nomine quadratus exprimitur: & hoc quia geometrico quadrato ſimilis eſt, & ſodalis. ¶Propagatio autem iſtorum numerorum habetur, ſi trigonalis lineæ quoſvis duos numeros trigonos ſibi inuicem collaterales cõ

n

o


p

iunxeris. Nam si vnitatem primum trigonum, secundo proximo sequenti, scilicet 3, con iungas, quaternarium generabis: qui secundus tetragonus est. Et si 3, secundus trigonus, tertio trigono, videlicet senario, adijciatur: generabitur tertius tetragonus, vtpote 9. Eodem modo si 6, tertius trigonus simul cum 10, quarto trigono accipiatur, consur get quartus tetragonus, scilicet 16. Et pari modo consequeuter. Exemplum.

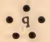
Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Linea tetragonalis	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

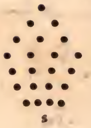
Corollarium.

¶Deducitur ex dictis, quemlibet tetragonum ab vnitate totum esse, quota est alicuius lateris eius monas pars aliquota.

6

¶Numerus pentagonus, est numerus planus, qui quinque æqualibus lateribus perficitur.





¶Vt 5, 12, 22. Nam si in quinque æquales angulos quinarius distendatur, vt q: numeri pentagoni sumet denominationem. Pariformiter dicendum est, si 12 in quinq; æqualia latera porrigatur, vt r: ipsum duodenarium taliter situm, pẽtagonum nuncupari. Si autem 22 in quinq; æqualia latera distribuatur, vt s: numerus pentagonus dicetur. Potest numerus pentagonus alia denominatione quinquangulus dici: sed nomina ad placitum significant. ¶Procreantur omnes pentagoni, acceptis linea trigona, & tetragona, à secundo tetragono incipiendo: si primum trigonum, videlicet vnitatem, secundo tetragono, scilicet 4, coniunxeris: & secundum trigonum tertio tetragono, & tertium trigonum quarto tetragono, & sic consequenter. Vnde si vnitas quæ primus trigonus est, 4, secundo tetragono addatur: consurget 5, qui secundus pentagonus est. Et si 3, secundus trigonus 9 coniungatur, qui tertius est tetragonus, profluet 12, tertius pentagonus. Eodem modo si 6, tertius trigonus, 16 quarto tetragono addatur: emanabit 22, qui quartus pentagonus in ordine appellatur: & deinceps hoc modo. Exemplum.

Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Linea tetragonalis	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Linea pentagonalis	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176

Corollarium.

¶Sequitur ex his omnem pentagonũ ab vnitate totum esse, quota est eius lateris vnitas pars aliquota. Poteris facili cura, intellectis quę dicta sunt, cæteros infinitos planos, & ipsorum generationes dignoscere: hexagonus enim, quartus est in ordine: heptagonus, quintus: & octogonus, sextus: & deinceps hoc modo. ¶Generatur autem istorũ quilibet, & sequentium, ex trigono, & sibi immediate præcedenti plano: ita vt hexagonus ex trigono, & pentagono profluit: sic heptagonus ex trigono, & hexagono: & octogonus ex trigono, & heptagono: & ita consequenter. Nam sicut ex primo trigono, & secundo tetragono, pentagonus secundus generatur: ita ex primo trigono, & secundo pentagono, secundus hexagonus producitur: & ex primo trigono, & secundo hexagono, secundus heptagonus generatur: etiam ex primo trigono, & secundo heptagono, secundus octogonus profluit: & de alijs pari modo. In hac enim elementorum combinatione, omnium planorum generationes facile dantur intelligi. Exemplum.

Reliquorũ planorum à suis prædictis gñatio

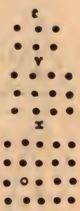
Linea naturalis numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Linea tetragonalis	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Linea pentagonalis	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176
Linea hexagonalis	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231
Linea heptagonalis	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286
Linea octogonalis	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341

Corollarium.

¶Hinc sequitur omnem numerum planum, cuius latera omnia sunt æqualia, totum in sua specie esse, quota est vnius eius lateris vnitas pars aliquota. Nec te lateat, omnem numerum planum alium à trigono, in planos esse resolubilem, quousq; ad primũ planũ (qui trigonus est) deuentum fuerit: nam 12, qui tertius pentagonus est, in 9 tetragonum, & 3 trigonum resoluitur. & 9, qui tertius tetragonus est, in 6 & 3 trigonos nu-

meros resoluitur. Hi vero nullam patiuntur dissolutionē. Vt si.3.in tres vnitates resoluatur, hoc non erit inquantum trigonus, sed inquantum aliam denominationem sumit. In alijs autem planis est pari modo dicendum.

7 ¶Numerus altera parte longior, est numerus planus, cuius altera dimensionum alteram per solam vnitatem excedit.



¶Vt.6.12.20. Si autē.6.eo modo describatur, vt.t. aperte reperies longitudinem sola vnitate a latitudine differre. Etiā si.12.sic significetur vt.v. euadet notū lōgitudinē per solam vnitatē latitudinē excedere. Est eodē modo dicēdū de.20.qui si vt.x.describatur, numerus altera parte lōgior dicetur. Potest etiam alijs nominib⁹ appellari, vtpote lōgilaterus, quadrāgulus, sed haec nomina idē significāt. ¶Hinc deducitur omnem numerū altera parte longiorem, quatuor angulis, quatuorq; inaequalibus lateribus constare: oppositis tamen costis nulla ex parte se excedentibus. ¶Horū generatio habetur, si naturalis pariū numerorū linea capiatur: & omniū talium ordinata fiat additio. Nam si.2.& 4.primi pares componātur, emanabit.6.primus altera parte longior.& si.2.4.6.simul coaceruētur, cōsurget.12.secūdus altera parte longior. Pari modo si.2.4.6.8.in vnum colligantur, profluet.20.tertius altera parte longior. Et hoc pacto deinceps. Exemplū.

Linea naturalis parium numerorum.	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Linea naturalis longilaterorum.		6	12	20	30	42	56	72	90

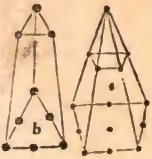
Et si Boetius, & posteriores dixerint.2.numerum altera parte longiorem esse, nos tamen impossibile reputamus aliquem numerum, & linearem, & planum esse secundū vnū sitū, eiusq; eandem positionem.

8 ¶Numerus antelōgior, est numerus planus cuius altera dimēsionum per numerum vnitate maiorem alteram exuperat.

¶Vt.8.10.15. Nam si.8.hoc pacto describatur. vt.y.differentem a latitudine, per.2.longitudinem habebit. Consimili modo si.10.sic repraesentetur, vt.z. eius longitudo alterā dimensionem per.3.exuperabit. Ita est dicendū de.15.qui si eo modo significetur, vt.℞ suarum dimensionū altera per numerū vnitate maiorē alterā excedet, videlicet per.2.& per consequēs quilibet praedictorū numerus antelongior appellabitur. ¶Infertur ex his omnē antelongiorē numerum, perinde ac altera parte longiorem, angulis quatuor, quatuorve inaequalibus costis perfici: necnō illarū oppositas adinuicē aequas habere. ¶Secūdo patet eundē numerū, & altera parte longiorē, & antelongiorē esse: vt sat videre est de.12.qui si in tres aequales lineas planā figurā constituentes scindatur, altera parte longior dicetur: vbi vero in duas solum diuidetur aequas partes, numerus antelōgior exprimetur. ¶Producūtur cuncti antelongiores acceptis linea parium, & impariter impariū numerorum serie: si omnes à prima (praeter tres primos videlicet. 2.4.6.) & singulos a secunda (praeter tetragonos, siue quadratos) sumpseris numeros.

9 ¶Pyramis est numerus solidus, cuius basis est numerus plan⁹ aequilaterus, a cuius singulis conis in monadē, vel planum vniformi decremento latera porriguntur.

¶Vt.4.9.14. Nam si ex tribus quaternarij vnitatibus trigonus efficiatur, supra quē residua vnitas locetur, vt.a.numerus inde resultās pyramis nūcupabitur, cui⁹ trigon⁹ dicitur basis, & vnitas desuper sita vertex, siue conus nūcupatur. Pari arte dicendū est, si ex sex nouenarij monadibus trigonus tertius confletur. cui desuper.3. secūdus trigonus ponatur, vt.b.consurgentē inde numerū pyramidē nuncupari. Est cōsimili modo dicendum de.14.a quo si nouē extrahantur vnitates, tetragonū tertiū cōponētes, & hoc pro basi: & desuper.4.secundus tetragonus locetur, supra quem residua monas, tanq̄ vertex ponatur, vt.c.taliter dispositū numerū pyramidē exprimi. Continet nūerus pyramidalis species infinitas: quarū prima dicitur pyramis trigona: secūda pyramis tetragona: tertia pentagona: & hoc pacto deinceps. Et earum quaelibet suam denominationem sumit a

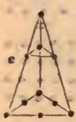


plano numero, qui basis appellatur: ita vt si talis planus sit trigonus, pyramis trigona dicetur: si tetragonus, tetragona: & si pentagonus, pentagena: & cõsequẽter hoc pacto. sed de his infra. ❡Nascũtur omnes pyramides capta naturali numerorum serie: si ab eadem tres primos abijcias numeros, vtpote. 1. 2. 3. Exemplum.

Linea pyramidalium numerorum.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

❡Hinc patet omnẽ pyramidẽ tot lateribus constare, quot eius basis continet conos.

❡Pyramis perfecta, est pyramis cuius omnia in altũ directa latera, lateribus basis æquantur. 10



❡Vt. 4. 10. 14. Nã si. 4. hoc pacto describatur, vt. d. cõstat porrecta in altũ latera lateribus basis æqualia esse: dicendus igitur est pyramis perfecta. Eodem modo si. 10. lineetur, vt e non minus perfecta pyramis est nominandus. Pari ratione si decimiquarti numeri tertius tetragonus, videlicet. 9. pro basi capiatur, supra quem secundus tetragonus locetur, & supra hũc monas primus trigonus ponatur, vt est. f. numerus ille. 14. perfecta pyramis dicetur: cum eius omnia latera, quę sursum eriguntur, lateribus basis sint æqualia: nam queadmodũ in quolibet basis latere tres monades tantũ sunt, ita in quolibet sursum erecto latere tres dũtaxat vnitates inueniũtur: quare ex diffinitione constat perfectã pyramidem esse. ❡Ex his deducitur in omni perfecta pyramide tot numeros planos æquilateros eiusdẽ ordinis inueniri, quot in quolibet suæ basis latere computantur vnitates. ❡Generatio perfectarũ pyramidum eadem est cum præassumpti diffiniti generatione. Nam si a naturali numerorũ linea tres primi abijciantur numeri, cuncti sequentes perfectæ pyramides dicentur. Exemplum.

Linea perfectarum pyramidum.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

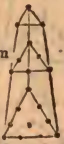
❡Pyramis curta, est pyramis cuius porrecta in altũ latera, lateribus basis non æquantur. 11

❡Vt. 9. 13. 16. Si autẽ. 9. eo pacto distendatur, vt. g. aperte reperies laterũ erectiones lateribus basis minime æquari: quoniã in quouis basis latere tres sunt vnitates, sed in õni laterum directione duæ solum monades inueniuntur, quapropter datus numerus pyramis curta nominatur. Etiam si. 13. hoc modo figuretur, vt. h. ita vt eius tertius tetragonus videlicet. 9. pro basi capiatur, supra quem secundus tetragonus, puta. 4. locetur, censendum erit signatum. 13. pyramidem curtam esse. Eodem modo dicendum est de 16. a quo si. 10. quartus trigonus pro basi sumatur, & supra ipsum. 6. tertius trigonus figatur, vt ostendit. i. non minus q̃ præassumpti numeri curtæ pyramidis appellationem tenebit. Et hæc pyramis curta (quæ iam diffinita est) alio nomine pyramis imperfecta nominatur: & sub se infinitas continet species, quarum prima est pyramis securta, secunda pyramis biscurta, tertia pyramis tricurta: & hoc pacto consequẽter. sed de his statim fiet sermo. ❡Profluunt omnes pyramides curtæ, acceptis omnium planorum æquilaterorũ lineis naturalibus, si in cuiuslibet lineæ planis (primo ablato) ordinata, & sæpius repetita fiat additio. Nam si accepta trigonorũ serie, tertium trigonũ secundo adijcias, consurgens numerus, scilicet. 9. curta pyramis dicetur. Et si secundus, tertius, & quartus trigoni cõponantur: inde emanans numerus, videlicet: 19. pyramis curta appellabitur. Pari modo si secundus, tertius, quartus, & quintus trigoni addantur: resultans numerus vtpote. 34. curta pyramis censebitur: & consequenter hoc modo. Deinde si relictis primo, & secundo trigonis, a tertio incipias, eo ordine procedendo, sic vt tertium, & quartum simul addas: deinde tertium, quartum, & quintum: postmodũ tertium, quartum, quintum, & sextum, & ita consequenter: inuenies omnem ex aliqua tali additione prouenientem numerum, curtam pyramidem dici. Item si primo, secundo, & tertio dimissis trigonis, a quarto initium sumas, ordine iam dicto procedendo, infinitas pyramides curtas generabis. Et hoc pacto deinceps procedendum est in tetragonorum, pentagonorum, & aliorum sequentium lineis naturalibus.

12 ¶Pyramis securta, est pyramis curta, cuius laterum erectiones sola monade a basis lateribus exuperantur.

¶Vt.9.13.19. Nam si.6.tertius trigonus pro basi sumatur, deinde.3. secundus trigonus desuper locetur, vt k. 9. pyramis inde resultans securta, siue semel curta denominabitur: cōstat enim in quolibet signatæ pyramidis sursum porrecto latere duas pręcise monades esse, & cum in quouis suæ basis latere tres inueniantur vnitates, sequitur laterum erectiones sola monade a basis lateribus exuperari, & per consequens ex diffinitione numerus 9. pyramis securta dicetur. Hac arte procedendum est in.13. Vnde si pro basi.9.tertius tetragonus accipiatur, cui desuper.4.secundus tetragonus locetur, vt l. aperte inuenies leuata in altum latera a basis lateribus sola vnitate deficere. Numerus ergo.13. taliter descriptus, pyramis secutra vocetur. Est consimili modo dicendum de.19. ita vt si.10.quartus trigonus pro basi capiatur, supra quem.6.tertius trigonus ponatur, postmodum supra hunc.3.secundus trigonus locetur, vt figura docet m. dici quidem potest ipsum.19. securtam pyramidem esse. ¶Emanant pyramides quæq; securtæ captis omnium planorum æquilaterorum naturalibus lineis, a secundis planis incipientibus: si in cuiuslibet talis lineæ planis ordinata, & sæpius repetita fiat additio. Vnde si capta naturali trigonorū serie, & primo trigono reiecto, secundum tertio adijcias primam pyramidem securtam generabis. Et si secundum, tertium & quartum trigonos simul colligas, securta pyramis producetur, quæ secunda in ordine in trigonali linea nuncupatur. Pari modo si secundus, tertius, quartus, & quintus trigoni componantur, pyramis securta in eadem linea tertia consurget: & consequenter isto modo. Est consimili arte procedendum in lineis tetragonorum, pentagonorum & sequentium planorum æquilaterorum.

m

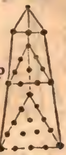


13 ¶Pyramis biscurta, est pyramis curta, cuius protracta sursum latera a basis lateribus per binarium excedunt.

n

¶Vt.16.25.31. Nempe si.10.quartus trigonus pro basi habeatur cui superponatur.6. tertius trigonus, vt ostendit n. inuenies vnumquodque basis latus per.2.quodlibet sursum protractum excedere: igitur ex diffinitione.16.pyramis biscurta denominabitur. Pari processu dicendum est.25. nam si pro basi accipiatur.16.quartus tetragonus, & supra ipsum.9.tertius tetragonus ponatur, vt repræsentat o.numerus.25. perinde ac.16.pyramis biscurta dicetur. Eodemmodo.31.biscurtę pyramidis figuram suscipiet, si pro eius basi.15.quintus trigonus sumatur, supra quem.10.quartus trigonus locetur, & supra hūc 6.tertius trigonus emineat, vt præsens punctorū compositio demonstrat p. Patet enim in quolibet signatæ pyramidis erecto latere tres solum esse vnitates, vbi tamen in omni suæ basis latere, quinque inueniuntur: & per consequens ex diffinitione numerus.31. pyramis biscurta dicetur, cum per.2.laterū erectiones a basis lateribus exuperentur. ¶Cōsurgunt cunctæ pyramides biscurtæ acceptis naturalibus omnium planorum æquilaterorum lineis, si a tertijs planis in sequentes ordinata fiat additio. Nam si in naturali trigonorum linea tertius trigonus quarto addatur, profluet.16. prima pyramis biscurta. Et si tertius, quartus, & quintus trigoni coniungantur, consurget.31. pyramis biscurta quæ secunda est in ordine lineæ trigonalis. Eodem modo si tertius, quartus, quintus, & sextus trigoni componantur, emanabit.52. tertia eiusdem lineæ pyramis biscurta, & in reliquis consequenter. Pari omnino processu in lineis tetragonorum, pentagonorum, & sequentium æquilaterorum planorum procedendum est.

p



14 ¶Pyramis tricurta, est pyramis curta cuius ascendentia latera per ternarium a basis lateribus exuperantur.

q

¶Vt.25.41.46. Vnde si.15.numerus quintus trigonus locō basis recipiatur, cui superimponatur.10.quartus trigonus, vt indicat q. cēsendū erit.25. taliter fabricatū pyramidē tricurtam appellari: cum quodlibet basis latus quinque monadibus cōstet, & ascendentia latera solis duabus perficiātur. Eadem arte erit dicendum numerum.41. pyramidem tricurtam denominari, si pro eius basi quintus tetragonus sumatur, scilicet,25. supra quem

quartus tetragonus cõſtituatur, vtpote.16. vt declarat r. Conſimili diſcurſu poteſt oſtẽdi numerũ.46.tricurtæ pyramidis appellationem habere. Nam ſi pro eius baſilico fundamento ſextus trigonus habeatur, ſcilicet.21.ſupra quem,15.quintus trigonus figatur, & ſupra hunc.10.quartus trigonus locetur, vt monſtrat s.cenſendũ erit numerũ.46.tricurtã pyramidẽ eſſe: tres enim vnitates quodlibet baſis latus ſupra aſcenſa latera ponit: dicetur igitur ex diffinitione præaſſumptus numerus, ſicuti & priores, pyramis tricurta.

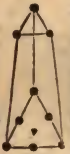
¶Generantur omnes tricurtæ pyramides, cũctis naturalibus planorum æquilaterorũ lineis acceptis:ſi a quartis planis in ſequentes planos ordinata fiat additio. Nam ſi habita trigonorum linea quartus trigonus, videlicet.10.quinto trigono, ſcilicet.16.addatur, cõſurget.25.prima pyramis tricurta. Et ſi quartus, quintus, & ſextus trigoni ſimul recipiãtur, producetur.46.ſecunda pyramis tricurta, in linea trigonali. Eodem modo ſi quartus, quintus, ſextus, & ſeptimus trigoni componantur, conſurget.72.tertia tricurta pyramis lineæ trigonali:& ita conſequenter aſcendẽdo. Eadem arte procedendum eſt in naturalibus tetragonorum, pentagonorum, & ſequentium lineis. Et quemadmodum deductæ ſunt pyramides ſecurtæ, biſcurtæ, & tricurtæ, ita cæteræ in infinitum progredientes, videlicet quadricurtæ, quinquecurtæ, ſexcurtæ, & reliquæ deduci poterunt.

¶Pyramis trigona, eſt pyramis cuius baſis eſt numerus trigonus. 15

t

¶Vt.4.9.10. Si autẽ quaternarij tres vnitates, quæ primũ trigonũ efficiũt, pro baſi accipiantur, & quæ ſupereſt monas in verticis loco ponatur, vt t.recte.4.pyramis trigona venit appellandus. Eodẽ modo ſi.6.tertius trigonus pro baſi capiatur, deinde ſecundus trigonus vtpote.3.ſupra baſim locetur, & nulla deſuper vnitas figatur, vt v.cenſendum eſt taliter punctuatũ.9.trigonã pyramidẽ eſſe. Etiã ſi numeri.10.pro baſi capiatur.6.tertius trigonus ſupra quẽ.3.ſecũdus trigonus locetur, & demũ ſupra ternarium vnitas primus trigonus, tanq̃ mucro, aut vertex ſuperemineat, vt eſt x.dicendũ eſt.10.eo pacto ſitum pyramidẽ trigonã eſſe. ¶Procreantur omnes pyramides trigonę accepta trigonorũ naturali linea:ſi ordinata, & ſæpius repetita in ipſa fiat additio. Nã ſi primus, & ſecũdus trigoni cõponantur, cõſurget.4.prima pyramis trigona. Et ſi primus, ſecũdus, & tertius trigoni addãtur, emanabit.10.pyramis trigona. Etiã ſi primus, ſecũdus, tertius, & quartus trigoni ſimul adijciãtur, profluet.20.pyramis trigona:& cõſequẽter iſto modo. Deinde ſi primo trigono ablato, ſecũdus & tertius componantur, conſurget.9.pyramis trigona. Et ſi ſecundus, tertius, & quartus ſimul coniungantur, producetur.19.pyramis etiam trigona. Et ſi ſecundus, tertius, quartus, & quintus trigoni addantur, habebis.34.trigonam pyramidem.&c. Eſt conſimili modo dicendum, ſi primus, & ſecundus trigoni abijciantur, & a tertio ordinata fiat additio, ac deductum eſt:& hoc pacto deinceps. Ex his facile dignoſcitur trigonam pyramidem, & perfectam & curtam amplecti.

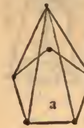
x



¶Pyramis tetragona, eſt pyramis cuius baſis eſt numerus tetragonus. 16

¶Vt.5.13.14. Nam ſi.5.hoc pacto diſtendatur vt y.aperte dignoſcitur illius baſim tetragonum numerum eſſe, cum ſit.4.ſecundus tetragonus. Etiam ſi.13.tali protractione lineetur vt.z.non minus q̃.5.dicendus eſt pyramis tetragona:habet enim pro eius baſi.9.tertium tetragonum. Eſt pari arte dicendum.14.tetragonam pyramidem eſſe, & hoc ſi pro eius baſi.9.tertius tetragonus capiatur, ſupra quem.4.ſecundus tetragonus ponatur, & ſupra hunc monas primus tetragonus locetur, vt repræſentat diſpoſitio ℞. ¶Emanant cunctæ pyramides tetragonæ capta tetragonorum numerorum naturali ſerie, ſi ordinata, & ſæpius repetita fiat additio, ad ſenſum in præcedenti diffinito. ¶Conſtat igitur ex deductis aliquam pyramidem tetragonam, eſſe perfectam:aliquam vero curtam.

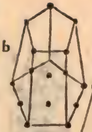
¶Pyramis pentagona: eſt pyramis pro eius baſi pentagonum continẽs numerum. 17



¶Vt.6.17.18. Si enim.6.eo modo deſcribatᷣ vt pro eius baſi.5.locetur:& ſi qua vnitas deſuper ponatur. vt a.oportet dicere datũ numerũ pẽtagonã pyramidẽ eſſe. Eodẽ modo eſt dicẽdũ de.17. Nã ſi pro eius baſi accipiatur.12.terti⁹ pẽtagonus, cui deſuper.5.ſecũ-

dus pentagonus detur, vt indicat b: inde emanans compositio pyramis pentagona dicetur. Etiam si 18 ea arte disponatur, vt pro ipsius basi 12 sumatur, deinde supra ipsum 5 locetur, supra quem vnitas, primus pentagonus reperiatur, secundum dispositionem c inuenies, 18 pentagonam pyramidem denominari: vtpote quòd pentagona basi constet. ¶ Consurgunt omnes pentagonæ pyramides, si naturalis pentagonorum series sumatur: & ordinata, atque sæpius repetita fiat additio: vt in 15 diffinitio deductum est. Hinc habetur aliquam pyramidem pentagonam esse perfectam: aliquam autem curtam. Et quemadmodum deductæ sunt pyramides trigonæ: cæteræq; in infinitum procedentes propalari poterunt.

b



c

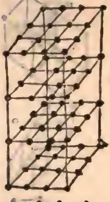
18 ¶ Numerus cubus, est numerus solidus sex æquis atque planis numeris contentus.

¶ Vt 8, 27, 64. Nam si 8, ea arte describatur, vt sex æqualibus superficiebus, duodecim autem lateribus æquis constet, vt indicat d, numeri cubi appellationem tenebit. Est eodem modo dicendum de 27, qui si æqualibus sex superficiebus protrahatur, & duodecim æquis lateribus, quorum quodlibet tres contineat vnitates, vt demonstrat e: dicendus erit numerus cubus. Pari modo operandum est in numero 64. Nempe si pro vna superficie, siue pro vno eius plano accipiatur 16, quartus tetragonus, & hoc tali punctorum figuratione qualis f: consurget 64, qui numerus cubus dicetur: habebit autem superficies sex, & easdem æquas, quæ plani numeri appellantur, latera vero duodecim, eademq; æqualia, vt aperte dignoscitur ex diffinitione: igitur numerus cubus est dicendus. Solet appellari cubus alio nomine tessera: vtpote quòd tesseræ, taxillóque similis sit, atque analogus. ¶ Generãtur omnes numeri cubi accepta naturali imparium numerorũ serie à 3 incipienti si duo primi, scilicet 3 & 5 componantur: deinde tres proxime sequentes, videlicet 7, 9 & 11, addantur, postmodum quatuor sequentes scilicet 13, 15, 17 & 19 adijciantur: & consequenter hoc pacto. Exemplum.

d

e

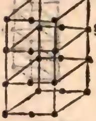
f



Linea naturalis imparium numerorum	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Linea naturalis cuborum numerorum		8			27				64

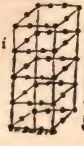
19 ¶ Numerus cuneus, est numerus solidus, cuius nulla dimensionum alteri est æqualis.

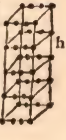
¶ Vt 24, 40, 60. Nam si pro longitudine sumatur 2, pro latitudine 3, pro crassitie 4, consurget 24. quoniam bis tria efficiunt 6, & quater sex, 24 producũt. quare constat 24 nullam alteri æqualem dimensionem possidere: vt dat intelligere figura g. Eadem procedendi via dicendum est 40 esse cuneum numerum, si pro prima dimensione recipiatur 4, pro secunda 5, & pro tertia 2, facta vt prætactum est ductione, euadet 40, cuneus eo pacto describendus vt h. Consimili modo censendum est 60 esse cuneum. Nam si dimensionum primæ, 3 pro ipsius latere accommodetur, mediæ, 4: extremæ vero 5, & eorum debita fiat multiplicatio, 60 cuneus emanabit, ea arte præsentandus vt i. ¶ Prodeunt omnes cunei, acceptis omnibus inæqualium laterum planis, vtpote altera parte longioribus, & antelongioribus numeris: si cuilibet illorum tot consimiles simul superaddantur numeri, quot in eius latere maiori monades inueniuntur: & vltra hoc, si cuilibet ex tali superadditione consurgenti numero in infinitum similium planorum crescat additamentum. Nam si 6, primo altera parte longiori (cuius maius latus tres continet vnitates) tres consimiles senarij simul superaddantur, consurget 24, qui primus cuneus appellatur. Et si post hoc illi emananti 24, adhuc vnus planus altera parte longior addatur, puta 6, habebitur 30, numerus etiam cuneus. Et si iterum resultanti 30, apponatur alius planus, profluet 36, etiam cuneus, & hoc pacto consequenter. In alijs vero in æqualium laterum planis ea arte est procedendum.



g

i



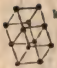


h

20 ¶ Numerus parallelepipedus, est numerus solidus, qui vnam dimensionum ab alijs æqualibus possidet dissentientem.

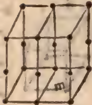
¶Vt 12,16,18. Nam ſi 12, eo pacto repræſentetur, vt k: reperies æquas longitudinē, atq; craſſitiem: diſcrepantem vero ab his latitudinem. quoniam quemadmodum quodlibet longitudinis latus binario interciditur, ita & altitudinis quæuis coſta: ſed latitudinis omne latus ternario numero conſtat. Pari modo in 16 numero dicendum eſt: pro cuius vna ſuperficie ſi ſumatur 4, primus tetragonus eo modo ſitus, vt l: conſurget 16, cuius profunditas alias duas æquas dimenſiones exuperabit: dicendus eſt igitur ex diffinitione, parallelepipedus. Etiam ſi 9 tertius trigonus ſic deſcribatur, vt m: conſurget 18. numerus parallelepipedus: habet enim primas duas dimenſiones æquas, craſſitiem autem contractiorem. ¶Horum generatio habetur, ſi duorum proxime ſequentium diffinitorum generationes in vnū colligas. Habet ſe enim numerus parallelepipedus, vt genus reſpectu aſſerum, & laterculorum, in quos ſolum tanq̄ in ſpecies immediatas partitur.

k



l

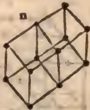
m



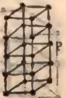
¶Numerus aſſer, eſt numerus parallelepipedus, cuius vna dimenſionum alias duas exuperat æquales. 21

¶Vt 12,16,20. Nam ſi 12 eo pacto punctuetur, vt n: inuenies craſſitiem, æquales longitudinem latitudinémque excedere dimenſiones. 12 igitur ex diffinitione aſſer nuncupatur. Id iudicium in 16 habendum eſt: quoniam ſi pro eius lateribus accipiantur 2, 2, 4: facta primi in ſecundum, & producti in tertium ductione, conſurget 16, tali diſpoſitione lineandus, vt o. Eſt eadem paritate in 20 procedendum: nam ſi pro longitudine 2 ſumatur: pro latitudine etiam 2, & pro craſſitie 5, inuenies, peractis ductionibus, 20 conflari: cuius vtranque dimenſionum craſſities exuperat, ac vincit. Id autem facile datur cognoſci in hac punctorum figuratione p. Nec refert longitudinem, latitudinē, aut profunditatem alias æquales excedere dimenſiones. ¶Pro omnium aſſerum generatione, accipiatur naturalis numerorum linea, à ternario incepta, & linea tetragonalis, à ſecundo tetragono incipiens, & prima deſuper tanquam quadrati coſta locetur: ſecūda lateraliter ad modum diametri quadrati ſit ſita: deinde diametralis linea in ſuperiorem eo pacto ducatur, vt primus eiuſdem diametralis lineæ numerus in cunctos ſuprapoſitæ numeros multiplicetur, & prouenientes numeri in primo ſuperiori calle, & domibus correſpondentibus numeris ſuprapoſitis ponantur: poſtmodum diametralis lineæ tetragonus, vtpote 9, in omnes à primo ſuperioris lineæ numeros ducatur, & conſurgentes numeri in ſecundo calle, & domibus reſpondentibus morentur. Conſequenter tertius diametralis lineæ tetragonus in omnes à primo, & ſecundo ſuperioris lineæ numeros multiplicetur, & inde emanantes numeri, calle, ac domibus proportionabiliter ad iam dicta locentur. Et ſi in infinitum eo pacto multiplicādo procedas, cunctos aſſeres productos inuenies: quos omnis præſens numerorum combinatio repræſentat.

n



o



p

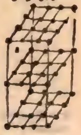
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
4	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117
	9	80	96	112	128	144	160	176	192	208
		16	150	175	200	225	250	275	300	325
			25	252	288	324	360	396	432	468
				36	392	441	490	539	588	637
					49	576	640	704	768	832
						64	810	891	972	1053
							81	1100	1200	1300
								100	1452	1573
									121	1872
										144

22 ¶Numerus laterculus,est numerus parallelepipedus,cuius vna dimẽ sionum ab æqualibus alijs exuperatur.

¶Vt 18,32,48.si autem longitudo per 3 significetur,latitudo pariter per 3,& profunditas per 2,generabitur 18. quoniam ter tria reddunt 9, deinde bis nouem, 18 producunt: quare dicere conuenit 18 laterculum esse: habet enim longitudinem,atque latitudinem æquas:crassitiem autem possidet contractiorem:vt in contextu q,videre est. Necnon præfatus 18,laterculus est nominandus:quando pro longitudine,latitudinẽ ve 2 sumeretur, & pro aliarum qualibet dimentionum, 3. Consimili arte procedendum est in 32. Nempe si pro vtraque primarum dimensionum 4 recipiatur, adiecto vltimæ 2,factáque eo pacto ductione,quater quater sunt 16.& bis 16,sunt 32: productus inde numerus vtpote 32,laterculus appellabitur: qui hac positione describetur, vt r. Etiam in 48,pari processu enitendum est: accipiantur igitur pro ipsius lateribus 4,4, 3,sic vt primus 4,longitudinis latera indicet, & secundus latera latitudinis, & 3, profunditatis latera denunciet.Deinde 4 in 4 ducatur,& profluet 16:in quem 3 multiplicetur, & consurget 48 laterculus nominandus: qui eo modo figuretur, vt s. ¶Hæc est laterculorum numerorum progressio. Sumantur duæ lineæ, quarum altera sit naturalis numerorum series,à 2 inchoata:altera vero tetragonorum linea,à tertio tetragono incœpta, & hæc tanquam diametralis linea transuersaliter ponatur, illa vero ac quadrati costa superiori loco quiescat:deinde primus diametralis lineæ numerus in solum primum superioris lineæ numerum ducatur, & consurgens inde numerus, scilicet 18,in domo intermedia ponatur: postmodum secundus diametralis lineæ numerus in primum & secundum superioris lineæ numeros multiplicetur, & productos numeros calle & domibus intermedijs locabis: consequenter tertius diametralis lineæ numerus in primum, secundum & tertium superioris lineæ ducatur, & geniti inde numeri, calle, & domibus ibidem repertis, & à tertio costæ,& tertio diametralis lineæ interceptis, figantur: & cõsequenter hoc ordine in infinitũ fiat processus. Horum exemplar sit tibi præsens elementorum cõtexio.

q

r

s


2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	48	100	180	294	448	648	900	1210
9	32	75	144	245	384	567	800	1089
	16	50	108	196	320	486	700	968
		25	72	147	256	405	600	847
			36	98	192	324	500	726
				49	128	243	400	605
					64	162	300	484
						81	200	363
							100	242
								121

Figura generationis numerorum laterculorum.

23 ¶Numerus circularis,est numerus planus,qui ex ductu alicuius numeri in se, vel in maiorem pro termino ipsum minorem habẽtem producitur,& in illum terminatur.

¶Vt 25,36,625.Nam 25,ex ductu 5 in seipsum cõsurgit.quinquies enim quinq;,cõponunt 25:est igitur ex diffinitione numerus 25 circularis,postq̃ planus est,& producitur ex ductu 5 in se,& in ipsum 5 terminatur. Eodẽ modo 36, ex multiplicatione 6 in se,generatur,cum sexies sex,efficiant 36.& quoniam planus est,& in illum numerũ finitur,qui in seipsum ducebatur:constat ex diffinitione circularem numerum esse. Cõsimili ratione dicendum erit numerum 625,circularis denominationem sortiri:producitur enim ex ductione 5 in 125.nam quinquies 125,procreant 625.etiam ex multiplicatione 25 in se,idem numerus resultat, nempe vigesies quinque 25, generant 625: planus igitur est, & constat in vtraque istarum ductione productum numerum in illum desinere,qui in alterum ducebatur: quare ex diffinitione sequitur numerum cir-

cularem esse. Dicitur autem numerus circularis analogice ad circulum in Geometria. nam quemadmodum circulus geometrice plana figura dicitur, & in punctum à quo incipit vertitur, & finitur: ita numerus circularis planus numerus appellatur, & in numerum à quo incipit regreditur, atque desinit. Et sicut numerus planus infinitas sub se continet species, ita & circularis numerus. sed de his ampliorem non licet sermonem efficere. ¶Producuntur omnes numeri circulares, facta assidua quinti, & sexti digitorum in seipsos, atque inde productos numeros ductione. Nam si 5, quintus digitus in se ducatur, consurget 25, primus numerus circularis: in quem si 5 huius digitus ducatur, emanabit 125, numerus etiam circularis: in quem si ducatur 5, profluet statim 625. & hoc pacto deinceps. Pari modo in 6, sexto digito faciundum putamus. Nam si 6 in se ducatur, producetur 36, numerus circularis: in quem si 6 multiplicetur, euadet 216, etiam circularis: in quem si 6 ducatur, profluet 1296, numerus pariter circularis: & consequenter eo modo. Horum autem circularium numerorum productionē præsens formula patefacit.

Circularium generatio.

Quinquies	5	25	Sexies	6	36
Quinquies	25	125	Sexies	36	216
Quinquies	125	625	Sexies	216	1296
Quinquies	625	3125	Sexies	1296	7776

24.

¶Numerus sphæricus, est numerus solidus, qui ex ductu minoris numeri in maiorem pro termino eundem minorem habētem procreatur, & in ipsum minorem numerum finitur.

¶Vt 125, 216, 625. Nam 125, solidus est numerus, cum sex æquis superficiebus constet: & producitur ex ductu 5 minoris numeri in 25 numerum maiorem, qui pro termino eundem minorem habet, & in ipsum 5, minorem numerum terminatur: dicendus est igitur ex diffinitione numerus sphæricus. Pari omnino arte dicendum est de 216, qui solidus est: & producitur ex multiplicatione 6 in 36. deinde in ipsum 6 finitur: quare sphæricus numerus appellabitur. Eodem modo de 625 profitendum est. In primis solidis est numerus: & consurgit ex ductione 5 in 125, pro termino eundem 5 habentē, & in ipsum 5 minorem numerum finitur: ergo ex diffinitione sphæricus est censendus. Habet enim numerus sphæricus quandam proportionem, siue similitudinem cum sphæra in Geometria. Nam sicut hæc solidum, atque rotundum corpus nuncupatur: ita & ille numeri solidi, rotundi'q; appellationem sortitur. Habet insuper numerus sphæricus species infinitas, sicut & numerus circularis: de quibus nihil ad præsens, vtpote quòd ex prius dictis (quæ lucida sunt) facile constet. ¶Generatio sphæricorum numerorum, eadem est cum circularium numerorū productione: re autem ipsa conueniunt, sola vero vnitatum positione, differentiam sumunt: vt satis cuilibet patere est.

☞ Quando ducitur 5 in se, qui producetur est tetragonus circularis: in quē rursus si ducatur latus, inde natus, erit sphæricus cubus, atq; in hunc rursus si ducatur idem lat⁹, scilicet 5, producetur sphæricus solidus, non tamē cubicus: in quē & consequentes si semper ducatur latus 5, omnesquot quot producentur, erunt sphærici solidi, at non cubici. Idem sit judiciū de senarij in se & suos, quadratū, scilicet, cubum & circulares omnes productione.

¶De numeris secundum figuram descriptis, tertij libri Finis.

DE RELATIS NVMERORVM habitudinibus, tracta- tus quartus.

VTendum est sapiẽtibus, Sodiade auctore. & cum plærosq; inueniam sapientissimos de Arithmetica differentes, qui subtili breuitate medietates percurrerũt: mihi sanctum visum est ijs esse adhærendum, potius q̃ obuiandum. Et si in hac parte perq̃ multa occurrunt dicẽda, ea omnia prętermittenda ornato silentio censui. Nam multa velociter, & continuo loqui, stultitiæ signum est (inquit Nicostratus) ideo tacendi munus esse sine periculo, dicebat Athenodorus. ℂIn hoc igitur quarto tractatu duodecim solum diffinita ponemus, in quibus de relatis numerorũ habitudinibus pertractabimus. Nam vti numeri ad numerum comparationem assignamus: sic ad habitudinem aliqua habitudo potest referri. Per habitudinem intelligo eum modum quo vnus numerus ad alterum comparatus se habet, sic vt ei æquetur, eum ve superet, aut ab eo vincatur. Habitudo vtique ad proportionem est genus: cum omnis proportio sit habitudo, & non ediuerso. Si enim numerus ad numerum comparatur: consurget inde habitudo, quam proportionem vocamus. Sed si habitudo ad habitudinem, vel proportio ad proportionem refertur: protinus medietas, siue proportionalitas consurget.

1 ℂMedietas, est certa differentiarum proportionumve habitudo.

ℂVt. 8. 6. 4. 2. nam quemadmodum. 8. senarium per binarium excedit, ita. 6. quaternarium per binarium vincit, etiam. 4. eo pacto ad binarium se habet: quare consurgens inde habitudo medietas appellatur. Etiam in istis tribus numeris. 8. 4. 2. medietas inuenietur, & hoc si habitudo primi numeri ad secundum, habitudini secundi ad tertium cõparetur: vtraque enim habitudo proportio dupla censetur. Eodem modo in his quatuor numeris. 9. 3. 6. 2. duæ triplæ inueniuntur proportiones. Nam inter nouenarium primum numerum, & ternarium secundum numerum tripla proportio habetur: & inter senarium tertium numerum, & binarium quartum numerum tripla etiam proportio inuenitur. Si igitur hæ duæ proportiones comparentur, proueniens habitudo medietas, siue proportionalitas (& hoc termino magis cõmuni) nuncupabitur. Hoc tamen in hac parte pro documento est tenẽdum, non posse in paucioribus, q̃ tribus terminis, medietatem inueniri. Et si aliqua talis in tribus solum numeris lateat, medietas simplex dicetur: si vero in pluribus terminis inueniatur, medietas composita exprimetur.

2 ℂMedietas Arithmetica, est medietas cuius inter terminos eædem differentiæ obseruantur.

ℂVt. 4. 3. 2. (per terminos intelligo numeros in medietate repertos: & per differentiam excessum quo aliquis numerus minorem numerum, cui refertur, vincit) Iam patet ꝙ in datis numeris Arihmetica medietas inueniatur. Nam excessus quo primus terminus, videlicet. 4. ternarium secundum terminum exuperat, est æqualis excessui quo. 3. binarium vincit, cum quilibet talis sit vnitas, quæ proprie in signata medietate differentia nũcupatur. Eodem modo. 8. 6. 3. 1. Arithmeticam medietatem componũt. Nempe eadem inter duos primos terminos, & illos qui sequuntur inuenitur differentia, & illa est. 2. Pari modo. 13. 10. 7. 4. 1. Arihmeticam medietatem efficiunt: cum. 3. sit illorum numerorum communis differentia. ℂMedietas Arithmetica duplex est. Altera continua, altera vero disiuncta. Continuam eam appellamus cuius omnis numerus medius est principium, atq; finis: hoc est quilibet talis numerus alteri comparatur, & ad eum alter numerus refertur vt. 9. 6. 3. Notum enim est in datis numeris Arithmeticam medietatem inueniri, cum 3. sit illorum differentia. quoniã. 6. numerus medius est comparationis, principium in ordine ad ternarium, cui refertur, & est finis respectu nouenarij, qui ad ipsum senarium com

paratur.dicendum est inter numeros datos continuam medietatem inueniri. Etiã in istis numeris.8.6.4.2.cõtinua medietas habetur. Nam vterq; terminus medius, videlicet.6. &.4.est principium, atq; finis cõparationis. Vnde quemadmodũ.8.senariũ per binarium excedit, ita.6.quaternariũ per binariũ vincit, &.4.binarium per binariũ superat. Eodem modo in his numeris est dicendũ.15.12.9.6.3. ¶Disiunctã medietatẽ eam esse dicimus cuius non omnis numerus medius est principium, atq; finis in sensu prius declarato, vt 10.8.4.2.Nam denarij ad octonarium differentia est.2.qualis est quaternarij ad binariũ: sed quoniam inter medios, puta octonarium, & quaternarium consimilis differentia non habetur: ideo medietas illa disiuncta nominatur. Pari modo in his terminis.11.9.5.3.1. disiuncta medietas habetur. Etiam & in istis numeris.20.17.13.10.5.2.

Disiuncta Anth. medietas.

¶Medietas geometrica: est medietas cuius inter terminos eædem proportiones habentur. 5

¶Vt.8.4.2.Nam qualis est octonarij ad quaternariũ proportio, talis inter quaternariũ, & binariũ inuenitur: vtrobiq; enĩ est dupla proportio, quare inter datas proportiones habitudo medietas geometrica nominat̃. Similiter in his terminis.15.5.6.2.medietas geometrica habetur. Nempe qualis inter primum, & secundum numerum inuenitur proportio: talis inter tertiũ, & quartũ pariter reperitur, vtraq; autẽ tripla proportio appellatur. Est eodẽ modo dicendũ in his numeris.9.6.4.in quibus ordinatim sesquialtera proportio habetur. ¶Medietas geometrica est duplex, scilicet continua, & disiuncta, vt in præcedenti diffinito de Arithmetica medietate dictũ est. Exemplũ de medietate geometrica cõtinua.4.2.1.Nã qualis est primi termini ad secundũ proportio: talis est secundi ad tertiũ, vtrobiq; enim proportio dupla inuenit̃: quoniã medius numerus, videlicet.2.principium est, & finis, cũ sit prioris proportionis consequens, & posterioris antecedẽs. Dicẽdum ergo est cõsurgentẽ ex illis terminis medietatẽ, continuã siue coniunctã nuncupari. Etiam in istis quatuor terminis.27.9.3.1.continua medietas habetur. Nã quemadmodũ primi ad secundũ est tripla proportio: ita secundi ad tertiũ, & tertij ad quartũ consimilis est proportio. In istis etiã tribus numeris.27.18.12.geometrica medietas quam coniunctam appellamus, reperitur. Primus nãq; numerus ad secundum in sesquialtera se habet proportione, & taliter secundus ad tertiũ se habet. ¶Exemplum de disiuncta & geometrica medietate.8.4.6.3.Nam qualis inter octonariũ, & quaternariũ inuenitur proportio: talis inter senarium, & ternarium etiam consurgit: vtrobiq; enim est dupla proportio, quare inter datas proportiones habitudo geometrica medietas nominatur: & quoniam inter medios numeros, puta inter.4.&.6.cõsimilis proportio dupla non reperitur, ideo medietas in illis quatuor numeris habita disiuncta nominatur. In istis etiam quinq; numeris.18,6.2,3.1.disiũcta medietas habetur. Nẽpe qualis primi numeri ad secundum est proportio, talis etiam est secundi ad tertiũ, & quarti ad quintum: sed tertij ad quartum non talis consurgit habitudo. Consimili arte in istis quatuor numeris.6.4,3.2.disiuncta medietas inuenitur: cum primi termini ad secũdum sesquialtera sit proportio, qualis est tertij numeri ad quartum: sed non talem secundi ad tertium est inuenire proportionem.

Geo. medietas duplex.

¶Medietas harmonica: est medietas in qua talis est maximi numeri ad minimum proportio: qualis inter differentiam maximi ad medium, & medij ad minimum inuenitur. 4

¶Vt.6.4.3.Nam qualis inter.6.maximum numerum, &.3.minimum habetur proportio: talis etiam inter differentiam maximi ad medium, quæ est.2.& medij ad minimum, quæ est.1.proportio inuenitur: vtrobiq; enim est proportio dupla. Etiã inter hos tres numeros.6.3.2.harmonica medietas habetur: cum eadẽ sit maximi ad minimum proportio cũ proportione differentiæ maiorũ ad differẽtiam minorũ. Nã ambæ triplæ proportiones dicũtur. Eodẽ modo in his tribus numeris.12.6.4.meditas harmonica inuenit̃.

¶Quarta meditas, est medietas in qua eadẽ est maximi ad minimum proportio: cũ proportione differentiæ minorũ ad differentam maiorũ. 5

¶Vt.6.5.2.nẽpe qualis.6.maximi numeri ad.2.minimũ proportio reperitur, talis inter differẽtiã medij ad minimũ,quę est.3.ad differentiã maximi ad mediũ,quę est vnitas inuenitur:vtrobiq; enĩ tripla proportio habetur. Pari õnino via in his tribus terminis.6.5.3.quarta medietas reperitur.Et in istis nũeris.12.10.4.cõsimilẽ est reperire medietatẽ.

6 ¶Quinta medietas, est medietas in qua cõsimilis est proportio medij nũeri ad minimũ cũ ꝓportiõe differẽtiæ minorũ,ad maiorũ defferẽtiã.

¶Vt.5.4.2. Nã manifestũ est medij numeri,scilicet.4.ad minimũ, videlicet.2.duplam inueniri proportionẽ:& talis est differentiæ minorũ,quæ est.2.ad maiorum differentiam quæ vnitas est. Cõsimili modo in his tribus numeris.10.8.4.eadem quinta medietas inuenitur:necnon in istis numeris.11.9.3.eadem medietas habetur.

7 ¶Sexta medietas,est medietas in qua maximi ad medium proportio, est eadẽ cum proportione differẽtiæ minorum ad maiorũ differentiã.

¶Vt.6.4.1. Qualis enim senarij, maximi numeri ad.4.numerũ mediũ inuenitur, talis inter minorum terminorũ differentiã, quæ est.3.& differentiã maiorũ quæ est.2.consurgit:etenim vtrobiq; sesquialtera proportio habetur.Eodem modo in istis tribus numeris 12.8.2.sexta medietas inuenitur . In his etiam consimilis medietas habetur.60.45.25.

8 ¶Septima medietas,est medietas ĩ qua talis est maximi ad minimũ ꝓportio, qualis extremorũ differentiæ ad minorũ differentiã consurgit.

¶Vt.4.3.2.Nam qualis quaternarij maximi numeri ad.2.minimum est proportio,talis est differentiæ extremorum,quæ est.2.ad minorum differentiam,quæ est.1.In vtriusque enim numeris dupla proportio inuenitur. Etiam in his numeris.9.5.3.consimilis habetur medietas.Et talem pariter in istis numeris.9.8.6.est inuenire.

9 ¶Octaua medietas, est medietas in qua talis est differẽtiæ extremorũ ad maiorũ differẽtiã proportio,qualis maximi ad minimũ reperitur.

¶Vt.4.3.2. Qualis enim quaternarij maximi numeri ad minimũ inuenitur proportio, talis etiam inter differentiam extremorum quæ est.2.& maiorum differentiã, quæ est.1. consurgit:est enim vtrobique dupla proportio. In istis etiam numeris.9.7.3.consimilis medietas habetur.Pariter in istis.9.7.6.

10 ¶Nona medietas,est medietas in qua vt mediꝰ ad minimũ se habet in proportione, sic extremorũ differentia ad differentiã minorũ se habet.

¶Vt.3.2.1.Nam sicut numerus medius,qui est.2.ad minimũ.qui est.1.in dupla proportione se habet,sic inter.2.qui est extremorum differentia,&.1.differentiam minorum eadem proportio inuenitur.Pari modo in his numeris.7.3.1.eadem proportionalitas habetur.Etiam & in istis.7.6.4.

11 ¶Decima medietas,est medietas ĩ qua vt mediꝰ ad minimũ se habet in ꝓportiõe,sic extremorũ differẽtia ad maiorũ differẽtiã se habeat optet.

¶Vt.3.2.1.Nempe vt.2.medius numerus ad.1.in proportione dupla se habet,sic extremorũ differẽtia,quę est.2.ad differentiã maiorũ,quæ est.1. proportio dupla censetur. In his pariter tribus numeris.5.3.2.consimilis medietas inuenitur. Pariter & in istis.8.5.3.

12 ¶Vndecima medietas,est medietas in qua vt maximus ad medium se habet in proportione,sic extremorum differentia ad differẽtiam maiorum æquam seruat proportionem.

¶Vt.6.4.3. Nam vt.6.maximus numerus ad.4.mediũ in sesquialtera proportione se habet,sic extremorũ differẽtia,quæ est.3.ad differẽtiam maiorũ,quę.2.est, eandẽ seruat sesqalterã ꝓportionẽ. Etiã in his nũeris.12.8.6.eãdẽ medietatẽ iuenies patefactã.Pariter & in istis.20.16.15. ¶Hãc vltimã medietatẽ adiecit Iordanꝰ decimo libro suorũ elemẽtorũ,supra decẽ medietates quas Boetiꝰ libro scdo suę Arithmeticæ diffuse in lucẽ emisit.

Iordanus. Boetius.

¶Finis.

DE NVMERORVM DEMONSTRATIS PROPRIETATIBVS, TRACTATVS QVINTVS.

Æchylus. Thales. Pythagoras.

SImplicia sunt verba veritatis, inquit Æchilus Tragic⁹ poeta: & Thales ille Milesius interrogatus quantũ mendaciũ a veritate distaret, quãtũ (ait) oculi ab auriculis distãt: plane inferẽs oculatã fidẽ præstãtiorẽ esse aurita. Hinc Pythagoras interrogatus quidnã homines potissimũ similes dijs efficeret: cũ vera (inquit) loquũtur. Vera igitur eademq; simplicia (vt mẽdaciũ a veritate dignoscatur) in præsenti tractatu ponemus: quẽ in diffinitiões, dignitates, petitiones, atq; demõstrationes distinguimus: tria vtiq; priora sunt demõstrationũ fundamẽta.

Documẽtũ

¶Id igitur hac in parte prẹnotare oportet, in omni quẹstiõe duo potissimũ esse aduertẽda, alterũ datũ, alterũ vero quæsitũ: vt si quæratur vtrũ omnẽ numerũ compositũ numerus primus metitur, numerus cõpositus dicitur datũ: & an quẽlibet talem numerus primus metitur quæritur. Nec prætereundũ est vbi demõstrationes haberi possint ex prioribus, & notioribus naturæ, vitandũ esse ne per incõuenientia demõstrentur. In huiusmodi nãq; demonstratione, quæ propter quid & potissima, nuncupatur necesse est & maioris extremitatis, quæ in cõclusione prædicatur, & minoris extremitatis, quæ in eadẽ conclusione subijcitur: causam esse medium.

¶DIFFINITIONES.

¶Naturalis numerorum series, est numerus ab vnitate inceptus, qui per assiduum vnitatis additamentum protenditur infinite. 1

¶Aequalitas, est inæqualitatis principium. 2

¶Numerus alterũ numerãs, is est qui in aliquẽ ductus eũ producit. 3

¶Differentia numerorũ, est vnitas, seu numerus quo minorem maior superat, atq; vincit. 4

¶Ii numeri ab alijs æque distare dicuntur, quorum ad alios differentiæ sunt æquales inter se. 5

¶Extremorũ differẽtia, ea est quæ ex mediorũ collectione consurgit. 6

¶Proportiõis termini, sunt numeri inter quos talis ꝓportio iuenitur. 7

¶Nũerus medius, is est qui iter duos posit⁹ est, & ab vtroq; ẹqualiter (distat. 8

¶Medij numeri, ij dicuntur qui inter extremos siti sunt, & æquales differentias sortiuntur. 9

¶Latera numerorũ, ea sunt ex quorũ ductione ijdẽ nũeri ꝓducũtur. 10

¶Differentia proportionum, est proportio qua maior proportio minorem, cui refertur, vincit. 11

¶Similes, eædemve, siue æquales proportiones dicũtur quæ eadẽ potiũtur denominatione: & ea maior, quæ maiore: & minor quæ minore. 12

¶Dignitates.

¶Omnis numerus qualibet sua parte est maior. 1

¶Ea numeri maior dicitur pars, quẹ minorẽ denominationẽ sortitur: minor vero, quæ maiorem. 2

¶Omnis numeri monas pars aliquota est, & ab eo denominata. 3

¶Oĩs nũerus totus a monade est, quota ps ei⁹ monas ipsa nũcupatur. 4

¶Cuiuslibet numeri omnes partes simul collectæ suo toti æquãtur. 5

¶Ex maiorum numerorũ additione crescens numerus, eo maior est, qui ex minorum additione consurgit. 6

¶Qui æquali vnitatũ multitudine cõsurgũt: adinuicẽ sunt æquales. 7

8 ¶ Ii numeri adinuicem sunt æquales, quorũ partes eiusdem denominationis sunt æquales inter se.

9 ¶ Numeri eidem æquales, & inter se æquales erunt.

10 ¶ Si æqualibus æquales adijciãtur nũeri, qui consurgũt æquales erũt.

11 ¶ Si ab æqualibus æquales auferantur numeri, idemve communis: æquales qui relinquuntur erunt.

12 ¶ Si æqualibus inæquales adiungantur numeri, inæquales qui emanant erunt.

13 ¶ Si ab æqualibus inæquales numeri secentur, qui relinquuntur inæquales numeri erunt.

14 ¶ Si numerus in monadem, vel in numerum monas ducatur, idem numerus semper consurget.

15 ¶ Duobus inæqualibus numeris pręsentatis, si maioris differẽtia minori numero addatur, sit've à maiori numero ablata: qui relinquũtur numeri adinuicem sunt æquales.

16 ¶ Si numerus in aliquẽ numerũ ducatur: numerus productus eadem proportione ad multiplicandũ se habebit, qua multiplicans ad vnitatẽ.

17 ¶ Si aliquem numerum numerus diuidat: diuidẽdus ad diuidentem eadem se habebit proportione, qua ad vnitatẽ idem diuidẽs se habet.

18 ¶ Qui ad eundem numerum relati æquas seruant proportiones, sunt adinuicem æquales.

19 ¶ Proportiones ex æqualibus proportionibus consurgentes, adinuicẽ sunt æquales.

20 ¶ Omnis proportio super aliam addit proportionem, quæ cũ alia copulata primam efficit proportionem.

21 ¶ Eadem est maioris numeri ad minorem proportio, quæ & partis aliquotæ ad partem aliquotam consimiliter nominatam.

22 ¶ Si proportio primi numeri ad secundum, super proportionem tertij ad quartum aliquam addat proportionẽ: tũc ea erit proportio, quæ inter productũ ex ductione primi in quartũ, & secũdi in tertiũ cõsurgit.

23 ¶ Si fuerint aliqui numeri cõtinue æqua progressione, aut proportione procedentes: primi ad vltimum proportio, ex omnibus intermedijs est composita.

24 ¶ Si sint tres numeri continue æqua proportione se habentes: primi ad tertium proportio, est primi ad secundum duplicata: quòd si quatuor fuerint termini, primi ad quartum proportio, erit primi ad secundum triplicata, & de cæteris pari modo.

¶ Petitiones.

1 ¶ Numerum in infinitum crescere.

2 ¶ Nullum numerum in infinitum decrescere.

3 ¶ Vnitatem pari numero adiunctam, imparem reddere.

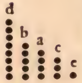
¶Vnitatem impari adiunctam, numerum parem efficere. 4

¶Cuilibet numero infinitos dari æquales. 5

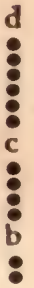
¶Maiorem numerum, minorem non numerare. 6

¶Proprietates.

¶Omnis numerus ex circum se duobus positis, & æqualiter ab eo distantibus compositi, est medietas. 1



¶Exemplum: 4 habet supra se 5, & infra se 3, æqualiter à 4 distantes (nam vterq; à 4 per 1 distat) ex quibus 8 componitur, cuius 4 est medietas. Eodem modo si accipiamus 6, supra 4, qui à 4 per 2 distat, & deinde infra 4 recipiamus 2, qui æqualiter à 4 elongatur, & ex ipsis vnus numerus componatur: is erit 8, cuius 4 prius sumptus itidem est medietas. Et si supra 4 detur 7, & infra 1, qui æqualiter à 4 recedunt, efficies 8, cuius 4 est medietas: & in cæteris dic consequenter. ¶Demonstratur sic. Sit a quiuis numerus, b & c circumpositi, ęqualiterq; ab a distantes, b maior, c vero minor: & d sit cōpositus ex b & c: tunc q̄ a sit medietas d, probatur, & ponamus differentiam cōmunem a ad c, & b ad a, esse e. Iam bene sequitur, b est maius a per e: subtracto igitur e, quod relinquitur est æquale ipsi a, per dignitatem 15. Et per eandem dignitatem sequitur, a est maius c per e: igitur addito e ipsi c, productum, ipsi a erit æquale: ergo residuum b, & productum ex e & c, adinuicem sunt æqualia, per dignitatem 9: sed residuum b, & productū ex e & c sunt omnes partes d, cū sint b & c cōponentes d: ipsum ergo d efficiunt, per dignitatem 5. Et vltra, d componitur ex b, & producto ex e & c, æqualibus: ergo quodlibet illorum est medietas ipsius d: & per consequens a, postquā cuilibet illorum est æquale, medietas d erit: quod erat demonstrandum.



¶Si numeri pares inuicē aggregētur: inde productus nūerus par erit. 2

¶Exemplum: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Nam si 2 & 4 numeri pares componantur: producetur 6 numerus par. Etiam si 6 & 8 in vnum aggregentur: consurget 14 numerus par. Eodem modo si 10 & 12 & 14 numeri pares inuicem addantur: profluet 36 numerus par: & consequenter pari modo. ¶Demonstratur sic. Sint numeri pares a b, b c, c d, qui in vnum aggregentur, videlicet a d, tunc quòd totus numerus a d sit par, probatur: nam postquam quilibet numerorum a b, b c, c d, par est: partem dimidiam habet, per diffinitum 5, primi tractatus: productus igitur ex illis numerus, videlicet a d, dimidiam etiam partem habebit, & per consequens par erit: quod probādum sumpsimus.

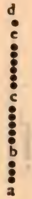
¶Si par multitudo imparium numerorum in vnum numerum aggregetur: productus inde numerus par erit. 3

¶Exemplum 3, 5: 3, 5, 7, 9: 11, 13. Nam si 3, & 5, par multitudo simul colligantur, efficietur 8 numerus par. Eodem modo si 3, 5, 7, 9, qui pari multitudine sunt accepti, vtpote quaternario, simul aggregentur: proueniet 24, numerus par. Est pari arte dicendum, si 3, 5, 7, 9, 11, 13 simul componantur: consurget 48, numerus par: & consequenter hoc modo. ¶Demōstratur sic. Sit par multitudo imparium numerorum a b, b c, c d, d e, qui in vnum numerum, scilicet a e aggregentur: tunc q̄ a e numerus productus sit par, probatur: nam postq̄ quilibet numerorum a b, b c, c d, d e, est impar: si a quolibet eorum vnitas auferatur, omnis manens numerus par erit: ergo ex ipsis manentibus compositus, par etiam erit, per præcedentem proprietatē, sed ablatarū vnitatū multitudo, parem efficit numerū: qui si primo pari composito addatur, numerus inde proueniens par etiam erit, per eandem præcedentem proprietatem, & ille est a e: igitur a e productus numerus par erit: quod erat probandum.

¶Si impar multitudo imparium numerorū in vnum coacceruetur numerum: qui inde producetur numerus, impar erit. 4

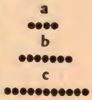
¶Exemplum, 3, 5, 7: 5, 7, 9: 11, 13, 15. Nempe si 3, 5, 7, qui impari sunt multitudine, simul accipiantur: emanans inde numerus impar erit, scilicet 15. Etiam si 5, 7, 9, inuicem addantur, cōsurget 21, numerus impar. Pari modo si 7, 9, 11, 13, 15, qui impari nu-

mero, puta quinario, capiuntur, in vnum numerum aggregentur: producetur 55, numerus impar, & de cæteris hoc modo. ❡Demonstratur sic. Sit impar multitudo imparium numerorũ a b, b c, c d, qui in vnum numerũ a d, coaceruentur: quòd a d, productus numerus sit impar, probatur. nam si ab ipso c d, auferatur vnitas e d, residuũ c e, numerus par erit: & cum a c, per præcedentem proprietatem sit par, sequitur per eandem præcedentem a e, numerum parem esse: cui si vnitas e d, addatur, habetur a d, qui productus est numerus, imparem numerũ esse: quod sumpsimus probandũ.



5 ❡Si numerus par, & impar componantur, impar qui consurget, erit.

❡Exemplum, si 2 numerus par, & 3 impar, simul coniũgantur: consurget 5, numerus impar. Etiam si 4 numerus par, & 5 impar, copulentur: producetur 9, numerus impar. Eodem modo si 6 numerus par, & 5 impar, in vnum numerum aggregentur: consurgens 11, numerus impar erit, & hoc modo consequenter. ❡Demonstratur sic. Sit numerus par a, & impar b, & consurgens ex a & b, sit c: tunc quòd c sit impar, probatur. Si numero a, vnitas addatur, consurget numerus impar, per tertiam petitionem: qui si numero b, addatur, producetur numerus par, per tertiã proprietatem: à quo si vnitas ipsa subtrahatur, relinquetur ipsum c, impar numerus: quod erat demonstrandũ.



6 ❡Si à numero pari impar numerus auferatur, qui relinquitur, impar erit.

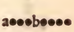
❡Nam si à 6 numero pari auferatur 3 impar: reliquum erit 3 numerus impar. Si à numero 10 pari, 5 impar subtrahatur: quod relinquitur, est 5, etiam impar. Deinde si à 12 pari, 7 impar auferatur: reliquum erit impar, puta 5, & consequenter. ❡Demonstratur sic. Sit numerus par a b, à quo impar a c, auferatur: tũc quòd residuum, puta b c, sit impar, probatur: & assignetur in residuo b c, vnitas c d: tunc sic, ex illa vnitate, & numero ablato efficitur a d numerus par, per quartam petitionem: & cum ex hypothesi a b, sit par, sequitur quòd b d, etiam par erit, per præcedentem proprietatem: & vltrà, b d, est par, igitur ei addita vnitate c d, consurgens numerus, puta b c, erit impar, per tertiam petitionem: sed b c, est residuum a b: igitur residuum a b, est impar: quod erat demonstrandum.

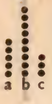
7 ❡Si à numero pari, par numerus secetur, reliquus numerus par erit.

❡Exempli gratia, si à 4 pari, secetur 2, etiam par: reliquus par erit, puta 2. Et si à 6 pari 4 par auferatur: quod relinquitur, par erit. Etiam si ab 8 pari, 4 par subtrahatur: residuum scilicet 4, par erit: & consequenter. ❡Demonstratur sic. Sit numerus par a b, & pars ablata a c, tunc q̃ reliquum, videlicet b c, sit par, probatur: nam si impar esset, sequitur per præcedentem proprietatem a c, imparem esse, quod est contra hypothesim: igitur b c, par est: quod erat demonstrandum.

8 ❡Ex omni numero primo, & quolibet quem non numerat, primi adinuicem numeri surgunt.

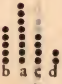
❡Exemplum: ex 2 numero primo & 3, quem 2 nõ numerat, numeri primi adinuicem emanant. Nam 2 & 3, sola 1 est communis mensura, & per consequens 2 & 3 numeri, adinuicem primi dicuntur. Etiam ex 3 numero primo, & 8 quem non numerat, primi adinuicem surgunt. Quemadmodum ex 5 primo, & 9 quem non numerat, primi adinuicem profluunt. Sed ex 3 numero primo, & 9 quem numerat, primi adinuicem nõ consurgent: quoniam præter 1, ipsis est communis mensura idem 3. Nam omnis numerus in se ductus, & suiipsius, & producti communis mensura vocatur: 3 igitur & 9 adinuicem compositi, vel communicantes, commensurabilésve numeri vocãtur. ❡Demonstratur sic. sit numerus primus a, & is quem non numerat sit b, tunc quòd a & b sint primi adinuicem, probatur. bene sequitur: a non numerat ipsum b, per hypothesin, & est numerus primus, ergo ipsum a sola 1 metitur, per diffinitum 11 primi tractatus: sed eadem 1, ipsum b etiam metitur per tertiam dignitatem: ipsos ergo a & b, communi mensura sola 1 metietur: igitur ex 12 primi tractatus diffinito, a & b primi adinuicem sunt dicendi: quod erat demonstrandum.





¶ Si numerus primus alicui numero referatur, ijdẽ relati numeri adinuicem primi erunt. 9

Exemplum, 2,3:3,8:5,9. Nam si 2 numerus primus, 3 referatur: constat 2 & 3 numeros adinuicem primos esse. Eodem modo si 3 numerus primus, 8 comparetur, & si 5 numerus primus, 9 referatur: ipsi adinuicem relati, numeri adinuicem primi dicentur. ¶ Demonstratur sic. Sit numerus primus a, & numerus cui refertur, b: tunc sic, aut a & b sunt adinuicem primi: & habetur propositum. aut sunt compositi adinuicem, & si sic: ergo eos aliquis numerus metitur: esto igitur c. tunc bene sequitur, c metitur a b, ergo metitur a numerum primum, quod est impossibile per 12 diffinitum primi tractatus: ipsi ergo a b compositi adinuicem non sunt: sunt ergo adinuicem primi: quod oportuit demonstrare.

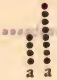


¶ Si duo numeri adinuicem primi fuerint, quorum alterum aliquis numerus metiatur, numerus ille metiens ad alterum primus erit, hoc est metiens, & alter numerus, primi adinuicem erunt. 10

¶ Exemplum, 3,4:5,8:7,9. Nam 3 & 4 numeri adinuicem primi sunt, cum sola monas sit illis communis mensura: & quoniã 4 metitur 2, sequitur 2 metientẽ & 3 esse numeros adinuicem primos. Etiam 5 & 8 eodem modo se habent: nec minus de 7 & 9, alijs'que infinitis adinuicem primis censendum est. ¶ Demonstratur sic. Sint dati duo numeri adinuicem primi a & b, & alterum istorum, puta a metiatur aliquis numerus, videlicet c. tunc quòd c & b sint adinuicem primi, probatur. Nam dato opposito, scilicet ipsos c b esse non adinuicem primos: ergo eos aliquis numerus metitur, sit igitur qui eos metitur ille numerus d. tunc sic, bene sequitur, d metitur c b, igitur metitur c, & c metitur a, ergo d metitur a, & metitur etiam b: metitur ergo a b primos adinuicem existentes, quod implicat, per 12 diffinitum primi tractatus: ergo ipsi c b sunt primi adinuicem numeri, quod ostendere nitebamur.

¶ Omnem numerum compositum, numerus primus metietur. 11

¶ Exemplum, 4,6,8. Nam 4 numerus compositus, à binario numero primo mensuratur, & 6 compositus, à 3 numero primo metitur: etiam 8, compositus, à 2 primo numero mensuratur: & hoc pacto deinceps. ¶ Demonstratur sic. Sit datus compositus a, tunc quòd a à numero primo mensuretur, probatur. Nam bene sequitur, a est numerus compositus, ergo aliquo numero metitur, per 13 diffinitum primi tractatus: sit igitur metiens numerus b, tunc vel b est numerus primus, & inde habetur propositum, vel compositus, & sic eum aliquis metitur numerus, sit igitur c. & postquam c metitur b, & b ipsum a mensurat, sequitur quòd c ipsum a pariter mensurabit: vltrà, vel c est numerus primus, & habetur intentum, aut compositus, & sic eum aliquis numerus dimetitur: qui & b & a pariter mensurabit: & cum nec in a nec in aliquo numero possibile sit infinitos reperiri numeros inæquales: deueniendum igitur erit ad aliquẽ numerum primum, partem ipsius a, quæ & a & eius partes numeros compositos simul metiatur. Omnem igitur numerum compositum, numerus primus metitur: quod demonstrasse oportuit.



¶ Omnis numerus, aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 12

¶ Exemplum: 2,3,4. Nam 2 est numerus primus, cum sola eum metiatur vnitas. Eodem modo 3, primus est. Et 4 compositus, quoniam numerus binarius eum metitur: & de alijs pari modo. ¶ Demonstratur sic. Sit datus numerus a, tunc aut a est numerus primus, & habetur petitum: aut est numerus compositus, & si sic: eum aliquis numerus metietur, per 13 diffinitum primi tractatus, qui & erit primus, per præcedentẽ. Omnis igitur numerus primus est, aut eum aliquis primus metitur: quod demonstrare intendebamus.

FINIS ARITHMETICAE THEORICAE.

IOANNES MARTINVS, SILICEVS, DIOCESIS PACENsis, generosissimo domino Alphonso Manrrique, Pacensi episcopo, felicitatem perpetuam.

LOnge mihi præclarius semper visum est, antistitum vigilantissime, animi, quàm corporis viribus gloriam comparare: & desecatorum morũ, quàm diuitiarum cultura perpoliri. Hæc enim terrena, quæ fortunę ludibria merito appellarim, instar bullæ cito pereunt, & obliterantur: ingenij vero, & præcipue virtutis monumenta, vetustate reflorescunt, perenniorá que efficiũtur: quibus solis ad nominis immortalitatẽ patet aditus: Hinc Alexander ille magnus, gẽtium quondã terror, pertinaciter asseuerabat, longe nobilius multo esse præstantius literis antecellere, quàm imperio, atque diuitijs. Et licet cuiuis hominum ordini doctrinæ sublimitas non mediocrẽ pariat gloriam: generosos viros præsertim pastorali dignitate decoratos ipsa locupletat, & perficit maxime: quæ dos præstantissima, quod sacrosanctum munus, religiosissime præsul, haud aliter in te sobolescit, & pullulat: ac apes in hybla, odores in Arabia, & aquæ in Nilo. Nihil enim te deficit, quod classicum virum, heroá ve summum habere deceat. Vnde tuas laudes percurrere si vellem: huiusce orationis (quod de Pompeiana virtute Tullius pędicabat) difficilius esset exitum, quàm principium inuenire. tanta in primis natalium claritudine profectus es: vt nulli nobilitatis præstantia merito, optimóq; iure cedere nec possis, nec debeas: & quod longe pluris faciundum est, tali tantæque parẽtum tuorum generositati, tam integram vitæ sanctitudinem, & tantum eruditionis splẽdorem copulasti: vt plus à te speciminis acceperit episcopalis dignitas, quàm tu ab ea retuleris ornamenti. Pythagoras ille, qui primus philosophi nomen sibi vendicauit, inter non pauca quæ humano generi saluberrima documenta præcipit: in primis admonet deum religione colendum esse, animum vero disciplinis venustandum: tu tanquam Pythagorici documenti obseruator accuratissimus, ita religionis honore polles, ita doctrina fulgescis, & splendicas: vt in clarissimorum antistitum albo conscribi facile merearis: obis que sic tuas partes, vt consono ore, sacerdotum decus, & pręsulum gemmam te vocitent omnes. Tanta es diligentia in dei gregem candidissimę vitæ exemplo pascendum, vt oues palabundas, & à pascua domini segregatas, ad viam salutis, & iustitię semitam reuoces: quo bono nihil melius, quo officio nihil prælato dignius excogitari potest. Huic adde clementia Dictatorem, Cæsarem liberalitate, Cymonem elegantia, cultus victúsque splendore Lucullum, grauitate Catonem, patientia Socratem, mirabili apparatu Hortensium, facundia Demosthenem, prudentia cõsilio que Octauium Cæsarem, vel æquas vel antecellis. Inde fit vt Carolus ille Hispaniarum rex serenissimus Alexandro magno, & Hãnibali pene virtute imperatoria, simul & possessionum maiestate comparandus, te in regiam suam asciuerit, & ascitum fauorabiliter tenuerit. Hæc omnia cum mecum reuoluerem, reuerendissime in Christo pater, nullum te inueni digniorem, nullum commodiorem: cui hæc ingenioli mei xeniola, primarios q; labores nostros dedicarem: quippe qui es in omni genere dicendi absolutissimus. Non enim me latet, impensius temeritatis ne accuser, id opusculum tua paternitate multo esse inferius: sed qua in alios es mansuetudine, & beneuolentia: te in me tuum spiritualem filium vsurum non despero. Generosi sane animi est non minus exilia, quàm momentosa, & preciosa hilari fronte, manúque obuianti excipere. Has igitur nostras (quantulæcunque sint) primitias, horis succisiuis elaboratas, suscipere non dedigneris. quod à te factum si audiero, magis, ac magis enitar ingenij cultum pulchrius leuigare, & animo quàm corpori saginam suppeditare. Vale igitur ecclesiæ decus, iuris que pontificij iubar nitidissimum. Et Ioannem Martinum Siliceum, nouitium famulum, patrocinio tuo humaniter confoue.

Alexãder magnus.

Pythagoras.

Dictator Cæsar. Cymon. Lucullus Cato Socrates Hortẽsi9 Demosthenes Octauius Cæsar.

IOANNIS MARTINI SILICEI, IN ARITMETICEN Praxin præfatio.

OMnibus in ore eſt, lectores florentiſſimi, quæcunque à ſupremo rerum opifice emanarunt, numeri rationem habuiſſe. Nempe ſi diuinam illam ſubſtantiam contemplemur, eam monadibus tribus, eiſdémque diuinis perſonis fulcitam inuenimus: quare ternarium numerum eidem ſubſtantiæ diuinæ coęuum ponere neceſſum eſt. Et ſi ad dei ſublimis opera, intellectus acumen dirigamus: ea omnia, numeroſa vnitatum multitudine apprehendemus In principio enim creauit deus cælum, & terram (Geneſis primo) vbi per cælum, ſuperiorem illam orbium, & planetarum machinam intelligunt expoſitores: per terram vero, ea quatuor ſibi inuicem obuia ſentiunt elementa: numerum igitur ſi tollamus, in nihilum cuncta redigi oportet. Hæc eſt illa diſciplina, quæ cælorum motus, & eorum lentos inceſſus, ſubtiléſque numerat, & dignoſcit: qua neglecta, Claudij Ptolemæi in aſtronomia facile principis diuina opera, necnon ſubtiliſſimi Alphonſi Caſtellæ regis tabulæ perquam doctæ nequeunt deprehendi: ſub hac ipſa cuncti hominum ſtatus militant, atque viuunt. Quare talem, tantámque doctrinam aggredi non modo iucundum, & vtile: verumetiam neceſſarium eſſe arbitror: quam perinde Algorithmum plęrique authores dixerũt, quia nomine vir Algus, profunde hac in doctrina eruditus, eam primus poſterioribus propalauit. ¶Hunc igitur Arithmeticæ Praxis librum, in quinque tractatus diuidemus. In quorum primo, de numeris integris ſecundum characteras fiet ſermo. In ſecundo, de eiſdem integris ſecundum calculos ſupputatorios pertractabimus. In tertio, phyſicas fractiones ſuccincta breuitate annectemus. In quarto, de numeris fractis, ſiue numerorum fractionibus (quas vulgares dicunt minutias) diſcutiemus. In quinto autem, & vltimo, regulas, ſiue aureas quæſtiones, nõ minus vtiles, quàm ingenioſas, in lucẽ adducemus. Etſi nonnulli Arithmetici recte cenſuerint numerãdi per ſupputatorios calculos artem, illi eſſe præponendam, quæ per characteras, & elementa docet numerare: ab eorum tamen bene dictis noſter ſcribendi modus (quãuis oppoſitus videatur) diſcrepat minime: ij enim ordine naturæ procedunt, nos vero in præſentiarũ doctrinæ ordinẽ inſequimur.

Numerorum diuinitas.
Geneſis 1
Claudius Ptolomæus.
Alphonſus rex Caſtellæ.
Arithmetice cur algorithmus.
Operis diuiſio.

DE NVMERIS SECVNDVM CHARACTERAS, tractatus primus.

MVltis placere, omnium difficillimum eſt, inquit Demoſthenes. Ea igitur de cauſa plærique literatiſſimi, eorũ vitam quodam ſilentio percurrerunt: hanc grauiſſimam Plutarchi ſententiam inſequentes, Silentium non eſt redditurum rationem: ideò Sophocles philoſophus dicebat, Multa retinet ſilẽtium pulchra. Etſi nobis in hac parte multis placere ſit difficile: ijs præſertim rudibus, qui cum nihil intelligant, cęteros pariter nihil intelligere arbitrantur: quædam in hac arte, quæ pulchra eſſe videntur, ſcribere ſtatuimus, nec decẽs viſum eſt, ea eſſe reticenda. Agemus igitur in hoc tractatu de numeris integris ſecundum Arithmeticos characteras, qui ſunt decem. Et quoniam ſequentium tractatuum hic primus eſt fundamentum, certáque regula: ideò longius in ipſo quàm in cæteris morabimur: & numero Pythagorico, vtpote denario, decem conſtituemus diffinita, quibus totus hic primus tractatus (deo duce) abſoluetur.

Demoſthenes.
Plutarchus.
Sophocles.

DIFFINITA.

¶Numeratio, eſt numeri per elementum, competentia've elementa ar 1

tificialis expressio. Numerare vero, est numerum per elementum, competentia've elementa artificiose exprimere.

¶Nam si quispiam ex te petat nouem ducatos exprimi arithmetice: id facies hoc pacto, 9. Si vero triginta scribi petantur: hoc modo facere oportet, 30. Quòd si mille, & quinquaginta scribere libet: hac arte operandum est, 1050. & de cæteris pari modo.

Numerationis finis. ¶Finis numerationis est, quemcunque numerum propositum, decentibus elementis atque limitibus locare: & eundem, quantus sit, interroganti debite explicare. ¶Seruit numeratio in primis Astrologis: deinde Physicis, atque Calculatoribus: & breuiter perquam multis hominum conditionibus.

Vtilitas.

PRIMO NOTANDVM EST pro huius diffiniti claro processu, decem esse elementa, quibus Arithmeticus vtitur, scilicet 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Horum nouem priora significantia dicuntur: vltimum vero, videlicet 0, nihil significat, ideo nihili elementum nuncupatur, nominibúsque alijs, vt theta, circulus, cifra: cui talis inest proprietas, vt si cuipiam, quibusdámve elementorum significantium præponatur: inde illorum quodlibet incrementum sortiatur: deposito autem, decrementum sumat, vt sat in sequentibus patebit. Horum nouem elementorum significatiuorum 1, vnum significat: 2, duo: 3, tria: 4, quatuor: 5, quinq;: 6, sex: 7, septem: 8, octo: 9, nouem. Istorum primo denominatio est vnitas: secundo, binarius: tertio, ternarius: & sic de cæteris consequenter. ¶Aduerte tamen numerum in præsentiarum ad vnitatem vsq; extendi: quæ proprie non est numerus, sed numeri basis, & principium nuncupatur: vt in theorice diximus, de vnitate differentes: & secũdum hoc sic venit signanda numeri diffinitio. Numerus, est vnitas, vel composita ex vnitatibus multitudo. Numerorum, alius est digitus, alius articulus, alius ex his compositus. ¶Numerus digitus, est vnitas, vel numerus quouis denario minor. Ex qua diffinitione patet quodlibet elementorum significatiuorum, & solum tale, digitum numerum esse. ¶Numerus articulus, est numerus qui totus in decem æquas partes est partibilis, absq; vnitatis fractione: vti est 10, qui in decem vnitates est partibilis. & 20, qui in binarios decem adæquate partitur. 100 pariter, & 1000, articuli nuncupantur. ¶Numerus compositus, est numerus ex digito, & articulo resultans: vt 11 & 12. similiter 124: & breuitati studendo, omnem numerum inter duos proximos articulos locatum, compositum significamus.

Nũerus. Digitus. Articul9. Cõposit9.

SECVNDO NOTANDVM EST in numeratione necessarium admodum esse elementorum ordinem, pariter & loca consyderare. Ordo quidem in scribendis elementis præposterus in hac parte est tenendus: quem nobis Arabia tulit. Arabes enim in scribendo nobis opponuntur, à dextra incipientes manu, sinistram versus procedunt. ¶Pro documento ideo tenendum est, id elemẽtorum primum appellari, quod dextra manu sibi primam vendicat sedem: idq; secundum, quod medio obiecto, primum sequitur: id vero vltimum, vltra quod, versus læuam eundo manum, nullum ponitur elementum. ¶Ex his patet quouis numero signato, in quo multa reperiuntur elementa, quod illorum locetur ante, quod retro, quod ante & retro: ad diuersa tamen relatum. Istud minus obscure in præsenti figura videri potest.

Ordo in scribẽdis elemẽtis. Documẽtum. Corollarium.

	R E T R O.			
Retro.	vltimum.	Secundum.	Primum.	Ante.
Sinistrum.	3	4	5	Dextrum.
	A N T E.			

¶Loca, siue elementorum limites tot reperiuntur, quot & elementa. Si autem in aliquo numero tria tantum ponantur elemẽta, totidem in eodem limites, siue loca habentur: si 4, quatuor: cuiuis enim elemento valorem tribuit locus. Elementorum quoduis primo loco, siue numeri principio (quod idem est) situm, seipsum semel tantum valet: loco autem secundo, decies: tertio, centies: quarto, millies: quinto, decies millies: sexto, centies millies: septimo, millies millies: & sic consequenter. Ista capiuntur, nulla introeunte cifra. sed vt clarius hæc comprehendantur omnia, tale ponitur documentum.

Elementorum valor.

¶Data quauis linea numerali, in qua multa reperiantur elementa, illorum quodlibet,

Documẽtum.

primo dempto (quod vnitas dicitur) dena, centena, vel millena denominabitur: quamuis centum, infinita ve in eadem linea sint elementa. Dicitur ergo elementorum secundum, dena: tertium, centena: quartum, millena: quintum, dena: sextum, centena: septimum, millena: deinceps octauum, dena: nonum, centena: decimum, millena: & ita de alijs, per easdem treis denominationes continuo incedendo. Differenter tamen, quoniam quartum elementorum simplicem millenam nuncupamus: septimum vero, duplicatam, scilicet millies millenam: decimũ, triplatam, videlicet millies millies millenam: & ita de reliquis pari modo ascendendo, dicendũ est. Id autem de denis, & centenis contingit minime: non enim dicimus decies dena, decies decies dena, nec centies centena. Decies igitur, & centies, aut per se tantum, aut cum millenis ponamus, sic dicẽdo: decies millena, decies millies millena, centies millena, centies millies millena. Hæc omnia sequenti patere possunt figura. ¶ Pro qua intelligenda aduerte ꝙ elementũ, quod nullo interposito medio crucem sequitur, vnitas nuncupatur, & se tantum semel valet, 3 videlicet: aliud autem illi coniũctum, dena dicitur, seipsum decies valens, scilicet quinquaginta: aliud elementum, quod tertium est, centena nuncupatur, se centies valens: aliud quidem, quod quartũ est in ordine, millena dicitur: quintum vero, decies millena: sextum, centies millena: septimum autem, millies millena, termino clariori (& eodem Castellano) quento: octauum, decies millies millena, siue decies quento dicitur: nonum, centies millies millena, siue centies quento vocatur: decimum, millies millies millena, termino magis succincto (& eodem Castellano) millon: & ita de reliquis dic cõsequẽter.

Sequẽtis figuræ declaratio.

7	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2						+
cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	c	d	v
9	3	7	8	6	4	5	3	6	4	7	8	6	3	5	1	6	8	2	9	7	4	5	3
					s						m						q						

¶ Si autem totius lineæ valorem per ducatos exprimi quæras: dico in ipsa omneis hos contineri, scilicet noningentos, triginta septem millies millies millies millies millies millies mille: & octingentos, sexaginta quatuor millies millies millies millies millies mille: & quingentos, triginta sex millies millies millies millies mille: & quadringentos, septuaginta octo millies millies millies mille: & sexcentos, triginta quinq; millies millies mille: & centum, sexaginta octo millies mille: & ducentos, nonaginta septem mille: & quadringentos quinquaginta tres ducatos. ¶ Sed quoniam in hac numeri explanatione, inutilis apparet illa millenariorum assidua repetitio: ideo longe melius, & clarius sub hac forma valorem totius lineæ explicare poteris: dicẽdo, noningẽtas, triginta septem mille, & octingentas sexagintaquatuor summas: & quingentos, & triginta sex mille, & quadringentos, septuaginta octo millones: & sexcentos, trigintaquinque mille, & centum, sexagintaocto quentos: & ducentos, nonagintaseptem mille, & quadringentos quinquaginta tres ducatos reperiri.

Expressio valoris figuræ antecedentis.

TERTIO NOTANDVM EST, si quempiam numerorum scribere volueris, à manu dextra initiando, in sinistram procede: & videbis an ab vnitate initium sumat: quod si contingat, illam primo situabis loco, per elementum illi correspondens: vnum per 1, duo per 2, tria per 3 &c. sin autem taliter eueniat, primum occupet locum cifra. deinde consydera vtrum in tali numero simul ponatur dena, & illam per conueniens elementum, secundo limite pones, decem per 1, & viginti per 2 &c: si vero nulla talis denominetur dena, ibidem cifra locetur: sic de centenis, millenis, alijs'q; ascendentibus elementis faciendum est. ¶ Hæc omnia haud difficilibus exemplis aperiuntur. Si abs te quispiam quærat, illi per elementa, siue præhabitos characteras scribas mille, ducẽtos, quinquagintaseptem ducatos: illos sic scribere debes 1257. Si autem petatur scribas mille, ducentos, & quinquaginta ducatos: illos sic significabis 1250. Si autem quæratur abs te scribas mille, ducentos: taliter operaberis, 1200. Si mille, & quinquaginta scribi petantur: id facies hoc modo 1050. Tamen vnũ aduertendum est, si aliquem exprimere volueris numerum, incipiendum esse ab vltimo, ad primum vsq; veniendo: vt si exprimere volueris quot ducatos hic numerus contineat, 1527, dices mille, quingen

Scribẽdi in Arith. modus.

Exẽpla.

Exprimẽdi modus.

Documẽtum. tos,& viginti septem. ❡Tenebis tamen in hac materia hoc generale documẽtum, vt cuiusvis numeri vltimus locus nulla impleatur cifra:ibi enim superfluit. Inde sequitur, si significatiuorũ vnico elementorũ o adiungi contingat,tantũ semel locabitur, & hoc primo loco: si autem duobus addatur elementis, in duplo pluribus locis, & vltrà vno alio,vtpote tribus. At si tribus significatiuis addatur elemẽtis,duo acquiret loca:vnde plusquam tribus in locis,scilicet quinq; poterit reperiri. Si vero quatuor significatiuis adiungatur,septimum attinget locum. Et de reliquis,per assiduum binarium locorum incremento,pari modo sentiendum est. Hæc tamen subiectis innotescunt formulis.

exẽplũ primi	exẽplũ secũdi	exẽplũ tertij	exẽplũ q̃rti	exẽplũ si o quinq; addat̃ signifi.
10	1020	102030	10203040	1020304050

❡Pro huius tandẽ diffiniti cõplemẽto,linealẽ infrapositã inspicito figurã,quæ ab vnitate,ad centenariũ vsq; numerare docet numerũ. hac enim duce,modica adhibita diligẽtia,in quãtumuis magnũ (nullum inferiorẽ prætermittẽdo) poteris deuenire numerũ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2 ❡Additio, est vnitatum, numerorúmve in vnam summam collectio. Inde addere,est vnitates,vel numeros in vnam summam colligere.

❡Exemplum,1 & 1,binarium componunt:ideo illarum duarum vnitatum summa,binarius nuncupatur. Pari modo 1 & 4 & 7 simul collecti, 12 constituunt numerum: qui eorundem summa dicitur. Etiam 15 & 15 simul aggregati,30 numerum:qui eorundem summa priorum numerorum nuncupatur. ❡Huic additioni finem assignamus,expedite vnitates, numerósq; vnica comprehendere linea:qui diuersis primitus lineis,siue limitibus concipiebantur. ❡Seruit hæc species prope infinitis hominum statibus. Primo astrologis,pro addendis minutorum, secundorum, tertiorum,& cæterorum multitudinibus. Deseruit etiam calculatoribus:& breuiter cuiuis hominum conditioni.

Additionis finis. Vtilitas additiõis

PRIMO NOTANDVM EST pro additionis facili intellectu,quatuor in hac specie consyderanda esse: primum,numerus cui debet fieri additio:secundum,numerus,siue numeri addendi:tertium,linea interiecta:quartum,numerus productus. ❡Modus autem scribendi debet esse talis,primo loco superiori numerus cui debet fieri additio scribatur:deinde sub illo numerus,vel numeri addendi,sic vt vnitas sub vnitate, & dena sub dena,& ita de reliquis ponantur:postmodum directa linea interiecta sub illis numeris in longum pertracta:vt præsens ostendit figura.

In additione cõsyderãda

Numerus cui debet fieri additio	8	7	5	3
Numerus addendus	4	2	3	6
Linea interiecta				

Postremo sub linea numerus productus situabitur:vt in sequenti notabili docebitur.

SECVNDO NOTANDVM EST in additione operationẽ esse incipiendam à primis digitis,per medios (si qui fuerint) trãseundo,vsquedũ ad vltimos deuentum fuerit. Si enim numeri addendi in solis primis limitibus reperiãtur,ab infimo incipias, versus superiorẽ eundo,& omnes simul addas: & numerũ prouenientem sub linea locabis. Exempli gratia,sint numeri dati 3,5,7,9,hi sic veniunt addendi, 3 & 5 sunt 8,& 7 sunt 15: vltimo,9 addendo numerum:24 pro summa omnium simul sumptorum habebis. Horũ patet exemplũ. ❡Si autem numeri addẽdi duos,tres,quatuórve,aut plures compleuerint limites: colliges primo numeros primas occupantes sedes,ab inferiori ad superiores procedendo:& videbis an numerus prouenient sit digitus,articulus,vel compositus. Si numerus ille sit digitus, per conueniens elementum sub linea

Operãdi modus in addendo

9
7
5
3
24

primo subsignetur limite. Si autem talis numerus fuerit articulus, primo limite, sub linea cifra locetur, & numerus ille seruetur in mēte, & secundū decimæ eius partis denominationem, elemētis secundorum limitū addatur: sic videlicet ꝙ si ille articulus fuerit denarius, secundū decimæ partis denominationē, quæ est vnitas, elementis secūdorum limitū addatur: si vero articulus ille fuerit vigenarius, secūdum eius decimæ partis denominationē quæ binarius est, elemētis secūdorum limitum addatur: & si contingat articulū illum esse centenariū, aut maiorē numerum quēadmodum sæpe in prolixa additione cōtingit, in qua centū, vel plures numeri sunt addēdi: secūdum eius decimæ partis denominationē, quæ est denarius, elemētis secundorum limitum addatur: & sic de reliquis. Si cōtingat tertiū, scilicet illum numerū esse compositū, sub linea, limite primo, digitus illius ponatur, seruato in mēte articulo, qui secundū eius decimæ partis denominationē, elementis secūdorū limitum addatur, eo quo prius dictū est modo. Primis autem limitibus expeditis, ad secūdos deueniendū est, in quibus taliter est operādum, ac in primis: deinde eundū est ad tertios: postmodū ad quartos: & consequēter ad alios, si qui fuerint. Vno tamen seruato, videlicet quum elementa secundorum limitum, tertiorúmve, & aliorū limitum colligūtur, eadem, non vt denæ, vel cētenæ, sed vt vnitates nominentur. ¶Hæc omnia familiari aperiuntur exemplo. sit numerus, cui additio debet fieri 700643. numeri autem addendi 900052, & 814. qui, vt dictum est primo notabili, & vt figura ostendit, disponantur. Deinde operaberis hoc pacto, prima elementa primorū limitum addas, ab inferiori, puta 4, incipiendo: deinde ad binarium ascendas,

operationis exemplum.

7	0	0	6	4	3
9	0	0	0	5	2
			8	1	4

quem 4 addas: postmodum ternarium in primo limite superiori capias, cui addas numerum prius habitum, videlicet 6, ex quorum additione, 9 numerus prouenit, qui digitus est, & venit locandus limite eodem, primo scilicet, per conueniens elementū, sub interiecta linea. Deinde veniendum est ad secūdos limites, & dic, 1 & 5 sunt 6, & 4 sunt 10, quæ articulum componunt numerum: ideo ipso in mente seruato, sub linea limite correspondenti, 0 ponatur. Deinde digitus ille in mente retentus, elementis tertiorum limitum, secūdum eius decimæ partis denominationē, quæ vnitas est, addatur, sic 1 & 8 faciunt 9, relicta 0, (quæ vt dictum est nihil significat) ibis ad supremū elementū, quod est 6, cū quo sumptus 9, numerū 15 facit, qui quidē compositus est: pones igitur illius numeri compositi digitū, scilicet 5, sub linea limite correspondēti, retento in mente articulo, qui secūdum eius decimæ partis denominationē, quæ est vnitas, elemētis quartorū limitum addatur. Sed quoniā nullum in eisdē significatiuum reperitur elementū, eundem articulū sub linea quarto limite locabis, secundū eius decimæ partis denominationē, videlicet vnitatē. Deinde eundum est ad quintos limites in quibus nullum reperitur significatiuū elementū, sed solum cifræ: ideo sub linea limite correspondēti, 0 ponatur. Quo facto eundum est ad sextos, & vltimos limites, & dic, 9 & 7 sunt 16, pones igitur digitum, videlicet 6, sub linea, limite sexto, & articulum remanentem, secundum eius decimæ partis denominationem, quæ est vnitas, sub linea vltimo limite, videlicet septimo, pones. Quibus igitur peractis, numerus sub linea repertus, summa, siue numerus productus, ex tali additione dicetur: & sub tali forma dispositionem habebit.

Numerus cui debet fieri additio		7	0	0	6	4	3
Numeri addendi		9	0	0	0	5	2
					8	1	4
Linea interiecta							
Numerus productus	1	6	0	1	5	0	9

¶Aduertendum tamen est, si in omnibus primis limitibus numerorum addendorum ponatur 0, ad secundos eundum est, prius tamen posita cifra sub linea, limite primo, directe respondenti primis limitibus numerorum addendorum. Si vero in aliquo primorum limitum 0 ponatur, & in aliquo non: nullus est habendus aspectus ad 0, sed solum ad significatiua elementa. Est insuper aduertendum, si in omnibus secūdis, tertijs, vel quartis &c. limitibus, cifræ ponātur: 0 pariter in summa sub linea, limite correspondenti, ponatur: & hoc si nihil remanserit in mēte, ex præhabita operatione: quòd si quid

in mente repositum fuerit, id in summa, loco directe correspondenti, per conueniens elementum ponatur, hoc est secundum eius decimæ partis denominationem, & hoc si talis denominatio decimæ partis sit numerus digitus: si articulum numerum faciat, ipso in mente seruato, sub linea, limite correspondenti ponantur 0: & deinde immediate sequentibus limitibus numerorum addendorum, numerus ille in mente seruatus, secundum denominationem eius decimæ partis, prioris denominationis addatur: & consequenter pari modo dicas. Si autem talis numeri in mente seruati denominatio decimæ partis numerum faciat compositum: illius numeri compositi digitus sub linea ponatur, loco correspondenti, articulo in mente retento, pro limitibus immediate sequentibus numerorum addendorum: quem quidem articulum numeris addendis, secundũ eius decimæ partis denominationem addes, secundum quod dictum est: & de cæteris consimili efficiatur modo. His claris exemplis, quæ dicta sunt possunt cognosci.

7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	0	0	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	1	3	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	0	4	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	6	0	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	1	7	1	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	5	0	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	4	0	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	2	6	2	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	8	0	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	6	0	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	0	2	4	0	0
7	0	9	8	0	0	9	9	0	1	1	0	0	0
84	1	7	6	1	0	8	108	0	8	7	4	0	0

TERTIO NOTANDVM EST pro huius diffiniti cõplemento, tres esse probationes, quibus additio (quæ prima numerationis species dicitur) probari potest. Prima est cõmunis, & nouenaria. Secunda partim latebrosa, partim vero inusitata, quam septenariam dicunt. Tertia quidem per subtractionem fieri habet. ¶Pro primæ probationis intellectu, est aduertendum plærosq; Arithmeticos additionẽ per 9, hac via probare. A numeris addendis abstrahatur 9 quotiescunq; abstrahi potest: & si quę remanet nota, siue numerus qui 9 minime attingat, ille in mente habeatur, vel, ne obliuioni detur, anteposita operationi recta linea, in capite illius locetur: deinde ad summam siue prouenientem numerum, sub linea interiecta locatum, eundum est: à quo toties 9 numerus abstrahatur, quoties abstrahi permittit: & si quis remãserit digitus, 9 numerum non attingens, ille in mente seruetur, vel in altero lineæ ponatur extremo: & videbis an duæ illæ notæ, siue numeri in extremis lineæ partibus positi sunt æquales, vel non: si primum eueniat, operatio erit valida: si autem secundũ contingat, cassa erit & nulla.

Prima probatio, q nouenaria.

¶In hoc signato exemplo, abstrahendo à numeris addendis 9, quotiescũq; potest abstrahi, nota, siue numerus manens, est ternarius: & consimilis in summa remanet numerus, abstracto 9, quotiescunq; abstrahi potest: ideo operatio est valida, vt asserunt. Est insuper aduertendum, q sæpenumero contingit abstracto 9, à numeris addendis, quotiescunq; potest, nihil remanere pro nota: imò cum hoc euenerit, ponenda est in capite lineæ 0: & ad summam accedes, videndo vtrum semoto 9 quotiescunq; potest, nihil remanserit: quod si euenerit, ita in altero lineæ extremo ponenda est 0, & operatio bene valebit. infra vero dicetur, vbi illius oppositum accidat.

Primę probationis exēplum

Exemplũ. 3

4	3	1	5	
5	0	9	3	
9	4	0	8	3

In isto autem exemplo, à numeris addendis ter abstrahi potest adæquate 9, & nullus remanet numerus, ideo in capite lineæ, 0 ponebatur: à summa vero bis tantum abstrahi potest 9, pariter nihil superest, quare in pede lineæ, 0 ponebatur: ideo operatio est valida, quia nota vtrobiq; posita, est eadem.

Exemplũ. 0

3	6	0	2	
4	7	1	4	
8	3	1	6	0

Contingit autem quandoq;, q nec à numeris addendis, nec à summa potest abstrahi nouenarius: ideo pro talibus sufficit digitos resultãtes esse æquales, videlicet digitum illum

1	8	9	9	
1	9	8	1	5
1	1	2	0	
5	0	0	0	
				5

qui ex elementis significatiuis numerorum addendorũ resultat, & illum qui in summa reperitur. Quãdoq; autẽ à numeris addendis sæpe abstrahi potest 9, vbi à summa semel tantũ abstrahi non potest, ecõuerso autẽ euenire non potest: ideo pro talibus sufficit q; abstracto 9, à numeris addendis quoties poterit, numerus remanẽs nouenarium non attingẽs sit æqualis digito in summa reperto. Istorũ omniũ exempla repertu sunt facilia. Hæc quidẽ est nouenaria probatio, quã cõmuniter loquentes in hac parte afferunt: eadẽ enim probare solent additionẽ rectã, aut obliquã esse. ¶Hanc probãdi viam nullã esse, facillime declaratur. Sequeretur in hoc exemplo, operationẽ bene valere: quoniã semoto 9 à numeris addẽdis, quotiescũq; semoueri potest, nota siue numerus remanẽs, qui nouenariũ numerũ non attingit, est senarius, & talis est numerus qui in summa remanet, subtracto pariter 9, quotiescunq; ab ipsa summa abstrahi potest: sed notum est illam operationẽ nihil penitus valere. Quare cõcludo probationẽ illam nouenariã insufficientẽ, & nullam esse: per illam enim solum cõcludi potest, scilicet si additio sit bona, notæ, siue numeri remanentes, qui nouenariũ non attingunt numerum, sunt æquales, cæteris intellectis.

Prime probationis reprobatio.

Exẽplũ.

				6
6	4	5	2	
3	0	6	7	
9	2	1	3	
				6

¶Dimissa igitur tanq̃ inualida hac nouenaria probatione, ad aliam, quæ per 7 fieri habet, accedendũ est. Pro qua intelligenda, est aduertẽdum, q; à quauis numerorũ addendorum linea, pariter & à summa, capiẽda est nota, & protracta recta linea ante operationẽ, debita sede est locãda: vnde à notis numerorũ addendorũ abstrahatur 7 quotiescũq; abstrahi potest, notã remanentẽ in capite lineæ ponendo: & si nota illa remanẽs, notæ habitæ à summa, quam in altero lineæ pede ponas, sit cõsimilis: operatio erit bona, sinautẽ, nihil valebit. Aduerte tamen isto modo à quauis numerorũ addendorũ linea capiendã esse notã. Debes à duobus vltimis elementis incipere, versus priora eundo, à quibus abstrahes 7 quotiescũq; potest abstrahi, & videbis an nihil pro nota remãserit: q; si ita eueniat, ad alia duo elemẽta ibis (si quæ sint) à quibus pari modo subtrahes 7 quotiescũq; poteris: & si nihil pro nota supererit, ad alia duo præcedẽtia accedes, quousq; ad primũ deueneris elemẽtum. Si autem cõtingat abstracto 7 à duobus vltimis elementis, quotiescũq; subtrahi potest, aliquis remaneat digitus 7 minor: ille digitus loco denæ, se decies valens, capietur simul cũ antepenultimo elemẽto, quod vnitas reputabitur, se semel tantũ valenti, à quibus subtrahas 7 quotiescunq; poteris, si remaneat nota, quæ sit digitus minor septenario, loco denæ accipiatur, & figurã tertiam à fine præcedat, & cum ipsa nota quartũ elementũ à fine loco vnitatis sume, à quibus duobus subtrahes 7 quotiescũq; poteris: & fiat iste discursus per totã lineã, vsq; ad primũ elementũ inclusiue, & videbis an nota remanẽs in fine sit digitus, vel 0, quæ, recta linea anteposita numeris addendis, loco directe anteposito locetur. Iste discursus debet fieri in qualibet numerorum addendorum linea, pariter & in summa: inter numeros addẽdos intelligo etiam numerũ cui additio fieri debet.

Secunda probatio, quæ per septẽ fit.

¶Sed vt clarius hæc concipiãtur: omnia facili aperiuntur exemplo. In prima huius exempli numerorum addendorum linea, duo vltima sunt 3 & 4, quæ 34 valent: à quibus subtracto 7 quotiescunq; subtrahi potest, remanet 6, qui immediate post 0 ponatur, & valebit sexaginta: a quibus semoto 7 quotiescunq; semoueri potest, 4 erit residuum, locandus immediate post secundum elementum loco denæ, qui simul, & præcedẽs figura 43 faciũt: à quibus ablato 7 quoties auferri potest, vnitas remanet, ipsaq; post primum elementum locata, valet decem, & primũ elementum sex, quæ simul sumpta sedenarium componũt numerũ: à quo deposito 7 quotiescũq; deponi permittit, remanens nota est 2, qui post antepositã numeris addendis lineã, directo ponatur conspectu. In secunda vero numerorum linea remanẽs nota est 6: in tertia autẽ est 0, illæ igitur habitæ ex numeris addendis notæ, addantur, & numerũ octonariũ habebis: à quo 7 quotiescunq; permittit, abstrahe, & digitus, siue remanẽs nota est vnitas, quæ in capite lineæ posita residet: & quia habita à summa nota est etiam vnitas, sequitur operationẽ bene valere: vbi autẽ notæ illæ inæquales essent, mãca esset probatio. Hæc est septenaria probatio minus vulgata,

Secundæ probationis exemplum.

					1
3	4	0	3	6	2
1	6	4	0	7	6
4	0	9	5	7	0
9	1	4	0	0	
					1

quàm sit præcedens nouenaria:qua (vt dicunt) bonam esse additionem ostenditur,aut nihil valere. ℂHanc tamen septenariam probationē,perinde ac alteram nouenariam, nihil omnino valere sic ostendo. Sequeretur in hoc infra posito exemplo factam operationem,siue additionem,validam esse:quod tamen à vero est longe alienum. Solum enim ex hac probatione (si ita dicenda sit) concludi potest,hanc consequētiam valere:si operatio,siue additio debite fiat,probatio septenaria,vt declarata est,valebit. sed iam peteret aliquis,Quare est,si additio recte sit disposita,probatio nouenaria,pariter & septenaria tenebūt:non tamen oportet,vbi vtraq; probationum sit debite facta (vt declaratum est) additionem bene valere? Ad istud non respondeo:tum quia facillimum,tum etiam, quia ad practicum Arithmeticum tales enodare quæstiones spectat minime.

Septenariæ probationis improbatio

				6
6	4	0	2	4
3	0	9	6	2
8	5	6	7	
				6

ℂDimissis igitur his duabus (vt dicunt) probationibus,ad tertiam probationem,quæ per subtractionem fieri habet,& in quauis additione absq; instantia tenet,properandum est. Subtrahes igitur à summa quemlibet addendorum numerorum,præter numerum cui additio fiebat:& si residuum à summa fuerit illi æquale,operatio dicetur bona. sinautē:inutilis,& mala.

Tertia probatio, certior.

ℂSed quoniā videtur ignotum per ignotius probari,& circulationem esse in modo probandi,cum (vt in sequenti capite dicetur) subtractio per additionē habet probari:ideo aliam in præsentiarū probationem tibi assignare intendo. Pro qua perfecte intelligenda,si velles facta additione cognoscere,vtrum bene operatus fueris,primo omnes addēdorum numerorum digitos simul in vnum colligere debes:& videbis an in summa consimilis correspondeat numerus,eodem limite. q̄ si æqualis reperiatur numerus,discurras,per denas numerorū addendorum,easdem in vnum colligendo numerū:ipsis'q; apprehēsis,respice an in summa consimilis denarum reperiatur aceruus,quo inuento ad centenas addendorum numerorum,illud idem faciendo ibis,& consequēter ad vlteriora loca,si quæ fuerint. & si euenerit in quouis summæ limite talem reperiri numerū,qualis in addendorum numerorum limitibus correspondentibus repertus est:operatio erit integra. Exempli gratia. Sicut in aggregato vnitatum,siue digitorum numerorū addendorum quatuor reperiūtur vnitates,totidem etiam in summa vnitates reperiuntur:& quemadmodū in numeris addendis,sex inueniuntur denæ, sex etiam in summa ponuntur: & de centenis, atq; millenis idem cōtingit:ideo bona est illa operatio.

Quarta probatio verissima

Vltimæ probationis exemplū

5	3	4	1
4	5	2	3
9	8	6	4

Est tamen aduertendū qualiter in hoc exemplo infra posito procedēdum sit. Quoniam licet primo limite nulla videatur difficultas,eo q̄ tot inueniuntur vnitates in summa,limite primo,quot reperiuntur in addendorum numerorū limitibus correspondentibus:videtur tamen,non tot denas ipsi summæ correspondere,quot in addendis numeris reperiuntur. quum ita sit decem denas in numeris addendis inueniri,vbi in eodem limite in summa,o reperitur. etiam de cētenis aliter contingit,q̄ de vnitatibus:quapropter est consyderādum in talibus operæprecium esse vicinis vicina accōmodare elementa. volo enim dicere in isto exemplo,centenas debere denis accōmodare,& millena cētenis,intellige in summa in qua vtroq; loco o ponitur, videlicet limitibus secundo,& tertio:debet igitur quartus limes ipsius summæ,in quo millenæ ponuntur,tertio limiti,qui est centenarum locus,aliquid accōmodare:deinde tertius limes secundo limiti,in quo denæ ponuntur ex accommodato etiam accommodare. Capiamus igitur à quarto limite ipsius summæ vnam millenam pro tertio limite:qua accepta,solum septem remanebunt millenę,& tertio limite millena illa cētenas decem valebit,à quibus vnam centenam pro secundo capiemus,quę in eodem decem valebit denas,& sic nouem solum limite tertio centenæ manebunt:hoc quidē discursu peracto constat manifeste operationem bene valere,quum tot reperiuntur vnitates in summa,quot in numeris addendis:etiam tot denæ,tot centenæ,pariter & millenæ,nec plures,nec pauciores. Hæc enim est probatio,quæ quāuis longa videatur,sine instantia in quauis additione tenebit,longissima vero,vbi plurimę fuerint lineæ numerorum addendorū. vnde difficillima erit,qua nemo vtatur. in paruis tamen,& facilis & certa.

4	5	3	2
3	4	7	2
8	0	0	4

¶Subtractio, est vnitatis, vel numeri, ab vnitate, vel numero ablatio: vt inde relicta appareat summa. Hinc subtrahere, est vnitatem vel numerum, ab vnitate vel numero auferre.

¶Verbi gratia à 7 remouendo 3, remanens numerus est 4. Et à 15 ablato 7, manens summa est 8. Ita à 30 semoto 17, quod relinquetur, est 13: & consequenter hoc modo. Vnde aduerte quòd non quicunq; numerus a quouis numero subtrahi potest, sed solum minor à maiori, vel æqualis ab æquali. ¶Finis subtractionis est, quibusuis duobus numeris propositis, alterum ab altero auferre: residuum (si quod fuerit) assignando. ¶Seruit autem abstractio diuersis hominum conditionibus, in primis astrologis, & calculatoribus: & denique quibuscunq; mercatoribus, thesaurarijs, atque trapezitis.

Subtractionis finis & vtilitas.

PRIMO NOTANDVM EST in hac subtractionis specie quatuor esse consyderanda. Primum, numerus à quo debet fieri subtractio. Secundum, numerus subtrahendus. Tertium, linea interiecta. Quartum, numerus manens. ¶Modus autem scribendi sit talis: primo & superiori loco numerus, à quo fieri debet subtractio, ponatur. Deinde sub eodem numerus subtrahendus, sic vt vnitas sub vnitate, dena sub dena, & ita de reliquis (si sint) locetur. Postmodũ linea interiecta protrahatur, vt præsens ostẽdit figura.

In subtractione cõsyderãda

Numerus à quo debet fieri subtractio	7	6	4	5	2
Numerus subtrahendus	3	6	6	4	7
Linea interiecta					

SECVNDO NOTANDVM EST in subtractione initiandam esse operationem à primis elementis, per medios eundo, quoad vltimos vsq; peruenerimus. & à primo superioris numeri limite, inferioris numeri vnitatem separabis, & si quis supererit digitus, ille sub linea sede correspondenti ponatur. si autem nihil remanserit: o sub linea pones. Qz si contingat subtrahendi numeri digitum, esse maiorem digito siue vnitate numeri, à quo subtractio fieri debet: videbis per quantũ à denario distat: & id per quod distat, vnitati siue digito numeri, à quo subtractio debet fieri, addas, numerũ resultantem sub linea loco vnitatis ponendo, seruata tamen in mente vnitate: quam immediate sequenti numero addas, quæ vnitas limite secundo addita, dena nuncupatur. Deinde prouenientem numerum à secũdo limite superioris lineæ (vt prius dictum est) subtrahe. Aduerte tamen an figura illo secundo limite existens (cui vnitas seruata in mẽte debet addi) sit nouenaria: quod si euenerit, sub linea secũdo limite, figuram secũdi limitis superioris lineæ pone, seruata vnitate in mente, pro tertio limite numeri subtrahendi. Et pari modo etiam operandum est in cæteris limitibus. Si contingat o in numero, à quo debet fieri subtractio, reperiri: est etiam omnino eodem modo faciendum, sic videlicet, acsi primo limite ponatur, & in correspondenti limite numeri subtrahendi digitum inuenias, videbis per quantum distat talis digitus à denario numero, & distantiam sub linea limite correspondenti, per conueniens elementũ pone: vnitate in mente reposita. Quòd si vtroq; primo limite tam numeri à quo debet fieri subtractio, q̃ subtrahendi o locetur, o pariter sub linea correspondẽti loco signabis. Est tamen aduertendum, si in alio à primo limite numeri subtrahendi o locetur, & ex præhabita subtractione in mente reposita fuerit vnitas, ponenda est distantia per quam distat à 10, videlicet 9, sub linea limite correspondenti, dummodo o in numero, à quo debet fieri subtractio, eodem limite reperiatur: & seruabitur pro limite sequenti vnitas, vt hic.

Primus subtrahẽdi modus

3	0	0	8	0
1	9	0	9	0
1	0	9	9	0

Si vero in numero illo superiori limite correspondenti, significatiuum ponatur elementum: an illud sit vnitas, vel quod aliud ascendens elementum videbis: si primum eueniat, sub perpendiculari sede, o locabis: si autem secundum contingat, à tali elemento vnitatem subtrahe, & residuum sub linea pone. Est adhuc etiam consyderãdum, si eueniat, facta deductione, vltimos characteras tam numeri superioris, q̃ subtrahendi esse æquales: vbi ex præhabita deductione nulla in mente reposita fuerit vnitas: nihil sub linea, vltimo ponendum est loco: quoniam si aliquid poni deberet, maxime esset o, sed notũ est, quando vltimo loco o poneretur, nihil faceret.

Quæ autem dicta sunt: haud obscuro aperiũtur exemplo. Si vis subtrahere 60029471 ducatos à 81005375 ducatis, illos numeros hoc pacto locabis. 8 1 0 0 5 3 7 5
Et operaberis dicendo, à 5 deposita 1, remanet 4: qui sub linea 6 0 0 2 9 4 7 1
correspondenti loco ponatur, videlicet sub vnitate. Deinde dic, 7 semoto à 7, nihil remanet: locetur igitur sub linea, secundo limite 0. Postmodum à 3 subtrahi 4 non potest: ideo distantiam per quam 4 distat à 10 quæ est 6, addatur 3, cum quo 9 numerum componit, qui sub linea, tertia sede ponatur: retenta in mente 1, quæ 9 numero addita, cum eodem 10 reddit numerum: qui à 5 subtrahi non potest. & quoniam 10 à 10 non distat, ideo 1 in mente seruata, sub linea, quarto limite, 5 ponatur. De cæteris autem elementis, eodem ordine procedendum est. Completa igitur operatione, numerus manens erit 20975904 ducati. Horum autem declaratorum apertissimum inspicere potes exemplum.

Numerus à quo debet fieri subtractio	8	1	0	0	5	3	7	5
Numerus subtrahendus	6	0	0	2	9	4	7	1
Linea interiecta								
Numerus manens	2	0	9	7	5	9	0	4

¶Per istud exemplum iam positum, & ea pariter quæ sequuntur: subtrahendi artem poteris adamussim callere. ¶Est adhuc alter subtrahendi modus, quem & breuiorem, & limatiorem esse affirmo, videlicet dispositis numero à quo debet fieri subtractio, & numero subtrahendo, vt iam dictũ est, videbis an primum subtrahendi numeri elementum sit æquale, minus, aut maius primo superioris numeri, à quo subtractio habet fieri: quod si æquale fuerit, sub linea directo loco 0 ponatur: & ad secundos limites ibis. Si autem id primum elemẽtum minus fuerit, excessum per quem à superiori exceditur, sub linea limite primo pone: & te ad secunda transfer elementa. Si vero tertium contingat, maius videlicet esse: ad secundum numeri superioris limitem ibis, à quo vnitatem mutua, pro primo limite eiusdem numeri capies: quæ quidem vnitas, decem primo limite valet, & resultabit numerus compositus: à quo subtrahe digitum numeri subtrahendi, & residuum sub linea limite primo per conueniens elementum pone. Nec obliuioni dabis elementum secundi limitis numeri superioris, à quo vnitatem separasti, vna minus quàm antea vnitate valere: aut nihil, si elementorum primum, scilicet vnitas fuerit. Si autem eueniat secundũ elementum numeri superioris, à quo 1 mutuari deberet, esse 0, eundum est ad tertium: quod si tertium sit pariter 0, ad quartum ibis: & denique ad significatiuum elementum deuenire oportet, quod primi limitis elemento, simul & sequẽtium limitum elementis non significatiuis, vnitatem mutuabit: ex qua quidẽ vnitate decem pro primo limite capiantur vnitates, & pro quouis aliorum limitum cifris signatorum, nouem monades accipiantur. Scias tamen quamlibet accommodatarum vnitatum secundo limite decem valere, & tertia sede centum, quarto vero loco mille, & sic de alijs: quo facto, subtrahes digitum numeri subtrahendi à numero composito primi limitis, & residuum sub linea pone: & postquã secundus limes numeri superioris, in quo est 0, mutuo nouem vnitates recipit: ab illis subtrahe elementum secundi limitis numeri abstrahendi: & consequenter fac de reliquis. Patefient ista omnia digestissimo exemplo. Vis autem subtractis 2018643 ducatis, à 9005273 manentem numerũ reperire: dispone primo illos numeros, sic vt numerus à quo subtractio fieri debet sit superior, & subtrahendus numerus inferior, & taliter disponantur vt sit vnitas sub vnitate, dena sub dena &c: deinde sub ambobus numeris rectam lineam pone, vt præsens figura demonstrat. Hoc igitur pacto incipies operari, dicendo, à 3 deponendo 3, nil remanet, ideo sub linea primo limite 0 ponatur. deinde à 7 subtrahendo 4, remanet ternarius, qui sub linea secundo loco venit locandus. postmodum à binario semoueri 6 non potest: ideo eundum est ad sequẽtem limitem, in quo est 5, à quo pro tertio limite mutuatam habebis vnitatem, quæ ibidem decem valet vnitatibus, quæ simul cum binario, numerum 12 efficiunt, qui compositus est: à quo semoto 6, remanet numerus 6, sub linea tertio limite ponendus. consequenter à quaternario remanenti in quarto limite superioris, 8 subtra-

9	0	0	5	2	7	3
2	0	1	8	6	4	3

Alter subtrahendi modus.

Prior tamẽ modus diuisioni, radicũ item tam in quadratis, quàm in cubicis nũeris extractioni, posteriore multo accommodatior est & expeditior, si semel eum recte didiceris.

Operationis exemplum.

hi non poteſt: mutuanda igitur eſt vnitas ab vltimo limite, in quo 9 ponitur, quæ decem vnitates in ſexto limite ſignat: à quibus rurſus vna mutuetur ad quintum limitem, dimiſſis illic 9, quæ centies millenas ſignificant, ac denuo hic 9 relictis, vna ad quartum limitem accommodetur, quæ cum 4 ibidem remanenti, 14 numerum efficiunt: à quo ſubtracto octonario, ſupereſt 6, qui quarto limite ſub linea locetur. Poſtmodum à 9 in quinta ſede derelicto ex aſſumpta vnitate ſubtrahatur vnitas, quæ in tertio limite numeri ſubtrahendi habetur, & manens 8 ſub linea interiecta quinta ſede ponatur. Amplius à 9 qui pariter ex mutuata vnitate in ſexto loco ponebatur, o ſubtrahitur: ideo ſub linea, ſexto limite ille 9 ponatur. Vltimo autem ab 8 remanente in ſeptimo, & vltimo limite ſuperioris numeri ſubtracto 2, reſiduum 6 erit, qui ſeptimo, & etiam vltimo limite locetur. His igitur determinatis, validam operationem reperies: quæ lucide iſto exemplo declaratur.

Numerus à quo debet fieri ſubtractio	9	0	0	5	2	7	3
Numerus ſubtrahendus	2	0	1	8	6	4	3
Linea interiecta							
Numerus remanens	6	9	8	6	6	3	0

Pro ampliori autem huius diffiniti intelligentia, hæc duo infrapoſita exempla conſyderabis.

9	7	6	5	0	0	0		3	0	0	0	5	6	4	9
4	0	0	0	9	6	9		2	7	8	9	0	0	0	0
5	7	6	4	0	3	1		2	1	1	5	6	4	9	

TERTIO NOTANDVM EST tres in ſubtractione probationes inueniri. Quarum prima eſt nouenaria. Secunda ſeptenaria. Tertia vero per additionem fieri habet. ¶Pro primæ igitur probationis expeditione eſt aduertendum, completa operatione, à numero ſuperiori, à quo ſubtractio fieri debet ſeparandum eſſe 9 quotieſcunque poteſt: & ſi aliquis digitus ſuperſit nouenario minor, facta in margine linea, capite ſuperiori ponatur: ſi nihil autem remanſerit, ibidem o locetur. Deinde à ſubtrahendo numero, ſimul & à manente, ſiue ſubtracto numero (quod idem eſt) ſubtrahe 9 quoties poteris: & remanentem notam in altero lineæ extremo pone: quo facto, videbis an notæ illæ ſint æquales, vel non: ſi primum eueniat, operatio eſt valida: ſi ſecundum, nulla erit. Exempli gratia.

Prima probatio ſub tractõis.

Subtracto 9 à ſuperiori numero quoties permittit: remanens nota eſt binarius, in capite lineæ poſitus: & ſemoto 9 à ſubtrahendo, & numero manente ſub linea poſito, quoties auferri poteſt: nota etiam manens eſt binarius, ideo operatio eſt bona.

Primæ probationis exẽplum

					2
6	0	3	4	7	
4	9	2	6	0	
1	1	0	8	7	
					2

¶Hæc quidem probatio nil penitus valet: quoniam ex illo probandi modo ſequeretur in hoc exemplo operationem bene valere: quod aperte eſſe falſum omnibus cõſtat. Notum enim eſt ſubtractis ſubtrahendis, vt dictum eſt, remanẽtes notas eſſe æquales: ſolũ igitur poteſt ex illo probandi modo (ſi ita dicendũ eſt) haberi hãc conſequentiã valere, hæc operatio eſt bona, ergo remanẽtes notæ ſunt æquales. Sed hoc non arguit illam probationem bene valere: vbi tamen econuerſo conſequentia valuiſſet, efficaciſſima eſſet probatio.

Primæ probationis improbatio.

				6
4	6	0	5	
3	5	2	4	
2	3	4	1	
				6

¶Dimiſſa igitur hac probatione, ad ſeptenariam properandũ eſt. Pro qua intelligenda, non eſt opus longo vti ſermone. Eſt autẽ eodem modo faciendum, ac in præcedenti diffiniti declaratione dictum eſt: ita videlicet, vt à numero ſuperiori nota ſumatur, hoc modo: primo ab vltimis duobus elementis ſubtrahatur 7 quoties permittit: deinde ſi nihil remanſerit, ad præcedentia duo te transfer elemẽta: ſi autem ſupererit aliquis digitus, ille loco denæ accipiatur cum antepenultimo elemento, quod vnitas reputabitur: à quibus ſimul ſubtrahe 7 quoties potes: & breuitati ſtudendo, omnino eodem modo accipienda eſt nota, ac in additione dictum eſt, quam antepoſita linea recta in capite eiuſdem pones.

Secunda probatio

Deinde à numero subtrahendo capiatur etiam nota, quam ante lineam aspectu directo locabis. Postmodum à numero manente notam accipies, quam pariter ante lineam sede correspondenti repones: & ab ijs duabus notis separabis 7 quoties poteris, & remanẽtem numerum in inferiori lineæ extremo pone: quo facto, videbis an illæ extremales notæ sint æquales, aut non: quòd si æquales fuerint, bene operatus es: male autem, si inæquales extiterint. ¶In isto exemplo hæc comprehenduntur quæ dicta sunt. Sed modus iste operandi nihil valet, quemadmodum nec prior: quoniam ex illo haberetur in hoc exemplo infrapo sito bene operatum esse, quod manifeste à vero est alienũ.

Reprobatur secunda probatio.

					6
9	0	6	4		
6	8	0	3		6
2	2	6	1		0
					6

Ex illa probandi via, solum concludi potest extremales notas remanentes esse æquales, si rite facta fuerit subtractio: sed illud (vt visum est) non sufficit. ¶His igitur duabus probationibus prætermissis, ad tertiam (quam sine instantia in omnibus verum continere asseueramus) deueniendum est. Pro qua intelligẽda: aduerte vtendum esse additione: ita videlicet quòd numerus subtrahendus, & numerus manẽs addantur: & si summa ex illorum additione sit æqualis numero, à quo debet fieri subtractio, operatio est bona: si hoc autem non contingat, nihil valere affirmo. Ista probatio, est qua communiter arithmetici, & pariter mercatores vtuntur: quæ calumniari minime potest. Potest adhuc vna alia probatio haberi huic speciei deseruiens, conformis illi, quæ in fine tertij notabilis præcedentis diffiniti ponebatur: & est talis. ¶Videndum est an in numero subtrahendo, & numero manente tot reperiantur vnitates, quot in numero à quo subtractio fieri debet, inueniuntur: videbis insuper vtrum tot denæ, tot centenæ, & sic ascendendo, in illis duobus numeris reperiantur, quot in suprapposito numero, modo, ac arte præcedenti diffinito obseruatis. quòd si hæc omnia, vt dictum est, vniformiter inueniãtur, operatio bene valebit: & si oppositum contingat, cassa erit, & nulla.

Tertia probatio certior.

					5
5	9	0	6		
4	0	7	3		6
1	4	1	3		6
					5

Quarta probatio.

4 ¶Multiplicatio, est numeri procreatio, ad multiplicandum numerum proportionaliter se habentis, ac ad vnitatẽ multiplicans numerus se habet. Multiplicare autem, est numerum procreare, qui ad multiplicandũ proportionaliter se habeat, ac ad vnitatẽ multiplicãs numerus se habet.

¶Exempli gratia: vis multiplicare 4 per 5, dic quater 5, numerum 20 procreant: qui ad multiplicandum, videlicet 5, in eadem porportione se habet, qua multiplicans, scilicet 4 ad 1. vtrobiq; enim quadrupla proportio inuenitur. Pari modo, si 7 per 9, aut 8 per 15 ducatur: procreabitur inde numerus, in eadem proportione ad multiplicandum numerum se habens, qua ad vnitatem multiplicans ipse se habet. ¶Finis autem huius speciei, est summam, siue numerum prouenientem ex ductione vnius numeri per alterum, assignare. ¶Seruit multiplicatio multis hominum statibus. In primis astrologis, pro reductione signorum ad gradus, graduum ad minuta, minutorum ad secunda, secũdorum ad tertia, tertiorum ad quarta, & de cæteris pari modo: seruit calculatoribus, pro reductione corporum, motuum, aut qualitatum ad partes eiusdem denominationis: deseruit autem mercatoribus, pro multis talibus cognoscendis: verbi gratia, si aliquis mercator quemlibet centum equorum 17 ducatis vendiderit, ad sciendum quot ducatos ex omnium venditione recipiet, multiplicatione est opus. Si vis pariter scire, quot duodenos mille ducati contineant, hac specie intellecta, id facillime cognoscere potes. Et breuiter per hanc speciem, numerus partium cuiuslibet integri patebit.

Multiplicationis finis & vtilitas.

PRIMO NOTANDVM EST duos in hac specie numeros esse maxime requisitos: quorũ alter multiplicandus, alter vero multiplicans appellatur. Cõmuniter tamen in multiplicatione sex veniunt consyderanda. Primum numerus multiplicandus: secundum numerus multiplicãs: tertium linea interiecta: quartũ numeri prouenientes: quintum linea supposita, sextũ prouenientiũ numerorũ summa. ¶Scribẽdi autẽ modus ta

In multiplicatione pẽsanda.

lis esse debet:supremo,& capitali loco, multiplicandus numerus ponatur:sub quo immediate multiplicãs numerus locetur, ita videlicet vt vnitas sub vnitate, dena sub dena.& ita de reliquis scribatur. Et quãuis pro numero multiplicãdo indifferẽter capi potest minor,aut maior:tamen pro clariori operãdi modo, semper pro numero multiplicando capietur numerus maior,si impares ambo fuerint. Deinde sub ambobus scilicet multiplicando,& multiplicante,linea interiecta protendatur:vt pręsens figura declarat.

Numerus multiplicandus	4	3	7
Numerus multiplicans	3	2	6
ℂLinea interiecta			

Postmodum sub linea interiecta,numeri proueniẽtes locentur:sub quibus linea supponatur. Vltimo autẽ sub linea supposita,prouenientiũ numerorũ summa ponetur. Hæc omnia in sequẽti notabili patefient. Sed quoniam pro operationis practica,requiritur vt primo digitum per digitũ multiplicare sciamus, ideo antequã operandi modũ assignemus,duas regulas proponimus aduertendas:quibus talis multiplicatio dignosci poterit. ℂPrima regula est talis. Quibuscũq; duobus digitis acceptis,quorũ alter per alterum habet multiplicari,notabis vnitatem,vel vnitates,per quam,aut per quas maior digitus à denario numero distat,& toties minorem digitum à sua dena subtrahes, quot sunt illæ vnitates: quo facto numerus manens,erit numerus proueniẽs ex multiplicatione talium digitorum. Istud facili exemplo declaro. Vis scire quinquies 7,quantum numerum componunt:notabis ꝙ 7,à 10 distat per 3:& cum dena numeri 5,sit 50, subtrahe ter 5,videlicet 15,à numero 50: & remanens numerus, videlicet 35, erit numerus proueniens ex multiplicatione 5 per 7. ℂSecunda regula nobis ab illo Arithmeticorum principe Pythagora tradita,sequenti dignoscetur tabella.

Prima regula.

Nota Regula

Secunda regula.

☞Vt vbiq; commodæ breuitati consuleremus,pro immensa illa multiplicationis tabula ab Orontio diligenti quidem studio laboriose aucta,triangulum sumpsimus,mira quadam breuitate,totam tabulam referẽtem,si eius vsum spectes lector humane. Is est huiusmodi,quo dicto citius cuiuslibet digiti in quemlibet alium digitum ductionẽ noueris,si digitum minorem,quẽ multiplicantem vocamus ex latere A B,in alium quemuis aut æqualem aut maiorem multiplicandum in latere C A ducas,repente in angulo communi vtrinq; cõcurrentium linearum,agnosces numerum inde resultantem. Idem eueniet,si digito multiplicando,maiorẽ digitum multiplicantem ex latere C A,in quẽuis aut minorem,aut etiam illi æqualem in latere A B contentum deducas,semper in angulo communi patebit inde resultans numerus, qui idem per omnia est,siue maior in minorem,siue vice versa,minor in maiorem ducatur. Denarius enim numerus,verbi gratia,semper resultat,siue dicas quinquies duo,siue bis quinq;:atq; idem esto iudicium in alijs quantumuis magnis aut paruis numeris inuicem multiplicandis. Sunt in triangulo hoc,præter eos numeros qui in vtroq; latere tam C A,quàm A B,naturali serie progrediuntur,numeri alij 45:quorũ omniũ maximus est 81,nouem ordinibus contenti,arithmetica progressione quiq; in suis ordinibus sese excedentes. differentia è regione ordinis in latere A B annotata. Horũ quencũq; diuidere libeat,si in alterutro laterũ diuisorem digitũ è regione anguli reperis, in altero latere,quotientem habebis: qui si æquales sint,numerus erat quadratus. Cuiusmodi omnes sunt,qui secundum lineam diagonalem locantur. vnde & nonnihil ad radicẽ quadratam pertinebit hic noster triangulus. quẽ, per diagonalem lineam secantes tabulã seu mensulam Pythagoræ in hũc modum constituimus.

Latus multiplicantium maiorum, aut æqualium.

A	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	C
	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
	2	18	16	14	12	10	8	6	4			
	3	27	24	21	18	15	12	9				
	4	36	32	28	24	20	16					
	5	45	40	35	30	25						
	6	54	48	42	36							
	7	63	56	49				Diagonalis.				
	8	72	64									
	9	81										
B	0											

Latus multiplicantium minorum,aut æqualium.

☞Q uecunq; numerum, quãtusquantus sit, per 10 multiplicare intendis, eum immutatum relinquẽs, vno limite per adiectionem cifræ à dextris augeto, & multiplicatum tenebis. Q uem per 100 multiplicare velis, duabus cifris augeas oportet: per 1000, tribus: per decem millia, quattuor: per centena millia, quinq;. sic q; continuo progrediendo, multo parces labori, facili breuitati mirifice consulturus. Vt si velles multiplicare hos, aut similes.

26	per	10	fiunt	260
254		100		25400
856		1000		856000
7983		10000		79830000
3456		100000		345600000

SECVNDO NOTANDVM est à dextro latere initiandam esse operationem versus sinistrum eundo, eo pacto vt dispositis multiplicando, & multiplicante (quemadmodum dictum est) primo multiplicantis numeri primum elementum) si significatiuum fuerit) per omnia elementa, siue figuras omnes multiplicandi numeri multiplicetur. à prima incipiendo leuam versus eundo manum, sic q; primo per primum, & deinde per secundum, consequenter per tertium, quartum &c. Isto modo procedendo, videbis an ex multiplicatione primi elementi multiplicantis numeri per primum multiplicandi proueniens numerus sit digitus, articulus aut compositus: si primũ eueniat, sub linea primo limite talis digitus ponatur, & ad alia procedes elementa: si autẽ secundum contingat, o sub linea primo limite pone, vnitate in mente seruata pro secũda operatione: si vero tertiũ accidat, digitum sub linea primo limite pones, articulo in mente seruato pro secunda operatione, quæ secundum eius decimę partis denominationem numero resultanti ex secunda multiplicatione primi multiplicantis per secundum multiplicandi elementum addes. Expedita igitur multiplicatione primi per primum: deinde secundum multiplicandi elementum per multiplicantis primum elemẽtũ multiplicetur, eo pacto ac primum: postmodum te ad tertium multiplicãdi elementum transfer: & consequenter ad cætera (si quæ sint) elementa, eadem per multiplicantis primum elementum multiplicando, & rectam pronenientium numerorum sub linea positionẽ seruabis. Finita igitur primi elemẽti multiplicantis per omnes multiplicandi figuras operatione, ad secundam figuram siue elementum multiplicantis eundum est: per quod omnia multiplicandi numeri elementa multiplicentur eo ordine, & modo, quo per primum eadem multiplicantur: vno tamen obseruato, vt videlicet resultantes numeri locentur sub illo numero infra lineam posito, taliter vt prima illius numeri figura sub secunda alterius ponatur, & secunda sub tertia, & sic procedendo versus sinistrum latus. Deinde secundi elementi operatione completa ad tertium multiplicantis elementum accedendum est: cum quo operaberis ac dictum est. Et denique per omnia multiplicantis elementa, multiplicandi omnia, modo iam dicto, multiplicentur. Hoc igitur terminato, rectam sub prouenientibus numeris lineam protrahe: sub qua consurgentem ex illorum additione summam signabis. ℭAntequam tamen hæc omnia exemplo elimentur, hæc duo considerabis documenta. ℭPrimum est, si aliquod multiplicantis elementum fuerit o, tot sub linea cifras locabis, quot multiplicandi numeri sunt elementa. ℭSecundum documentum est, si multiplicandi aliquod elementum, o esse contingat: o pariter sub linea debito ponatur loco. & hoc vbi nihil ex præhabita operatione in mente aliquod tale reperiatur, id sub linea debita sede locetur. ℭIsta omnia quę dicta sunt, exemplo tibi aperiuntur. Vis autem prouenientem ducatorum summam cognoscere, quæ emergit ex venditione 4 7 5 3 domorum, quarum quælibet, precio 1 9 6 2 ducatorum venundatur, hac arte procedere oportet. Pro multiplicando numero, domorum numerum (postquam est maior) accipies: quẽ loco primo, & superiori locabis: deinde pro multiplicante, precij numerum recipies, quem sub multiplicando numero pone, vnitatem sub vnitate, & denam sub dena (vt dictũ est) disponendo: sub quibus duobus directam porrige virgulam: vt præsens figura demõstrat. Primo ergo multiplicabis 3 per 2. dicendo, bis 3, numerum 6 componunt, qui sub linea limite primo ponatur: deinde dices, bis 5, numerum 10 pro-

Primum documentum. Secundũ documentum. Operationis exemplum.

```
4 7 5 3
1 9 6 2
-------
```

creant, seruetur igitur in mente talis numerus pro sequenti operatione, & o sub linea pone. Consequenter ad tertium multiplicandi elementum ibis, & dices, bis 7, numerũ 14 componunt, cui numerus in mente repositus secũdum eius decimæ partis denominationem (quę vnitas est) addatur: & numerus 15 resultabit. qui compositus est: seruato igitur articulo in mēte, digitus sub linea tertio assignetur limite. Postremo ad quartum multiplicandi deuenies elementum, & dices, bis 4, numerum 8 efficiunt, cui habitus in mēte numerus addatur (vt dictum est) & proueniet 9 numerus, quem quarta sede sub linea locabis. Finita igitur multiplicatione omnium elementorum multiplicandi numeri, per multiplicantis primum elementum, ibis ad secundum: per quod eo ordine procedas multiplicando omnia elementa multiplicandi numeri: postmodũ ad tertium: deinde ad quartũ. Quibus igitur peractis, sub numeris prouenientibus rectam ducas lineam, & numeros prouenientes adde, eorundem summam sub recta linea ponendo: & talis figura resultabit.

Numerus multiplicandus				4	7	5	3
Numerus multiplicans				1	9	6	2
				9	5	0	6
Numeri prouenientes			2	8	4	1	8
		4	2	7	7	7	
	4	7	5	3			
Linea supposita							
Prouenientium summa	9	3	2	4	3	8	6

Sed quoniam in hoc exemplo iam habito, nulla introducebatur o: aduertes circa hęc duo infraposita exempla, per quæ poteris in quibusuis alijs (vbi o esse contingat) facili animaduersione operari.

Parces etiã labori in huiusmodi exẽplis vbi cifræ fuerit à finibus multiplicãtis & multiplicandi, siue alterius tãtum, si in operatione oẽs illas negligas, donec prouenientes, numeros addas, quorum sũmæ, eas quotquot fuerint in vtroq; numero à fine addas omnes. Quòd si ĩ medio multiplicãtis loco cifra accidat, ea suum tantum limitẽ inter prouenientes numeros expleat, à quo deinceps alter exordiatur. vt patet hoc exẽplo: quod vtriusque regulæ vim sentit.

			5	0	4	0	3	
				4	0	2	0	
			0	0	0	0	0	
		1	0	0	8	0	6	
		0	0	0	0	0		
2	0	1	6	1	2			
2	0	2	6	2	0	0	6	0

			7	0	0	3	0
				1	2	0	0
			0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	
1	4	0	0	6	0		
7	0	0	3	0			
8	4	0	3	6	0	0	0

Patet ga hęc sũt oĩa vsque ad probationũ modos. De terrę ambitu, vide Vitruuiũ lib. 1. c. 6.

¶ Ex præhabitis infero, modica adhibita diligentia, te breuiter per hãc multiplicationis speciem, scire quot sunt passus in toto ambitu terræ, pariter & pedes, & etiã quot digiti. Pro cuius intelligentia, aduerte ex sententia omnium astrologorum, firmamentum, siue stellatum cælum imaginarie esse diuisum in duodecim partes æquales, quarum quælibet signum appellatur, alio termino totum: quodlibet autẽ signorum in 30 æquas partes diuisum esse imaginatur, quarum quælibet dicitur gradus: quilibet vero graduum in 60 scinditur partes eiusdem denominationis, quarum quælibet minutũ nũcupatur: quodlibet minutum in 60 pariter diuiditur partes aliquotas, quę secunda denominantur: & quoduis secũdum, pari modo in 60 distribuitur partes, quæ tertia dicuntur: & ita consequenter, per quarta, & alia huiusmodi ascendendo. Proportionabiliter omnino de elemento terrę dicendũ est, & quouis aliorum elementorum: ita videlicet quòd vni gradui cæli, vnus in terra correspondet gradus: de alijs pari modo dicas: & quãuis omnes gradus terrę adinuicem sint ęquales (quemadmodum & omnes gradus cæli) nõ tamen propterea sequitur gradus cæli, gradibus ipsius terræ esse æquales: sed de hoc alibi fiet sermo.

Multiplicandus	23400
Multiplicans	10230
Prouenientes	702
	468
	2340
Summa	239382000

¶ Est insuper aduertendum, ex Ptolomei sententia, cuiuis gradui terræ, 500 stadia correspondere in sua latitudine. Stadium enim, est mensura terræ conti-

hens 125 passus, Vnde pro terra mẽsuranda, quasdã cõmunes mẽsuras Geometrę inue nerũt: & sunt istę, leuca, milliare, stadiũ, passus, cubit⁹, pes, palmus, digitus, granũ. Hæ autẽ mensuræ earundẽ compositionẽ subintrant: ita videlicet q͂ quatuor grana (vt di cũt) ordeacea latitudinaliter sumpta, digitũ efficiũt: quatuor digiti, etiã latitudinaliter accepti, palmũ: quatuor palmi pedẽ: pes autẽ, cum duabus tertijs cubitũ cõponit: tres cubiti, siue quinq; pedes passum: passus enim ex eleuatione vnius pedis, vsq; ad eiusdẽ positionem resultat, quatuor mediantibus pedibus. 125 passus (vt dictum est) stadiũ reddunt: 8 autem stadia, milliare, à mille nuncupatũ, eo q͂ mille continet passus: duo autẽ milliaria, leucam in Gallia constituunt: in Hispania, ex tribus: in Germania vero, leũca ex quatuor milliaribus consurgit. ¶His breuiter declaratis (quæ non omnino impertinentia sunt) ad propositum accedendum est. Vis autem scire quot passus in toto terræ ambitu reperiuntur: descendas à grossioribus, semper multiplicando, quousque ad inferiora perueneris: & multiplicabis duodecim tota terræ, quæ signa in cælo dicuntur, per triginta gradus: ad quod faciundum, debes maiorem numerum, videlicet 30, pro numero multiplicando capere: & minorem, scilicet 12, pro multiplicanti, & operaberis eo modo quo prius dictum est. & reperies pro summa numerum 360 graduum, qui toti terræ correspondet. Deinde authoritate Ptolemæi supposita, videlicet, 500 stadia cuilibet gradui terræ correspondere, multiplicabis 500 per 360, & pro summa reperies 180000 stadia ipsi terræ correspondere. Consequenter, postquam stadium 125 passus continet, multiplicabis numerũ stadiorum, videlicet 180000, per 125 passus, & cõsurgens numerus erit 22500000 passuum. Si autem vis cognoscere quot pedes totam circumeant terram, multiplicabis numerum passuum per 5, & inuenies pro summa 112500000 pedes: notum autem est, postquam passus ex quinque resultat pedibus (vt superius dicebatur) numerum passuum debere per 5 multiplicari, ad sciendum quot reperiuntur pedes. Item etiam si vis scire numerum palmorum: hunc numerum pedum per 4 multiplicabis, & emanans summa erit 450000000 palmi. Deinde hunc numerum per 4 multiplicando, summa generabitur 1800000000 digitorum. Postremo autem hanc digitorum summam, si per 4 multiplicaueris, profluet numerus, siue summa 7200000000 granorum. Si adhuc ad minores mensuras procedere velles, poteris quidem id facillime facere, si operatus fueris cõsequenter, à prius habitis non discrepando. Habes igitur quod declarare intendebamus, pariter & corollarium illatum verum, scilicet modica adhibita diligentia, te breuiter scire per hãc multiplicationis speciem, quot sunt passus in toto ambitu terræ, pariter & quot pedes. Eadem pariter aduertentia potes cognoscere quot faciunt duodenos centum ducati: etiam quot turonos faciunt 200 duodeni. Si enim primũ scire desyderas: videbis primo quot valeat duodenis vnus ducatus, & reperies quadraginta. multiplica igitur numerum 100 per 40, & prouenĩens summa, intentus numerus erit: id idem de secundo facies exemplo.

Pes cum dimidio cubitum facit, pedes vero quinque, passum. Vitruuius li. 3. c. 1. eandem esse mensurã 4 cubitorũ & 6 pedũ ponit. Vnde manifestũ est, cum 6 ad 4 sit sesquialter, cubitũ sesquipedalẽ mensurã cõtinere, hoc est, palmos 6, digitos 24.

Ptolemæus.

TERTIO NOTANDVM EST tres in hac specie probationes esse, quemadmodum & in præhabitis diffinitis. Prima est nouenaria: secũda septenaria: tertia vero per diuisionem fieri habet. ¶Accedendo igitur ad primam, aduerte quòd si vis videre an multiplicatio bene valeat, debes à numero multiplicãdo semouere 9 quoties potes, & notam remanentem, facta recta linea cadenti, loco directo ante eandẽ pones: deinde à multiplicanti numero separabis etiam 9 quoties poteris, & notam remanẽtem ante lineam directa sede locabis: postmodum illas duas notas adinuicem multiplicabis, & à prouenienti numero subtrahe 9 quoties permittitur, & manentem notam in capite lineæ cadentis extremo, infimo videlicet, pone: & videbis an illæ extremales notę sint æquales, vel non. In isto exemplo quod dictum est, satis patet. ¶Potest autẽ hæc nouenaria probatio omnino eodem inficiari modo, ac in præcedentibus diffinitis consimiles probationes inualidæ reddebantur. Quapropter eadem prætermissa, videndum est quid veritatis

Multiplicationis prima probatio.

```
                2
      4 3 0 6 | 4
        7 2 5 | 5
    ----------|
    2 1 5 3 0 |
  8 6 1 2     |
3 0 1 4 2     |
    ----------|
3 1 2 1 8 5 0 |
                2
```

Refellit prima probatio.

continueat secunda probatio. ¶Probatio enim septenaria isto modo habet fieri: à multiplicando numero subtrahe 7 quoties poteris, eo modo quo secundo diffinito dictũ est, & facta recta linea cadenti ante operationem, remanens nota anteponatur directo aspectu: deinde à numero multiplicanti depone etiã 7 quoties permittit, & notã remanentem lineę anteponas: & illas etiã notas multiplicabis adinuicem, à numero producto subtrahẽdo 7 quoties potest, eodem modo quo subtrahis in nouenaria probatione, & remanens nota in capite lineæ locetur. Postmodum à summa semoto 7 quoties poterit semoueri, remanentem notam in lineæ pede locabis: & si æquales fuerint notæ extremales, bona erit operatio: oppositum si contingat, nulla. Exemplum.

¶Hæc autem probatio, queadmodum & præcedens, inualidari potest. Ideò his duabus probationibus omissis, ad tertiam deueniendum est. ¶Pro cuius intellectu, est sciendum: si prouenientium numerorum summa per multiplicantẽ numerum diuidatur, & in tali diuisione numerus quotiens sit æqualis multiplicando numero, operatio est efficax: aliter si euenerit, nihil valebit. Et quamuis hic modus probandi videatur circularis, ex eo q̃ diuisio debet probari per multiplicationem: nihilominus non stando in tanto rigore logices, dico hanc probationem teneri in omnibus, sine instantia: videbitur autem in sequenti diffinito quid numerus quotiens, & qualiter diuisio fieri debet.

0
5 0 4 2 | 2
3 7 1 | 0
5 0 4 2
3 5 2 9 4
1 5 1 2 6
1 8 7 0 5 8 2 0

2
2 X 2
1
per 5

¶Multiplicatio autẽ infinitas sub se continet species: quarũ prima est duplatio; secũda, triplatio: tertia, quadruplatio: & sic in infinitum ascendendo. Sed meo iudicio (saluo tamen meliori) in hac parte non est opus speciale pro duplatione componere diffinitum: quoniam duplatio nihil aliud est, quàm per 2 multiplicatio. Et si in me insurgat quispiam, authoritatem eorum qui ante mę in hac arte scripserunt adducendo, à quibus duplatio in eorum codicibus posita est, tãquam arithmeticæ peculiaris species: dico, ea omnia proinde eos fecisse, vt clariorem iuuenes multiplicationis notitiã haberent: nobis autem (quoniam sufficientem multiplicationis discursum fecimus) visum est, non esse opus, post tantum discursum, nouum pro duplatione efficere diffinitum.

Probaturus multiplicationẽ per 7, diuide per 7 ĩ primis multiplicãdũ, deinde multiplicãtẽ: residua'q;, si q̃ fuerint, inuicẽ multiplica. productũ rursus per 7 diuide, ac huius residuũ si quod sit, notã dabit, cui æq̃lis esse debebit nota, quæ reliquetur ex diuisiõe summæ per 7 facta. Eodẽ pr[illegible]ius modo & p quinariã ꝑbationẽ licet fieri, quæ vt facilior est, ita ob multas cifras sæpius fortasse rudibus imponit.

7 1 2
7 8 2 6
5
4 6
3 2 6 1 3
3 1 7 8 4 6

2
P 7 3 X 3
5
10

¶ Diuisio, est numeri procreatio, ad vnitatem proportionabiliter se habentis, ac diuidendus ad diuisorem. Diuidere, est numerum procreare, ad vnitatem proportionabiliter se habentem, ac diuidendus ad diuisorem. 5

Secunda ꝑbatio.

Secũdę ꝑbationis reprobatio.

Tertia ꝑbatio.

Multiplicationis species.

¶Verbi gratia, vis diuidere 20 per 4: numerum 5 procreabis, qui ad vnitatem in eadem proportione se habet, qua 20 ad 4: vtrobiq; enim est proportio quintupla. Etiam si numerus 30, aut 45 per 5 diuidatur: eadem erit numeri producti ad vnitatem proportio, cum proportione diuidẽdi ad diuisorem. ¶Finis diuisionis, est numerum (quẽ quotientem dicunt) prompte, & expedite inuenire: qui ex diuisione numeri diuidendi per diuisorem procreatur. ¶Seruit hæc species, vti & præcedens, astrologis pro reductione tertiorũ ad secunda, secundorum ad minuta, minutorum ad gradus, graduũ ad signa. Calculatoribus deseruit, pro reductione partiũ aliquotarũ, siue eiusdem denominationis ad sua tota. Pariter & mercatoribus pro talibus sciendis, si 4 9 7 0 ducatis emantur 1 0 0 equi, quorum quilibet eodem precio emitur, quanti quilibet equus emitur. Pari modo pro cognoscenda summa ducatorum, quam constituunt 3 0 9 denarij.

Diuisiõis finis & cõmoditas.

PRIMO NOTANDVM EST pro hac specie intelligenda, in hac diuisione duos esse numeros potissime necessarios, scilicet diuidendum, & diuisorem. In generali autem septem sunt consyderanda: quæ sępenumero in hac specie contingunt. Primum, est numerus diuidendus. secundum, diuisor stans. tertium, linea cadens. quartum, lineæ parallelæ. quintum, diuisor currens. septimum, numerus manens. ¶Mo-

In diuisione cõsyderanda.

dus autem ſcribendi,talis eſſe debet:numerus diuidendus in dextro ponatur latere,& ſiniſtro diuiſor ſtans,inter quos linea recta cadens mediet. ſub diuidendo,duæ protrahantur lineæ parallelæ,ſub quibus diuiſor currẽs ponatur:ſic quòd vltima diuiſoris ſub vltima diuidẽdi,& penultima ſub penultima,& ſic de alijs (ſi fuerint) locentur:vt præſens figura docet.

	Linea cadens.		
Diuiſor ſtans	37	6 3 4 2	Numerus diuidendus
Lineæ parellelæ			
Diuiſor currens		3 7	

Deinde,inter lineas parallelas numerus quotiẽs locetur: poſtremo numerus remanẽs ſupra ſtantem diuiſorem poſt cadentem lineam reponetur: apertius enim hæc omnia ſequenti notabili videbuntur.

In ſpeciebus prius habitis, modus ſcribendi erat à dextris in ſiniſtrã, obſeruatis limitib[us] vnitatũ, denarũ &c. hic nec ea limitũ obſeruatiõe vtimur, ſed hoc vno obſeruato, ne duæ diuiſoris figuræ ſub vna diuidẽdi ſcribãt. Nec refert ſiue à ſiniſtra ĩ dextrã aut cõtrà ſcripſeris, modo diuiſoris vltima quę à ſiniſtris, ſit ſub vltima diuidendi maiore, aut ſaltem æquali &c.

Diuidendi mod[us].

SECVNDO NOTANDVM EST operationem initiandam eſſe à manu ſiniſtra,verſus dextram eundo:& quoniam multo difficilius eſt operari quandọ in diuiſore ſunt duæ figurę ſignificatiuę,aut plures,q̃ ſi non eſſet niſi vnica:ideò primo docebimus diuidere,vbi vna ſola reperitur figura in diuiſore.Secũdo, vbi tantum vnũ elemẽtum ſignificatiuum ponitur cum cifra,aut cifris.Demum vbi in diuiſore multæ figurę ſignificatiuæ,ſiue cum cifra ponantur,ſiue non.

Vbi diuiſor vnicũ habet elementum.

¶Quantum ad primum,eſt aduertendũ quòd ſi in diuiſore vnica figura reperiatur, illa debet eſſe ſignificatiua (quoniam o eſſe non poteſt) & eſt locanda ſub lineis parallelis rectè ſub vltima diuidendi figura:& videbis an vltima diuidendi,diuiſore ſit minor,ęqualis,aut maior:ſi minor extiterit,anterioretur,ſic quòd ſub penultima diuidendi ponatur.Si æqualis fuerit,inter lineas parallelas loco correſpondenti,1 pone, poſtquam ſemel tantum diuiſor in vltima diuidendi reperitur: & cancellata vltima diuidendi, anterioretur diuiſor: nam aliquam figuram,ſiue elemẽtum cancellare,nihil aliud eſt, q̃ idem cum virgula quadam diuidere.Si maior fuerit,videbis quoties continet diuiſorem:& numerum vicium directo loco inter lineas pone, ita videlicet ſi ſemel tantum diuiſorem contineat,vnitatem inter lineas pone:ſi autem bis,locabis 2,& de alijs pari modo: & per illum numerum multiplicabis diuiſorem,& numerum prouenientem ſubtrahe à primo diuidendi: & ſi aliquid ſuperſit (vltima diuidendi prius cancellata) deſuper ponatur:ſi nihil,nihil locetur.Iſto facto,diuiſore cãcellato,per vnum limitem anterioretur,ſic quòd ſub penultima diuidendi ponatur,& iterum videbis,quoties contineat diuiſorem penultima diuidendi figura,cum toto reſiduo ſuprapoſito vltimę diuidẽdi (ſi quod eſt) quod decem valet,& hoc ſi fuerit 1:ſi 2,valebit 20,& conſequenter hoc modo, & numerũ vicium inter lineas loco ſuprapoſito diuiſori pone.

Loco linearũ,alij commodius tali lunula (extra numerorũ ſeriẽ locata vtũtur,quæ nũerum quẽ quotientẽ vocãt, ſuſcipiat. Diuiſorẽ itẽ ſtãtem ſub linea aliqua extra limites diuidẽdi diſponunt, ac ſupra eã lineã reſiduũ,ſi quod,facta diuiſione ſupererit, adſcribunt,id'q[ue] numerator earũ partiũ,quę in diuiſore ſunt eius vnitatib[us] determinatę, dicetur.vt clarius patebit, cum de his fractionibus tractatu quarto, agetur.

Documẽtum.

¶Hoc tamen ſeruabis documentũ, q[uod] ſi pluries q̃ nouies diuiſor contineat, tantum 9 inter lineas pones: & multiplicabis per illum numerum vicium (qui dicitur quotiens) diuiſorem,& prouenientem numerum ſubtrahe à penultimo,& reſiduo (ſi ex priori habita operatione aliquod tale fuerit) & facta ſubtractione,ſi quod ſit reſiduum,deſuper ponatur: prius tamẽ cancellatis illis figuris,videlicet penultima diuidendi,& reſiduo prioris operationis.Deinde anteriorabitur diuiſor,& procede eodẽ modo operando vſq; ad primum diuidendi.Si cõtingat in media operatione diuiſorem non poſſe ſubtrahi, ſiue inueniri in ſuprapoſita figura diuidendi, o inter lineas ponatur, & anterioretur diuiſor.

Operationis exemplum.

¶Hoc quod dictum eſt,exemplo facili declaratur.Sit numerus diuidendus 3 7 0,diuiſor vero 4.vis cognoſcere numerum quotientem? diſponatur vt iam declaratum eſt,& vt præſens oſtendit figura.

4	3 7 0
	4

Et dic,4 in 3 non poteſt reperiri,ideo cãcellato 4,anterioretur, & dic,4 in 37, reperitur nouies: ideo inter lineas ponatur 9, rectè ſupra diuiſorem,& duces,ſiue multiplicabis diuiſorem per 9,dicendo,quater 9,faciunt 36 numerũ:quem à 37 ſubtrahe,& manebit 1,quam ſupra 7 locabis, cancellatis

prius 3,& 7,& operatio manebit sub tali forma,
Deinde cancellato diuisore,idem anterioretur,& dic,4 in 10, bis tantum reperitur:ponatur igitur 2 inter lineas supra diuisorem,& ante 9, & multiplica diuisorem per 2: & numerum prouenientem, qui est 8, subtrahe à 10:& residuum videlicet 2, prius cancellatis 1 & 0, supra 0 ponatur:quo peracto,operatio cōpleta manebit.Habes igitur si inter quatuor socios 370 ducati diuiderentur,quilibet pro sua parte 92 habebit, & manebunt 2 ducati inter eos diuidendi: qui sine fractione diuidi nequeunt:ponatur igitur 2 manens,supra stantem diuisorem, interposita linea, & talis in fine habebitur figura. Sed quoniam vnico exemplo difficulter res exposita comprehēditur:ideò hæc duo infra posita exempla consyderabis, per quæ lucidius quæ dicta sunt cognoscere valebis.

```
              1
4 | 3 7 0
---------
        9
---------
      1 0

2 |   2 | 2
4 | 3 7 0
---------
    9 2
---------
  1 1 1
```

```
  4                              2
---                         ---
  5 | 5 3 0 | 4               6 | 5 0 4 2
      1 0 6 0                     1 5 0 7
      5 5 5 5                     6 6 6 6
```

¶Declarato igitur modo diuidendi, vbi in diuisore vnica figura reperitur: consequenter videndum est de modo operādi, vbi in diuisore tantum vna significatiua ponitur figura,cum 0,aut cifris. Pro cuius intellectu,est aduertendum omnino eodem modo esse operandū,ac prius dictum est: hoc excepto , quòd videlicet operatio debet cessare,cum prima diuisoris figura sub prima diuidēdi ponetur. Venit insuper totus diuisor anteriorandus,completa prima operatione:& ita operandum est,ac exempla hic apposita ostendunt.

```
2 4 | 2 2 | 2                      5 0
3 0 | 5 0 5 | 4              4 0 0 | 3 2 0 | 5 0
      1 6 8                          8 0
    3 0 0 0                      1 0 0 0 0
      3 3                          1 0 0
                                     4
```

¶Accedendo autem ad tertium diuidēdi modum, vbi in diuisore multæ significatiuæ figuræ reperiuntur. Est aduertendum longe maiorem difficultatē esse in diuisione,in cuius diuisore duæ aut plures significatiuę habentur figuræ. Scribantur igitur, vt prius dictum est, diuidendi numeri, pariter & diuisoris figurę: & suppositis diuidendo duabus lineis parallelis, sub eisdem diuisor locetur, taliter, vt diuisoris vltima,sub diuidendi vltima,& penultima sub penultima,& consequenter in alijs (si quæ fuerint) operetur:& videbis, quoties vltima diuisoris in vltima diuidendi reperitur,toties diuisoris penultima in diuidendi penultima,& suprapposito (si aliquod fuerit) reperiatur: & eodem modo antepenultima diuisoris,in antepenultima numeri diuidendi,& sibi suprapposito numero habeatur:etiam de cæteris figuris (si quæ sint in diuisore) videndum est. Si autem eueniat penultimam diuisoris, vel antepenultimam, siue aliquam aliam non posse toties reperiri in figura correspondenti,& residuo (si fuerit) diuidendi numeri:capies vna vice minus diuisoris vltimam figuram: si adhuc non sufficiat,iterum vna vice minus diuisoris vltimam figuram accipies: & id facies quousque toties quæuis figura,quæ in diuisore reperitur,alia ab vltima diuisoris, in suprapposita numeri diuidendi figura, & residuo (si quod tale fuerit) reperiatur. Si enim aliqua diuisoris figura alia ab vltima, non reperiatur toties in suprapposito elemento numeri diuidendi, & residuo, quoties vltima diuisoris in vltima diuidendi reperitur (ad sensum iam habitum) diuisoris figuras anteriorabis: sic q̀ vltima diuisoris,sub diuidendi penultima ponatur,& diuisoris penultima sub diuidendi antepenultima,& pari modo de alijs:& iterum videbis,an toties diuisoris quælibet figura alia ab vltima,in figura numeri diuidēdi sibi suprapposita,& residuo (si sit) inueniatur, quoties vltima diuisoris in sibi suprapposita,aut suprappositis figuris reperitur. Q̃ si adhuc id non cōtingat,iterum diuisoris figurę mutabūtur:taliter vt diuisoris vltima sub diuidēdi antepenultima ponatur:& ita de reliquis,modo prius habito faciendum est:quo pacto,videbis an to-

☞In huiusmodi exēplis apti⁹ egeris, si diuisoris cifrasquotquot sint sub totidē diuidēdi figurissemel tātū apposueris itavt prima cifra, primū occupet limitē, secunda, secūdū: & tertia, tertium &c. nec opus erit toties repetita trāspositione cifrarū,cū sit inanis. Cæterum,cum significatiuis figuris age , vt dictū est. Exēplum.

```
2   2
7 2 8 0
6 6 6 0

(1 2 1  2 0
        6 0
```

ties omnes aliæ figuræ diuiſoris ab vltima in ſibi ſuprapoſitis inueniantur, quoties diuiſoris vltima in ſibi ſuprapoſitis habetur:& ſi ita eueniat, numerum vicium inter rectas lineas ſcribe, ſupra vltimam diuiſoris figuram : & per illum numerum quamlibet diuiſoris figuram multiplicabis,& prouenietem numerum à ſuprapoſita, vel ſuprapoſitis figuris ſubtrahe:& ſi aliquid ſupererit deſuper ponatur, prius tamen alijs figuris cancellatis:deinde anteriorabis diuiſoris figuras, prioribus eiuſdem cancellatis: & iterum eodem modo operaberis, quouſque diuiſoris prima figura ſub prima diuidendi figura ponatur. Seruabis tamen in hac ſpecie iſta duo documenta. Primum eſt: ſi aliqua figura diuiſoris pluries quàm nouies in ſibi ſuprapoſita, vel ſuprapoſitis reperiatur figuris, tantum 9 pro numero quotienti accipias. Secundum documentum eſt tale. Si poſt primam operationem, contingat diuiſoris aliquam figuram, in ſibi ſuprapoſita figura non poſſe reperiri, anteriorabis diuiſorem, ponendo o pro numero quotiete, inter lineas parallelas. Sed vt hæc omnia clarius intelligantur, exemplo, facili aperiuntur. Si ex te aliquis petat numerum quotientem, qui ex diſtributione, ſiue diuiſione 52012 5 ducatorũ, per 43 homines prouenit, eſt hoc pacto operandũ: primo numerus diuidendus, & diuiſor diſponantur, vt ante dictũ eſt, ſic ꝙ inter ipſos linea cadẽs mediabit, & ſub diuidẽdo duę protẽdãtur lineæ parallelæ, ſub quibus diuiſor ponatur, taliter ꝙ vltima diuiſoris ſub diuidẽdi vltima, & penultima ſub penultima, vti præſens oſtẽdit figura, diſponatur. Deinde, videbis quoties vltima diuiſoris cõtineatur in vltima diuidẽdi, & reperies ꝙ ſemel tantũ: pones igitur 1 inter lineas parallelas recte ſupra 3, qui eſt ante vltimam diuiſoris figurã: & multiplicabis per 1, vltimam diuiſoris, & proueniet 4 numerus, quẽ ab vltima diuidendi figura, videlicet 5, ſubtrahe, & reſiduum, ſcilicet 1, deſuper pone, prius cancellato 5: poſtmodũ prima diuiſoris per quotiẽtem, hoc eſt per vnitatẽ inter lineas locatã, multiplicetur, & proueniet 3, qui à ſibi ſuprapoſito, & reſiduo ex præhabita operatione, 12 videlicet, ſubtrahatur: & facta ſubtractione, figuræ illæ à quibus ſubtrahitur, cancellẽtur, & reſiduũ, quod eſt 9, ſupra diuidẽdi penultimam ponatur: quo terminato, diuiſor anterioretur, ſic ꝙ vltima diuiſoris ſub diuidẽdi penultima, & diuiſoris penultima ſub diuidẽdi antepenultima locetur, priori diuiſore cancellato, & operatio ſub tali forma manebit.

```
43 | 5 2 0 1 2 5
   -----------
   43
```

```
     ✗ 9
43 | ✗ ✗ 0 1 2 5
       1
   -----------
     ✗ ✗ 3
       4
```

Conſequenter operaberis, aduertendo quoties vltima diuiſoris contineatur in ſibi ſuprapoſita diuidendi figura, quæ eſt 9, & inuenies ꝙ ſolũ bis continetur, & poſtq̃ toties prima diuiſoris in ſuprapoſito numero reperitur: pone igitur numerũ viciũ ſcilicet 2, pro quotiẽte inter lineas ante 1, recte ſupra diuiſoris primã figurã, & per vltimũ numerũ viciũ, ſiue per illũ quotientẽ, diuiſoris vltimã multiplicabis, dicẽdo, bis 4, componunt 8, quem à 9 ſuprapoſito ſubtrahe, & manentẽ vnitatẽ deſuper pone: & quoniam toties diuiſoris prima in ſibi ſuprapoſita, aut ſuprapoſitis figuris reperitur, ideo multiplicetur pariter per quotientẽ, & prouenientẽ numerũ, qui eſt 6, à ſuprapoſito 10 ſubtrahe, reſiduũ, ſcilicet 4, ſupra o ponendo, prius aũt cãcellatis 1 & o. Iſto peracto, currẽtẽ diuiſorẽ anteriorabis, eodẽ modo vt prius priori loco cancellato, & diſpoſitã hũc in modũ operationẽ reperies.

```
       ✗
     ✗ ✗ 4
43 | ✗ ✗ ✗ 1 2 5
       1 2
   -----------
     ✗ ✗ ✗ 3
       ✗ 4
```

Deinde procede vt prius operando, ſed quoniã vltima diuiſoris in ſibi ſuprapoſita figura tãtum ſemel reperitur, prima vero diuiſoris nulla vice in ſuprapoſita reperitur: iterum diuiſorẽ anteriorabis, priori ante cãcellato, & inter lineas parallelas ãte 2 pones o, & eo pacto diſpoſitã figurã habebis. Procede igitur hoc pacto operando conſequenter, & videbis quoties vltima diuiſoris in ſibi ſuprapoſitis reperitur figuris, & inuenies quòd decies: capies ergo pro quotiẽte 9, & videbis vtrum toties prima diuiſoris in ſibi ſuprapoſitis elementis habeatur, & inuenies ita eſſe: ideo per quotientẽ videlicet 9, ſecũdã diuiſoris figurã multiplica, & proueniet numerus 36, quem

```
       ✗
     ✗ ✗ 4
43 | ✗ ✗ ✗ 1 2 5
       1 2 0
   -----------
     ✗ ✗ ✗ ✗ 3
       ✗ ✗ 4
```


Margin notes: Primum documẽtum. Secundũ documẽtum. Operationis exẽplum.

à suprapoſito numero ſcilicet 41, ſubtrahe, reſiduum, quod eſt 5, ſupra 1 ponendo, prius autem 4 & 1 cancellatis: multiplicabis pariter diuiſoris ſecundam figuram per 9, & prouenientem numerum, qui eſt 27, à ſuprapoſito ſcilicet 52 ſubtrahe, & numerus qui ſupereſt, videlicet 25 deſuper ponatur, ſic vt 2 ſupra 5, & 5 ſupra 2, locetur, priori tamen numero cancellato, diuiſore etiam cancellato, idem diuiſor anterioretur. & operatio ſub tali diſpoſitione manebit.

```
        2       2
      1 5 4 5 5
 4 3 | 5 2 0 1 2 5
       1 2 0 9
      4 3 3 3 3 3
        4 4 4 4
```

Vltimo autem videbis quoties vltima diuiſoris in ſibi ſuprapoſitis elementis reperitur, & inuenies quòd ſexies: 4 enim in 25 ſexies reperitur: & ſi 4 per 6 multiplicaueris, numerus 24 prouenit, quem ſi ſubtrahas à 25, ſola vnitas maneret locanda ſupra 5: ſed quoniam prima diuiſoris figura non toties inuenitur in ſibi ſuprapoſito, videlicet 25, ideo pro numero quotienti non 6; ſed 5 numerus capiatur, qui per vnam vnitatem eſt 6 minor: per illum igitur diuiſoris vltima multiplicetur, & proueniens numerus erit 20; quẽ à ſibi ſuprapoſito, ſcilicet 25 ſubtrahe; & reſiduo, ſcilicet 5, remanẽte, cãcelletur 2: poſtea diuiſoris prima per quotientẽ multiplicetur, & prouenietẽ numerũ, qui erit 15, à ſibi ſuprapoſito, ſcilicet 55, ſubtrahe, & reſiduũ qd erit 40, deſuper ſcribatur, prius cãcellatis duabus figuris ſcilicet 5 & 5. hoc igitur expedito, reſiduũ cape, & ſuper diuiſorẽ ſtantẽ, virgula mediãte deſcribes, & cõpletã ſub tali forma operationẽ habebis.

```
                        2       2 | 4
Numerus manens     40 | 1 5 4 5 5 | 0
Diuiſor ſtans      43 | 5 2 0 1 2 5    Numerus diuidẽdus.
Lineæ parellelæ         1 2 0 9 5      Numerus quotiens.
Diuiſor currens       4 3 3 3 3 3
                        4 4 4 4
```

¶ Tenebis tamen in hac ſpecie pro documẽto, in omni diuiſione manentẽ numerum (ſi quis fuerit) diuiſore minorẽ eſſe: quoniã æqualis, aut maior eſſe non poteſt. Sed vt clariorẽ huius diffiniti habeas notitiã, ad hęc duo infrapoſita exempla oculũ appone, quibus debite apprehẽſis, in quibuſuis alijs facilis erit operatio.

Documẽtum.

```
   2     1
   1 4 2
25 | 7 0 6 2 5
     2 8 2 5
   2 5 5 5 5
     2 2 2
```

```
                 1 | 3
                 2 3
                 4 6
               3 6 8 7
     378 |   4 8 7 6 | 8
     539 | 4 7 0 6 2 5
                 8 7 3
           5 3 9 9 9 9
             5 3 3 3
             5   5
```

¶ Ex his omnibus, quæ in hac ſpecie dicta ſunt, poteſt facile aſtrologus cognoſcere, 600 minuta quot efficiant in cælo gradus, & multa talia. Pro quo ſciendo, eſt modicũ aduertendum id quod præcedenti diffinito in calce ſecundi notabilis habetur: vbi dicitur ꝙ omne ſignum in cælo, in 30 diuiditur gradus, & quilibet gradus, in 60 diſtribuitur minuta: cape igitur pro diuidendo 600 minuta (de quibus eſt queſtio quot gradus componunt) & pro diuiſore numerum 60 accipies, poſtq̃ quilibet gradus ex 60 reſultat minutis, & diuidendo 600 per 60, pro quotienti numero habebis 10. dices igitur, 600 minuta, 10 gradus in cælo efficere. Pari modo operandũ eſt, ſi ex calculatore quęratur, quot pedalitates emanant ex 1000 quintis vnius pedalis, poſtquam quodlibet pedale ex quinq; quintis conſtat: pro numero diuidendo habendus eſt 1000 numerus, & pro diuiſore 5. ſi igitur diuidas 1000 per 5, inuenies pro numero quotienti 200, qui eſt numerus pedalium tantum, quæ ex mille quintis pedalis conſurgunt. Conſimiliter oportet dicere, ſi ex mercatore queratur, quot vlnas panni mille ſexaginta palmi efficiunt, ſupponendo ex quatuor palmis vlnam conflari, vti & in noſtra caſtella. per 4

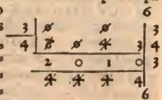
Corollarium.

```
  2 2
1 0 6 0
per 4
(265
```

igitur, numerum palmorum debes diuidere, & pro quotienti consurget 265, qui vlnarum est numerus. Est tamen consyderandum, quòd aliter in præsentiarum vtimur palmo, quàm in præcedenti diffinito: vbi dictũ est ex quatuor digitis latitudinaliter sumptis palmum componi: palmus igitur in proposito, capitur pro intercepta distantia inter extrema puncta extremorum digitorum oppositas differentias expansorum.

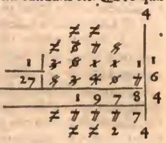
Prima probatio.

TERTIO NOTANDVM EST tres in hac specie esse probationes: quarum prima est nouenaria, secunda septenaria, tertia vero per multiplicationem fieri habet. ¶ Ad primã igitur accedendo, aduerte: si vis cognoscere an bene operatus fueris in diuisione: debes rectã lineam ante operationem protendere, & à diuidendo numero separabis 9 quoties permittit, & remanentẽ notã in capite lineæ pone: deinde accipe notam à diuisore, quam ante lineam directa sede repones, capies etiam à quotiente numero notam, deponendo 9 quotiẽs poteris deponere, quã directo loco ante lineã locabis: quo facto à numero relicto (si aliquis sit) etiam notam accipies, quam ante lineam decenti loco ponas: & multiplicabis notam diuisoris per quotientis notam, & à numero producto accipies notam separando 9 quotiẽs poteris, & illam addes notę habitę à numero manente (si sit) & à numero prouenięte sumatur nota, quam in altero lineæ extremo pones: & si illæ extremales lineæ æquales fuerint, bene operatus es: si hoc non eueniat, male. Quòd si in diuisione nullũ fuerit residuum, facta multiplicatione diuisoris per quotiẽtis notam, à prouenienti numero notam accipe: quam in altero lineæ fine locabis: & si æquales fuerint tales extremales notæ, operatio erit bona: aliter si contingat, nihil valebit. Istud facile exemplo præsenti cognoscere potes. Et quãuis in præsenti operatione hæc probatio habeat verum: dabitur tamen aliqua operatio facillime, quæ nulla erit: & tamen modus iste probandi tenebit, quemadmodum sæpe visum est in præcedentibus diffinitis, ideo hac prætermissa probatione, ad secundam eundum est.



secunda probatio

¶ Pro qua secunda scienda, aduerte ꝙ omnino eodem modo fieri debet, ac præcedẽs nouenaria: hoc dempto, ꝙ notę accipiãtur eo pacto, vt diffinito secundo, notabili tertio, in declaratione secundæ probationis ostensum est, à binis elemẽtis notam accipiendo, quod clare isto aperitur exemplo. Modus pariter iste probandi, quemadmodum & pręcedẽs nihil funditus valet: potest quippe eadem via inficiari, ac alter.

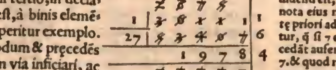


Tertia probatio certior.

¶ Relictis igitur his duobus probandi modis: ad tertiam accedendum est probationem, quam verissimam, & eandem efficacissimam esse asseueramus: pro qua breuissime edocenda, si cognoscere vis an bene operatus fueris, debes multiplicare diuisorem per numerum quotientem, & prouenienti summæ, residuum diuisionis (si qoud fuerit) est addendum: & si resultãs numerus fuerit numero diuidendo ęqualis, recte operatum est: si autem inæqualis extiterit, nulla est operatio. Vbi autem in diuisione nullum contingat esse residuũ, multiplicato diuisore per quotientem: si consurgens summa diuidendo numero adæquatur, integre operatus es: eueniente autem opposito, nihil operationis discursus valebit. ¶ Pro huius capitis complemento est aduertendum diuisionem in infinitas distribui species. quarum prima est bipartitio, siue dimidiatio: secũda tripartitio: tertia quadripartitio: & ita consequenter. Vnde mediatio, nihil aliud est, q̃ numeri in duo æqua sectio, siue partitio: & eodem modo tripartitio, est numeri in tria æqua sectio, siue diuisio: nec opus est, vt pro dimidiatione nouum in arithmetica efficiatur diffinitum, quẽadmodum nec pro alijs infinitis eius speciebus.

Hanc secundã probationẽ nũc tandẽ rectius cognosces, vbi nũc quẽlibet numerũ per 7 diuidere didiceris, diuide igiť ĩ hac specie ꝓbãda per 7 diuisorẽ, & deinceps quotientem, residua inuicem mľtiplica quorũ productũ per 7 rursus diuide: ac remanẽtem numerũ 7 minorem obserua, cui ęquales erit nũerus ille q̃ ex diuiso numero diuidendo item per 7 relinquetur. Quòd si residuũ aliquod fuerit relictũ, id ꝙ per 7 diuidenũ est, ac nota eius notę priori addatur, q̃ si 7 excedãt auferať 7. & quod relĩquetur, ęqualem sibi in bona diuisione semper habebit notã ex diuidendo sumptã. Eodẽ modo licebit & hanc speciem per 5 ꝓbare. Vnde non est ꝙ operationi diffidas, triũ ꝓbationũ cõcẽtu cõfirmatæ. fieri enim nequit vt tres illæ testes cõsonent in cõmisso errore, aut dissonent in veritate.

6 ¶ Progressio, est plurium numerorum secũdum æquales excessus, aut proportiones sumptorum, in vnam summam collectio. Et progredi, est plures numeros secundum æquales excessus, vel proportiones sumptos, in vnum colligere.



Exemplum,1,2,3,4,5,componunt 15. Etiã 1,2,4,8,16,faciunt 31. Et 2,4,6,8,10 collecti,numerum 30 efficiũt. In primo,& tertio istorum exemplorum,semper inter numeros eadem proportionalitas arithmetica reperitur. In secundo autem exemplo, eadẽ geometrica proportio seruatur. ¶Finis progressionis, est summam in progressionaliter se habentibus numeris,expedite assignare. ¶Seruit hæc species in primis astrologis,& calculatoribus, vti & præcedentes:multis pariter alijs hominum statibus.

Progressionis finis & vtilitas

PRIMO NOTANDVM EST pro huius diffiniti claro processu, duo esse in hac parte admodum requisita:alterum numeri progressionales,alterum progressionalium summa. In generali vero tantum tria consyderantur, scilicet duo præhabita, & interiecta linea. ¶Modus autem scribendi est talis,primis & superioribus locis progressionales numeri scribantur,sub quibus linea interiecta in rectum protrahatur,vt præsens forma indicat. Demum sub linea progressionalium numerorum summa locetur, de qua sequenti notabili videbitur.

In progressione consyderãda

6	
5	Numeri progressionales.
4	
3	
———	Linea interiecta.

☞Triplicem numerorũ notaacceptionẽ. Est nanque numerus,qui secundum se cõsyderaũ, neque in comparatione ad alterũ,neque ad figuras geometricas applicatur. atque de hoc maxime actũ est 5 superioribus diffinitis. Est & numerus ad aliquid sumptus, qui in cõparatione ad alterum cõsyderatur. Atque in hoc solo cõsistit omnis progressio & proportionalitas numerorum. Tertius est numerus secũdũ figurã cõsyderatus,put ad figuras geometricas applicatur. In quo genere consistit & quadratus & cubus,de quibus paulopost agetur.

SECVNDO NOTANDVM EST in progressione eodem modo esse operandum ac in additione declaratum est: cum ita sit,omnem progressionem additionẽ esse,quamuis econuerso dici nequeat:ideo sine maiori processu,pro hac specie intelligenda,istud habeas exemplum. Vis autem scire horum numerorum progressionaliter se habentium summam, scilicet 3,5,7,9,11,13? Disponantur vt declaratũ est,& vt præsens figura ostendit. deinde dic, 3 & 5 faciũt 8:& 7,componunt 15:postmodum addas 9,& 24 habebis,postea 11, & erũt 25,iterum 3 addas,& 28 procreabis,qui compositus est numerus:ponatur igitur eius digitus,scilicet octonarius sub linea primo limite,& articulus in mente seruetur, qui secundum eius decimæ partis denominationem,quæ est 2,secundorũ limitum elementis addetur. Adde igitur pro secundo operando 2 in mente repositum primo articulo, qui est 1,& resultabit 3,deinde 3 & 1 faciunt 4, qui sub linea secundo limite ponatur: & completam sub tali forma operationem habebis. Et quamuis iste operandi modus sit efficax:quia tamen ab additione non discrepat, pro qua non est opus nouo diffinito:ideo breuius, & clarius per duas regulas operandi modus significabitur. ¶Pro quo intelligendo,aduerte duplicem esse progressionem, alteram arithmeticam,alterã vero geometricã. ¶Arithmetica progressio, est pluriũ numerorũ se eodẽ excessu exuperantiũ, in vnam summã collectio. Verbi gratia,1,2,3,4, faciunt decẽ. Nam quemadmodũ 2 excedit 1 per 1,ita 3 excedit 2 per 1:& 4,3. ideo inter illos numeros arithmetica proportio inuenitur. Idem de his numeris est dicendum, 2,5, 8, 11. & etiam de istis 1,3,5,7,9. Vnde illi numeri in arithmetica progressione se habẽt, inter quos idem reperitur excessus:quemadmodũ in præhabitis exemplis contingit. & pro minori tres numeros esse oportet. Intellige semper inter numeros vnitatẽ numerari, quę tamẽ proprie loquẽdo numerus dici nequit. Progressio autem arithmetica est duplex:altera cõtinua,altera disiũcta,siue interscalaris. Continuã progressionẽ illã appellamus,quę naturalẽ numerorũ seriẽ post primũ numerũ seruat. Et talis adhuc est multiplex:quędã incipit ab 1,quędã à 2,quędã à 3:& ita cõsequenter ascẽdendo. Exẽplum istorũ,1,2,3,4,5:2,3,4,5,6:3,4,5,6,7. Disiunctã autẽ,siue interscalarẽ progressionẽ illã dicimus,quę post primũ numerũ,aliquẽ vel aliquos numeros prætermittit,& cõsimilẽ,vel cõsimiles post secundũ,tertiũ,quartũ,& ita cõsequẽter. Et talis est multiplex, quædã ab 1,incipit,quædã à 2,quædã à 3,& ita cõsequenter. Exempla istorũ,1,3,5,7, 9:2,5,8,11,14:3,7,11,15,19. ¶Pro operandi igitur modo in arithmetica progressione hãc regulã animaduertes. Datis numeris arithmetica progressione se habẽtibus,duo extremi addantur,& si resultans numerus fuerit par, per eius medietatem, limitũ seu vicium numerus multiplicetur: & proueniẽs numerus erit summa datorũ numerorũ.

Operationis exẽplum.

13
11
9
7
5
3
———

13
11
9
7
5
3
48

Arithmetica progressio.

Cõtinua.

Disiũcta.

Regula pro arithmetica progressiõe.

Si vero ex additione extremorum impar proueniat numerus, per medietatem locorũ multiplicetur, & resultans numerus erit datorũ summa. Exemplum primi: sint numeri dati, 1, 2, 3, 4, 5, addas 1 & 5, & excrescet 6, qui est numerus par: per eius igitur medietatem, videlicet per 3, multiplica 5, qui est numerus limitum: & proueniens numerus erit 15, qui datorum numerorum est summa. Exemplum secundi: sint dati numeri, 3, 6, 9, 12, 15, 18: adde igitur 3 & 18, & habebis 21, qui impar numerus est: & multiplicabis 21 per medietatem vicium, videlicet per 3, & numerus emanabit 63, qui datorum numerorum summa dicetur. Ex his sequitur, si extremorum numerorum crescens numerus fuerit par, necessum esse numerum limitum imparem esse: quod si talium extremorũ numerorum numerus resultans impar extiterit, parem esse numerum limitũ oportet. Et hæc de arithmetica progressione. ¶Geometrica autem progressio, est plurium numerorum secundum æquales proportiones sumptorum in vnam summam collectio. Exempli gratia: 1, 2, 4, 8, faciunt 15. quemadmodum enim 2, ad 1 se habet in proportione dupla, ita 4 ad 2, & 8 ad 4: ideo inter datos numeros geometrica progressio inuenitur. Idem de his est dicendum numeris, 1, 3, 9, 27. & pariter de istis, 2, 6, 18, 54. Vnde illi numeri se habent in geometrica progressione, inter quos eadem reperitur proportio: non autem idem numerorũ excessus, vt in præassumptis numeris clare cõstat. ¶Pro operandi autẽ modo in geometrica progressione, hæc regula habeatur. Datis numeris geometrica proportione simplici multiplici se habentibus, multiplica maiorẽ per numerum à quo illa proportio denominatur, & à producto subtrahe minorem numerum, & reliquum diuides per numerum vnitate minorem numero à quo denominatur proportio: quo facto, numerus quotiẽs erit datorum numerorum summa. Hanc regulam facile intelliges infrapositis corollarijs apprehensis. ¶Primo sequitur, datis numeris in dupla se habentibus proportione, maiorem numerum esse duplandum, siue per duo multiplicãdum, quod idem est (dupla enim à 2 denominatur) & à producto minorem numerum esse subtrahendum: & quod remanet erit numerus intentus: quoniam 2, diuidi per numerum vnitate minorem non potest. Exempli gratia, sint dati numeri 2, 4, 8, 16, 32: multiplica per 2, seu dupla 32, & excrescit 64: à quo subtrahe 2, & manens numerus erit 62, qui numerus est datorum numerorum summa. ¶Secundo sequitur, datis numeris in tripla se habẽtibus proportione, maiorem numerum esse triplandum, seu per tria multiplicandum, & à producto minorem esse subtrahendum, & remanens numerus est diuidendus per 2, qui solum per 1 est 3 minor: quo peracto, numerus quotiẽs erit datorũ summa. Exemplũ. sint dati numeri 1, 3, 9, 27: triplabis igitur 27, & proueniet numerus 81, à quo 1 subtrahe, manebit 80, quem per 2 diuide, & quotiẽs numerus erit 40, qui datorum numerorum est summa. ¶Tertio sequitur, datis numeris in quadrupla se habentibus proportione numerum maiorem esse quadruplandum, & à producto minimum subtrahendum, & manens numerus est diuidẽdus per 3, qui est vnitate minor 4, à quo quadrupla proportio denominatur, & quotiẽs numerus erit datorũ summa. Exemplum: sint dati numeri 1, 4, 16, 64, 256: quadruplabis ergo, siue per 4 multiplicabis 256, & proueniet numerus 1024, à quo 1 subtrahe & manebit 1023, quem per 3 diuide, & quotiẽs numerus erit 341, qui signatorũ numerorum est summa. Eodem modo est operandum in numeris se habentibus in quintupla proportione, sextupla, aut septupla: & sic de alijs ascendentibus simplicibus multiplicibus proportionibus. Possunt pariter pro alijs proportionum generibus regulæ assignari: sed ne longius æquo immoremur, quæ iam posita sunt sufficiant.

Exempla — *Corollarium.* — *Geometrica progressio.* — *Regula pro geometrica progressione.* — *Primum corollarium.* — *Secundum corollarium.* — *Tertium corollarium.*

TERTIO NOTANDVM EST progressionem per easdem tres probationes debere probari, per quas additio probatur, scilicet per 9, per 7, & per subtractionẽ. Si autẽ per primã velles progressionẽ probare: accipe ab omnibus numeris progressionaliter se habentibus notã, deponẽdo semper 9, vti in additione faciebas, & protracta recta linea ante progressionẽ in eius capite reperta, nota ponatur. Deinde à summa notã pariter accipies, quã in lineę pede locabis: & si inuẽtę notæ sint æquales, bona erit progressio: si vero inæquales extiterint, inutilis, & nulla dicatur. Exẽplũ hic literaliter habes.

Prima probatio.

5
5
4
3
2
14
5

☞ Corollarium tale esse debet. Si nũeri progredientes progressione inquã Arithmetica ab impari nũero ordiãtur, & primus ille ĩpar vltimo addatur, resultet'que ex tali additione numerus par, certũ est & numerũ vltimũ, & numerũ limitũ fuisse imparem. Cõtrà vero si numerus resultet ĩpar, limitũ numerũ fuisse parem. Quòd si ab aliquo nũero pari, progressio ordiatur disiũcta per nũeros pares, semper resultabit numerus par, quãtumuis limitũ nũerus sit impar. vnde nihil retulerit, siue per medietatẽ seriei, siue producti, alterutrum multiplices: periculũ facere potes, si tabellam Pythagorę intuearis, in qua lineæ oẽs quaquersus arithmeticam in se continẽt progressionem.

¶Si per secundam probationem, videlicet per 7, progressionem velles probare: accipe à progressionaliter se habentibus numeris, notas, eo modo quo in additione dictum est, quas (recta linea progressioni præposita) ante eandem limitibus proprijs locabis: postmodum ab illis notis, notam adhuc capies remouendo 7 quoties permittitur, & in vertice lineæ pone. Postremo à summa notam eodem modo accipies, quæ alteri lineæ extremo adhærebit: & si conformes extremæ notæ inueniantur, bene operatus es: si dissimiles procreentur, iterum de nouo incipias operari oportet. Sed quoniã in præcedentibus diffinitis sępe has probationes refellimus: ideò ad tertiam procedo probationem.

Secunda pǫbatio

Exemplum.

	2	
16	2	
8	1	
4	4	
2	2	
30		
	2	

¶Si igitur per tertiã probationem cupis progressionem probare, subtrahe à summa progressionales numeros, & si nihil superest, aut defuerit, integra erit operatio: occurrente autem opposito, nulla erit progressio. Et quamuis progressio additionis sit species, quia tamen duas continet regulas quæ additionem, subtractionem, multiplicationem, & diuisionem pro ipsarũ intelligentia præsupponunt: ideò minus inutile visum est post diuisionem de progressione nouum efficere diffinitum.

Tertia probatio.

¶Reductio, est grossioris numeri in subtiliorẽ, vel subtilioris in grossiorẽ cambitio, seu commutatio. Reducere, est grossiorem numerum in subtiliorem, vel subtiliorem in grossiorem cambire, aut commutare. 7

¶Exempli gratia: vis redducere 20 scuta ad duodenos: pro illorum cambio siue commutatione, 700 duodenos habebis. Quòd si ad duodenos triginta franci reducantur, inuenies, facta reductione, numerum 600 francorum pro summa. Etiam si 15 duodenos in turonos commutes, numerum 180 turonorum procreabis. ¶Finis huius speciei, est prouenientem assignare summam, siue numerum, qui ex reductione grossioris numeri ad subtiliorem, vel econtra, prouenit. ¶Seruit auem hæc species astrologis, & calculatoribus, multis etiam hominum statibus: quemadmodum mercatoribus, thesaurarijs, & alijs huiusmodi hominibus

☞ Vni scuto, 35 duodenos etiam doctissim⁹ dominus Budæus i Asse suo asserit olim hic tributos fuisse.

Reductionis finis & cõmoditas.

PRIMO NOTANDVM EST duo esse in hac specie aduertenda, alterum numerus reducendus, alterum prouenïens ex reductione summa. Modus autem scribendi talis obseruari debet: loco superiori, numerus seu numeri reducendi ponantur, sub quibus in directum recta linea protrahatur, & in latere sinistro denominatio numeri, ad quem fit reductio per cõueniens signum locetur. verbi gratia: si 100 scuta debeas reducere ad duodenos, illa scuta sub tali forma dispones post lineam perpẽdiculariter cadentẽ. Deinde sub linea interiecta discursus reductorius fiat: quo peracto, linea subijciatur, infra quam numerus ex reductione prouenïẽs locabitur: ista omnia discretius sequenti notabili declarabuntur.

Duodeni. | 100 Scuta.

In reductiõe aduertẽda.

SECVNDO NOTANDVM EST pro operationis contracta intelligentia triplicem esse reductionem. Vna est, qua grossiores numeri, ad subtiliores reducuntur: vt si ducati, vel scuta ad duodenos, vel denarios reducãtur. Alia est, qua subtiliores numeri, ad grossiores reducuntur: vt si denarios, vel duodenos ad scuta, vel ducatos velles reducere. Alia vero est reductio, qua simul & grossiores, & subtiliores numeri ad medios reducũtur. Verbi gratia: si ducati, & duodeni simul ad francos reducantur. Insuper cõsyderabis quamlibet istarũ reductionũ duplicem esse, videlicet simplicẽ, & mixtam. Simplicẽ reductionem eã appellamus, cuius numerus aut numeri reducendi, sunt eiusdẽ denominationis. Exemplũ: si 1534 ducati ad duodenos reducãtur. Mixtam vero reductionẽ eam dicimus, cuius numerus aut numeri reducendi, sunt diuersarum denominationũ. Exemplũ: vt si 3542 ducati, & 2673 scuta simul ad duodenos reducãtur. De his autẽ mixtis numeris, diffusius vltimo diffinito huius primi tractatus agetur. His declaratis, ad hæc infra posita aduertes documẽta, per quæ huius speciei notitiã habere poteris. Primũ documentũ est tale. Si simplicẽ numerũ ad subtiliorẽ velles reducere, oportet primo vtriusq; numeri simplicis denominationẽ cognoscere, hoc est, an quilibet talis dicatur numerus ducatorum, scutorũ, vel aliquod aliud huiusmo-

Triplex reductio.

Simplex Mixta

Primũ documẽtũ.

di: deinde videndum est quoties vnum singulare numeri reducendi continet, aut continetur ab vno singulari alterius numeri ad quẽ debet reduci. Per singulare numeri, intelligo, si numerus sit ducatorũ, vnum ducatum: si scutorum, vnum scutum: & si duodenorum, duodenum vnum: & ita de alijs. Hoc igitur cognito, si numerus reducẽdus sit grossior, eundem per quotientem numerum, hoc est per illum numerum significantem quoties grossior numerus subtiliorem continet, multiplicabis. quo facto, proueniens ex illa multiplicatione summa, creatus ex tali reductione numerus erit. Exempli gratia, vis duodenorum summam cognoscere, quam 1534 scuta componunt? primo videbis quot contineat duodenos scutum, & reperies 35 continere: scutorum igitur numerum, scilicet 1534 multiplicabis per quotientem, hoc est per 35, & proueniens summa erit 53690, quæ ex reductione 1534 scutorum ad duodenos prouenit. Eodem modo operandum est, si ad turonos prædictum numerum scutorum reducere velles. Debes enim in primis videre quot turonos scutũ contineat, quod isto modo facies. postquam scutum 35 continet duodenos, & duodenus, 12 continet turonos, debes 35 per 12 multiplicare, & proueniens numerus, qui est 420, erit summa turonorum contentorum à scuto: multiplicabis igitur numerum scutorum, videlicet 1534 per 420, & proueniens numerus, erit 644280, qui ex reductione 1534 scutorum ad turonos prouenit.

Reductio grossiorũ ad subtiliora.

Reductio subtiliorum ad grossiora

¶ Si autem in simplici reductione reducendus numerus sit subtilior numero ad quem debet reduci, cognita vtriusque numeri denominatione, & cognito quoties vnum singulare numeri reducendi contineatur ab vno singulari numeri ad quem fieri habet reductio, debes numerũ subtiliorem per quotientem grossioris numeri diuidere, & numerus quotiens, erit proueniẽs ex tali reductione summa. Verbi gratia: vis reducere 1435 duodenos ad scuta? hunc duodenorum numerum pro diuidendo numero accipies, & pro diuisore numerum 35. & diuisione facta, numerus quotiens, qui est 41, erit proueniens summa ex reductione 1435 duodenorum ad scuta. Et pari processu in quibusuis alijs reductionibus simplicibus procedendum est.

Secundũ documen de mixtorum reductione.

¶ Secundum documentum est, numerus mixtus in tripla reperitur differentia in eius reductione. Primo enim contingit ad subtiliorem reduci. Secundo euenit, vt ad grossiorem numerum reducatur. Tertio vero accidit, q ad medium reducatur numerum. Exemplum primi. Si reducere velles 3456 scuta, 4567 francos, & 5678 duodenos ad turonos. Exemplum secundi, si velles reducere 1234 duodenos, 2345 francos, & 3456 scuta ad ducatos. Exemplum tertij. Si velles reducere 9876 ducatos, & 8765 scuta, & 7654 duodenos ad francos.

Primi exempli declaratio.

¶ In primo autem exemplo est operandum hoc pacto, dispositis numeris illis, vt præsens docet figura:

Turonus	3 4 5 6	Scuta
	4 5 6 7	Franci.
	5 6 7 8	Duodeni.

Primo duodenorum numerus ad turonos reducatur, modo declarato in primo documento, & habebis pro summa 68136 turonos: deinde numerus francorum ad turonos reducatur: quod etiam facies secundum quod declaratum est in primo documento: & pro summa reperies 1096080 turonos: deinde numerum scutorũ eodem modo ad turonos reducas: & pro summa inuenies 1451520 turonos, & his tribus reductionibus cõpletis, isti tres numeri prouenientes addãtur, ex quorum additione consurgẽs summa erit 2615736, quæ habetur ex reductione 3456 scutorũ, & 4567 francorum, & 5678 duodenorum ad turonos.

6 8 1 3 6	turoni ex	duod.	5 6 7 8
1 0 9 6 0 8 0		fran.	4 5 6 7
1 4 5 1 5 2 0		scut.	3 4 5 6
2 6 1 5 7 3 6	Summa		

Isto igitur discursu peracto, sub tali dispositione reductio manebit.

Secundi exempli enodatio

¶ In secũdo exemplo taliter est operandum, in primis disponantur numeri, vt præsens ostendit figura:

Ducatus	1 2 3 4	Duodeni
	2 3 4 5	Franci
	3 4 5 6	Scuta.

deinde reducantur tam franci, quàm scuta ad duodenos: & summæ inde prouenientes simul cum duodenorum summa addantur: & proueniens numerus erit 169094, qui per 40 diuidatur, postq̃

Ducatus	1 2 3 4	Duodeni	
	2 3 4 5	Franci	14 duodeni
	3 4 5 6	Scuta	supersunt.
Summa	4 2 2 7	Ducatorum	

ducatus ex 40 resultat solidis,& numerus quotiens, videlicet 4227, erit summa ducatorum prouenientium ex reductione supradictorum numerorum ad ducatos: quo facto,vt est in præcedenti forma, reductio manebit.

Tertij exempli operatio.

¶In tertio exẽplo est hoc pacto operandũ,dispositis in primis illis numeris queadmodũ præsens forma declarat:deinde illi numeri ad numerũ duodenorũ reducantur:& pro summa habebis numerũ 709469 duodenorũ:qui per 20 diuidãtur,postquã ex 20 duodenis francus cõsurgit:& pro numero quotiẽte inuenies 35473, qui supradictorũ numerorũ summa reductoria dicitur:& sub dispositione tali reductionem habebis.

Francus	9 8 7 6 Ducati
	8 7 6 5 Scuta
	7 6 5 4 Duodeni.

Francus	9 8 7 6 Ducati
	8 7 6 5 Scuta
	7 6 5 4 Duodeni
Summa	3 5 4 7 3 Francorũ. & 9 duod.

Reductionum probationes.

TERTIO NOTANDVM EST hanc speciem reductionis tres habere probationes:sed easdem accommodatitias. Quarum prima est nouenaria. Secunda septenaria. Tertia vero per diuisionem,aut multiplicationem potest fieri. Nempe omnis reductio per multiplicationem fieri habet,aut per diuisionẽ,aut mixtim,partim per multiplicationem, partim per diuisionem. Si igitur reductio per solam multiplicationem fiat,probabitur per easdem tres probationes,per quas multiplicationem diffinito quarto probari dicebamus. Qꝫ si aliqua talis reductio per diuisionem fiat dũtaxat: ipsa per tres diuisionis probationes probabitur. Si vero mixta fuerit: mixtim probationes accipies. ¶Pro intelligentia igitur primæ probationis nouenariæ,aduerte ꝙ si numeri reducendi sint eiusdem denominationis,& reducantur ad subtiliorem numerum,vt si 154 scuta ad duodenos reducãtur,notæ sunt accipiendæ eo modo,quo diffinito quarto huius tractatus dictum est in prima probatione:videlicet vt à reducendis numeris,9 abstrahatur quoties potest,& nota remanens, facta recta linea ante operationem, debito ponatur loco:deinde à numero quotiente,per quem multiplicari debet summa numerorum reducendorum,nota abstrahatur,per quam prior multiplicetur,& à producto numero sumatur nota ponenda in capite lineæ:deinde à summa reductionis, nota eodem modo accipiatur, quam in altero lineæ extremo pones: & si illæ extremales notæ sint similes, bona erit reductio:si dissimiles,nihil valebit. ¶Septenaria autem probatio habet eodem modo fieri,hoc solo dempto,vt notæ accipiantur,vt declaratum est diffinito secundo. Sed quoniã,vt sæpe dictum est,isti probandi modi nihil valent:ideo ad tertiam probationem accede: pro qua intelligenda,non est opus magno processu, quoniam per diuisionem fieri habet,vt in quarto diffinito declarauimus. Si autem vis probare reductionẽ in qua subtiliores numeri ad grossiores reducuntur:vel in qua grossiores,& subtiliores ad medios reducuntur:ex iam dictis qualiter fieri habeat, constat.

Prima probatio.

Secunda probatio

Tertia probatio.

8

¶Radicum extractio in quadratis,est numeri inuentio, qui ex vnico in se ductu, totum numerũ, aut saltem maiorem numeri partem, quadratam efficit. Radicem enim quadratam extrahere, est numerum inuenire, qui cum in se semel ducatur, totum numerum, vel maiorem eius partem quadratam, procreet.

¶Verbi gratia. Numeri 9 radix,est 3. cum ex ductu,vel multiplicatione 3 in se,numerus 9 emanet. ter autem 3,numerum 9 componunt. Etiam 4,respectu 16,& 2, respectu 4,radix nuncupatur. ¶Hinc sequitur quod radix numeri,est numerus qui in se ductus,aliquem totum componit numerum. & ita patet quemlibet numerum posse radicem esse tam quadrati numeri,quàm cubi. In proposito autem,ad vnitatẽ vsq; numerum extendimus. Est tamen aduertendum illum numerum esse quadratum,qui ex ductu alicuius numeri in se tantum semel, constituitur. quemadmodum est numerus 4,qui ex ductu 2 in se semel,resultat:& 9,qui ex ductu 3. & 16,qui ex ductu 4 in se tantum semel,componitur. bis enim 2,numerum 4 generant:& ter 3,numerum 9,quemadmodum quater 4,numerum 16 efficiunt:ideo tam 4 quàm 9,pariter & 16,numerus

Corollarium.

Quadratus numerus.

Numer⁹ cubus.

quadratus appellatur. Aduerte insuper quòd numerus cubus est ille qui ex ductu alicu ius numeri in se bis tantum, vel semel in suum quadratum producitur: vt est numerus 8, qui ex ductu 2 in se bis, componitur. bis autem 2 bis, faciunt 8. idem dicendum est de numero 27, qui est cubus, cum ex ductu 3 bis in se solum, procreetur: notum enim est ter 3 ter, 27 componere: quoniam ter 3, faciũt 9 numerum, qui est quadratus, & ter 9, constituunt 27: vt satis cõstat. Vnde in omni numero cubo, reperitur quadratus: sed non econtra, excipiendo vnitatem, quæ potestate & quadratus & cubus est numerus.

Cubum à q̃drato segregauimus, partim ꝙ cubus numerus sit solidus, quadratus vero planus. vterq; tamen secũdũ figuras geometricas cõsyderaturi partim vero, ꝙ & ipse author aliud posuerit ꝑ cubo diffinitum, nempe nonũ.

Corollarium.

¶Ex his patet binarium quadrati numeri scilicet, & cubi radicem esse. Si autem binarius in se semel tantum ducatur, 4 numerum reddit, qui est quadratus: si vero bis in se ducatur, 8 efficit numerum, qui cubus est. de quadratis, simul & cubis, eorúmq; generatione, plura in libro arithmeticę speculatiuę tractatu tertio reperies.

Radicum extractio in quadratis.

¶His igitur tanquam procemialibus declaratis, ad propositum deuenire oportet. Est autem radicum extractio in quadratis (vt ex præhabitis facile patet) numeri inuentio, qui cum in se semel tantum ducatur, totum numerum, vel maiorem eius partem efficit quadratam: & sic patet, ꝙ radicem extrahere in quadratis, est numerum inuenire, qui cum semel tantum in se ducatur, totum numerum, vel maiorem eius partem quadratam componit. Exemplum vbi totum numerum producit, 16. nam 16 tantum, 4 componit, cum quater 4, 16 efficiant. Exemplum vbi non totum numerum, sed maiorem eius partem creat, 19. nam 19 numerus non est quadratus: ideo quadratã non habet radicem, 4 tamen est radix maximæ partis illius numeri 19, videlicet 16. Vnde quamuis 16 numerus non sit simpliciter maxima pars 19, cum 17 & 18 maiores sint illius numeri partes: est tamẽ maior, siue maxima pars 16 numerus in 19, in qua reperitur radix quadrata: quatuor sunt quidem numeri partiales 19, & non plures, quorum quilibet est quadratus, & per consequens habens radicem quadratam. Primus numerus partialis quadratus, est 1: secundus 4, tertius, 9: quartus, 16. primi radix, est 1: secundi, 2: tertij, 3: & quarti, 4. inter illos numeros quadratos maior, est 16. & ita patet qualiter illa diffinitio veniat intelligenda.

Radicum extractionis ĩ quadratis, finis.

¶Finis huius diffiniti, est multas conclusiones tam geometricas, quàm astrologicas intelligere: quas difficulter, imò nullo modo intelligere possemus, hac arte neglecta. ¶Seruit autem præsens doctrina præcipue astrologis, & calculatoribus: alijs pariter hominum conditionibus, sed raro.

In q̃dratis radicibus extrahẽdis notanda.

PRIMO NOTANDVM EST duos numeros in hac parte admodum requisitos esse. Quorum prior dicitur numerus à quo radix quadrata habet extrahi: alter vero, radix quadrata nuncupatur. In generali autem sex sunt consyderanda: quæ sæpenumero in omni radicum quadrata extractione occurrunt. Primum, est numerus à quo radix quadrata habet extrahi. Secundum, radix quadrata. Tertium, lineæ parallelæ. Quartũ, puncta posita sub imparibus elementis numeri, à quo radix quadrata extrahi debet. Quintũ, radix, siue radices duplicatæ. Sextum, numerus manens. ¶Modus autẽ scribẽdi talis esse debet. loco primo & superiori, ponatur numerus à quo radix quadrata extrahi habet. sub quo (si plures q̃ duo limites reperiãtur) puncta locentur, eo pacto: vt sub primo elemento punctum ponatur, & secundo prætermisso, sub tertio etiam ponatur punctũ, & ita consequenter eundo per imparem limitum numerũ. deinde sub punctis suppositis, duæ lineæ parallelæ in rectum ducantur: vt præsens figura ostendit.

Numerus à quo radix quadrata habet extrahi	7 4 3 2
Puncta interposita	· ·
Lineæ parallelæ	———

Postmodum radix quadrata inter lineas mediabit, sub quibus radix, vel radices locabuntur. Postremo autem numerus manens, virgula obliqua significabitur: sed de his in sequenti notabili prolixius videbitur.

Mod⁹ extrahendi quadratã radicem.

SECVNDO NOTANDVM EST incipiendũ esse operari ab vltimis elementis, versus prima procedendo, vti in diuisione visum est: eo ꝙ radicum extractio, quædam specialis diuisio dici potest. Et videbis an vltimum elementum sit impar, siue puncto signatum, vel non. Si primum contingat, inuenias digitum, qui in se quadrate ductus, numerum illi æqualem cõstituat, vel saltem maximã illius numeri partem, quam

componere poteſt:& inuento tali digito,ducatur in ſe quadrate,& numerum reſultantem ſubtrahe ab illo elemento vltimo,puncto ſignato:& ſi aliquod fuerit reſiduum,id ſupra ſignatum elementum pone:q; ſi nihil remanſerit,ipſum cancellabis:quo facto inuentũ digitum inter lineas parallelas directe ſub vltimo elemento ſignato,pones. Deinde ipſum digitum duplabis,& duplatus numerus infra illas lineas directe ſub penultimo elemento ſedebit:& pro ſecundo operari incipies. Sed ſi ſecundum eueniat,videlicet vltimum in impari limite non eſſe,nec ſignatum puncto,inueniendus eſt digitus, qui in ſe quadrate ductus, totum numerum duorum vltimorum elementorũ componat,vel maximã quam poteſt componere partem:quo inuento,in ſe ducatur,& proueniens numerus à ſuprapoſitis numeris ſubtrahatur,reſiduum (ſi quod fuerit) deſuper ponendo,elemento prius cancellato,& inuentũ digitum inter lineas ſub vltimo elemento ſignato locabis:deinde illo digito duplato,conſurgentẽ numerũ ſub lineis correſpondenti limite pones,ſcilicet ſub antepenultimo elemento ſuperioris numeri,& hoc ſi talis numerus ex duplatione conſurgens per vnicũ characterem ſcribatur:q; ſi duabus figuris ſcribi debeat,illarum prima ſub antepenultima,& ſecũda ſub penultima numeri ſuperioris ponatur.intellige ſemper ſub parallelis lineis. Conſequẽter procede operando,& iterum reperiendus eſt digitus in præcedenti charactere ſignato puncto,ſimul & ſequenti elemento non ſignato, qui quidem digitus in duplatum numerũ ductus,deleat totum ſuprapoſitum reſpectu duplati,aut quantum vicinius poteſt:& poſtea in ſe ductus, totum etiam ſuprapoſitum reſpectu ſui, aut maximam quam poteſt partem deleat:& ille digitus inuentus inter lineas parallelas ponatur directe ſub penultima figura puncto ſignata:deinde totus numerus inter lineas poſitus dupletur,& ſub duabus illis lineis proueniens ex duplatione numerus locabitur:ita vt duplati primum elementum ſub figura immediate præcedenti illum ſignatum characterem ponatur,& ſecundum duplati,ſub ſignata puncto figura,& tertium (ſi aliquod fuerit) duplati elementũ, ſub ſequenti figura ſedebit:quo facto,iterum reperiendus eſt digitus in pręcedenti charactere ſignato,ſi quod tale ſit,& eſt vt prius operandum,quouſq; ad primum deuentum fuerit elementum. ¶Tenenda tamen in hac parte ſunt hæc duo documẽta.quorum prius eſt.Nunquam digitus in ſe ducatur,niſi inter lineas ſub ſignato elemẽto ponatur.Secundum eſt.Quandocũq; in media operatione contingit non poſſe in ſignato charactere digitum inueniri,qui in duplatum ductus totum deleat ſuprapoſitũ, vel quantum vicinius poteſt,ponenda eſt o inter lineas recte ſub elemento puncto ſignato, in quo digitum inueniri quærebas:& cæteris intactis manentibus,numerus inter lineas poſitus (cuius o eſt primum elementum) dupletur,& productus,ſiue duplatus numerus ſub lineis ponatur,ita vt o,quæ eſt duplati prima figura ſub illo charactere ponatur,qui immediate præcedit illud ſignatum elementũ,in quo digitus inueniri non poteſt:& ſecundum duplati elementum immediate ſequatur,deinde tertium,& ita conſequenter.Si autem in fine accidat digitum inueniri non poſſe,ponenda eſt o inter lineas ſub primo elemento ſignato, alijs characteribus intactis ſe habentibus. Hoc igitur terminato,ſi nihil ſupra numerum,cuius radicem quæris,remanſerit,talis numerus eſt quadratus,cuius radix eſt numerus inter lineas repertus.Si vero aliquid ſupererit, numerus ille,cuius radicem quæris,non eſt quadratus:& ita dicendum eſt numerũ inter lineas repertum, eſſe radicem maximæ partis numeri ſuprapoſiti,ſic q; non eſt reperibilis aliqua pars maior illo,cuius aliquis numerus ſit radix quadrata. Iſta vt clarius intelligãtur claro aperiuntur exẽplo. ¶Vis autẽ cognoſcere an in iſto numero 7306259,radix quadrata reperiri poteſt,aut non?in primis illum numerũ eo pacto deſcribas,vt te in primo notabili docui:ita videlicet q; ſub ipſo duæ lineæ parallelæ protrahãtur,& imparia huius numeri elemẽta ſubſignentur punctis:vt præſens exemplum demonſtrat. Deinde in vltimo charactere,ſcilicet 7,inueniatur digitus,qui ponatur inter lineas directe ſub vltimo illo ſignato elemento,& ductus in ſe,totum ſuperpoſitum deleat,videlicet 7,vel quantum vicinius poteſt:& reſiduũ (ſi quod fuerit) deſuper pones,prius tamen cancellato 7,& talis digitus eſt 2.ducas igitur illum in ſe,dicendo,bis 2,faciunt 4.quem à 7 ſubtrahe,&

7 3 0 6 2 5 9
· · · ·

☞Hic labor hoc opus eſt, optie lector, vbi te ita extricare potes: per inuentum digitum multiplica duplatum totũ,productũ diligenter obſerua, cui adde nũerũ,qui conſurgit ex multiplicatione digiti in ſeipſũ, ſed addito vno limite. ita vt vnitas illi⁹, denã hui⁹ accipiat &c. atque hunc totũ numerũ ſimul legitima ſubtractionis lege ſubduces ab oĩbus figuris quotquot ſint ante figuram puncto ſignatã incluſiue, ab ipſa ſignata figura exorſus ſubtractionẽ. In cæteris authorem ſequere.

☞Quotieſcũq; in media operatione acciderit,vt quãtũ accipias digitũ neſcias,q in duplatũ ducatur ad delendũ id quod ſupra & poſt ipſum eſt:debes per duplatum

Primum documentum.

Secundũ documentum.

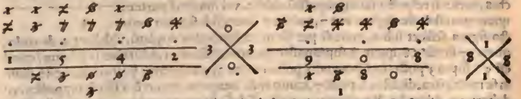
Operationis exemplum.

residuū, scilicet 3, desuper pone, prius 7 cācellato: postmodū ille digitus dupletur, & infra lineas sub proxima præcedente figura ponatur: & operatio sub tali forma manebit. Consequēter ad secundā operationē procede, & inuenies digitū in elemento signato, videlicet 0, simul & in sequētibus scilicet 3, & 3, qui quidē digitus primo in duplatū ductus, totū suprapositū respectu duplati deleat, vel quantum vicinius potest, & postea in se ductus, numerū respectu sui suprapositū deleat, vel maximā partem quam potest: & ille digitus erit 7, quē inter lineas sub signata puncto figura, scilicet sub 0, pone: & per illum multiplicabis duplatū, videlicet 4, dicendo, quater 7 faciūt 28, quem à suprapposito numero, scilicet 33, subtrahe: residuum (quod est 5) supra 3 posteriorē ponendo, prius tamen 33, cancellato: postmodū digitū illum in se multiplica, dicēdo, septies 7, componūt 49: quem numerū à sibi supraposito, videlicet 50, subtrahe, & vnitatem quæ est residuū, supra 0 locabis, prius cancellato 50, quo facto, numerū inter lineas repertū, videlicet 27, duplicabis, & numerus proueniēs erit 54: quē sub lineis pones, sic vt duplati prima figura sub figura immediate præcedenti 0 ponatur, & secūda duplati figura scilicet 5, sub 0 puncto signata ponatur, priori duplato numero cancellato. Quibus peractis, & eo modo dispositis, vt dictum est, sub tali dispositione operationem reperies. Deinde ad tertiam operationē procedas, & reperies ꝙ nullo modo potest reperiri digitus in præcedenti charactere signato puncto videlicet 2, simul & sequētibus scilicet 6, & 1, qui digitus in duplatum ductus, numerum suprapositum respectu duplati deleat, vel saltem maiorem eius partem: quoniam si quis talis digitus posset reperiri, maxime esset 1: sed notum est ꝙ si 1 in vltimam duplati figuram, quæ est 5 ducatur, proueniet 5, qui à sibi supraposita vnitate subtrahi non potest: ideo loco digiti inter lineas parallelas 0 locetur directe sub 2 signato puncto: & duplato numero infra lineas posito, scilicet 54, cancellato, dupletur numerus inter lineas repertus, videlicet 270: & prouenientem numerum qui erit 540, sub lineis locabis: sic vt prima duplati figura sub secunda superioris numeri ponatur, secunda sub tertia, & tertia sub quarta: cæteris eodem modo se habentibus, & sub tali signatura discursum habebis. Postremo autem reperiēdus est digitus in primo charactere signato, qui est 9: simul & sequentibus, scilicet 5, 2, 6, 1: qui quidem digitus in duplatum ductus, totum suprapositum respectu duplati deleat, vel quantum vicinius potest: deinde in se ductus, totum suprapositū, vel maximam quam potest partem deleat: & digitus ille est 3, quem inter lineas pone sub 9. Et primo per illum digitum, vltimum duplati elementum, scilicet 5, duces siue multiplicabis, dicendo ter 5, faciunt 15: subtrahe igitur 15 à suprapposito numero, videlicet 16, & residuum, videlicet 1, supra 6 pone, prius 16 cancellato: deinde eundum est ad digitum, quem per penultimum duplati elementum, scilicet 4, multiplica sic, ter 4 constituunt 12: quem numerum à sibi supraposito subtrahe, videlicet 12: quo subtracto, nullum manebit residuum: cancellato igitur 12, ad aliam operationem ibis, multiplicando digitum per primum duplati elementum, quod est 0, & proueniet 0: & cum à numero supraposito, scilicet 5, subtrahitur 0, hoc est nihil, maneat 5 non cancellatus. Vltimo autem, digitus in se ducatur, & habebis numerum 9, quoniam ter 3, talem numerum efficiunt: quem à supraposito, videlicet 9, subtrahe: & cancellato prius 9, desuper 0 pone. His igitur completis, pro residuo operationis, numerum 50 habebis: quem obliqua virgula significabit. Istorum quæ dicta sunt exemplum respice generale.

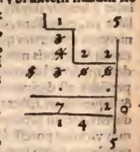
	3̶	4̶	1̶	1̶	5	0	Numerus manens
	7̶	3̶	3̶	6̶	2̶	5 9̶	Numerus à quo radix
Puncta supposita	·		·		·		quadrata habet extrahi.
Lineæ parallelæ	2		7		0	3	Radix quadrata
		4̶	5̶	4̶	4	0	Radices duplatæ.
		5					

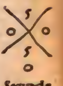
diuidere eum nūerū q supra & post duplatū est, & digitus is q inquotiēte habetur, plærunq; digitū accipiendū prodit, aut saltē vnitate, rarissime binario minorem: nūquam autē maiorē, quinimo si duplat⁹ maior sit nūero sibi supraposito, nullū poteris capere digitū: vnde ad locum illum cifra posita, alijs īractis ad præcedentē figurā puncto signatā te cōferas oportet, vbi similiter p diuisionem digitum inuestigabis, id quod summū tibi tediū leuare poterit lector.

Et quoniam in operatione aliquod est residuũ, ideo numerus inter lineas repertus, qui est 2703, non est radix numeri suprapositi: est tamen radix maximæ partis illius numeri, in quo radix quadrata inueniri non potest. Et si velles cognoscere quisnam sit ille nũmerus cuius radix inter lineas posita, sit radix: multiplicabis illum numerum per seipsum & reperies 7306209 numerum, cuius 2703 est radix quadrata. Sed vt locuplétius istud diffinitum intelligere valeas, hæc duo infra posita exempla consyderabis.

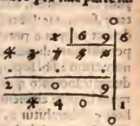


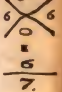
TERTIO NOTANDVM EST in hac specie tres esse probationes, quibus radicum extractio in quadratis habet probari. Quarum prima est nouenaria. Secunda septenaria. Tertia vero per multiplicationem fieri debet. ¶Pro primæ probationis intellectu, est aduertendum, si vis radicum extractionem in quadratis per 9 probare, primo capiendam esse notam à numero à quo radix quadrata habet extrahi: quam (posita ante operationem recta linea, vti in diuisione factum est) in eiusdem capite pone: deinde à numero inter lineas posito (quem radicem vel quotientem numerum dicunt) notam accipies, quam in se multiplicabis, & à producto numero separabis 9 quoties poteris, remanentem notam ante lineam directo aspectu ponendo: postmodum ab operationis residuo (si quod fuerit) notam sume, quam pariter ante lineam correspondenti sede locabis: quo peracto residui notam, notæ radicis adde, & à consurgente numero notam accipies, quam in altero lineæ extremo, videlicet inferiore pone, & si extremales notæ æquales reperiantur, bene operatus es: sinautem, male. Vbi autem nullum sit operationis residuum, accepta superioris numeri nota in capite lineæ (vt dictũ est) locetur: deinde à quotiente notam accipies, quã per se multiplicabis, & à producto numero notam extrahes, quam in pede lineæ pones, & videbis an sint æquales vel non: si primum contingat, habitus discursus est bonus: euenienti secundo, inefficax, & malus dicetur. Exemplum sume hic appositum. Hæc probandi via facillime inficiari potest: vt in præcedentibus diffinitis tactum est. ¶Secũda igitur probatio est examinanda. Pro qua scienda consyderabis omnino eodem modo in illa procedendum, ac in præcedenti: hoc excepto, quòd notæ sunt capiendæ quemadmodum secundo diffinito huius tractatus, notabili tertio, declaratum est: ideo pro hac parte sufficiat probationis exemplum quod est tale. ¶Hæc autem secũda probatio perinde ac præcedens inficiatur. ¶Ipsis igitur prætermissis, ad tertiam in hac parte sustinendam probationem accedendum est: quæ hoc pacto fieri habet. Numerus quotiens, siue radix inter lineas reperta, per seipsam multiplicetur: & numero producto residuum operationis (si quod fuerit) addatur: & si numero à quo radix quadrata habet extrahi, cõsurgẽs summa sit æqualis, operatio bene valet: aliter si accidit, nulla erit. Vbi autem nullum est residuum, solum videndum est an prouenie ns ex multiplicatione quotientis in se sit æqualis suprapòsito, vel non. Exemplum assignare est facile: ideo quæ dicta sunt pro præsentis diffiniti declaratione sufficiant.





Secunda probatio





Tertia probatio certa.

In secũda probatione diuide radicẽ per 7, residuũ in se duc si quod fuerit, & productũ rursus per 7 diuide, manenti notæ æqualis erit illa quæ relinquetur ex diuisione per 7 numeri ex quo venabaris radicẽ, si totus fuit quadratus, vt ĩ duobus præcedẽtibus exẽplis licet videre. Sed si maxima ei⁹ pars sola sit quadrata, reliquã itẽ partẽ per 7 diuide, & residuum eius, notæ radicis adde, & si additæ notæ 7 excedant, 7 ab illis auferas, & quod manet, æquale erit in bona operatiõe notæ ex toto numero relictæ. Idem sit iudiciũ atque modus, si per 5 probare libuerit.

¶Radicum extractio in cubis, est numeri inuentio qui ex bino in se ductu, vel vnico in suum quadratum, totũ numerum efficit, vel saltem maximam eius partem cubicam. Et ita radicem extrahere in cubis, est numerum assignare, qui cũ bis in se ducatur, vel semel in suum quadra- 9

tum,totum numerum,vel maximam eius partem cubicam componit. ¶Exempli gratia,vbi totum numerum producit 2 in se bis ductus,aut semel in suum quadratum numerũ,8 efficit. eo ꝙ bis 2 bis,siue bis 4 (quod idem est) 8 numerũ reddunt:ideo 2,est radix cubica 8. Idem est dicendum de 3,qui respectu 27,cubica radix nuncupatur:quoniam ter 3 ter,siue ter 9,talem numerum constituunt. Exemplum facile inuenire est,vbi maximam partem cubicam componit: vnde 2,est radix maximæ partis 9.etiam 10 & breuiter 8,cuius radix est 2,est maxima pars cuiusuis numeri medij inter 8 & 27,in quo cubica radix reperiri potest. Et si scire cupis quotum numerum quilibet digitus in se cubice ductus producat: sequẽtem tabulam aspice, quæ id ostendit aperte.

Semel	1	Semel,	1
Bis	2	Bis,	8
Ter	3	Ter,	27
Quater	4	Quater,	64
Quinquies	5	Quinquies,	125
Sexies	6	Sexies,	216
Septies	7	Septies,	343
Octies	8	Octies,	512
Nonies	9	Nonies,	729

Radicum extractionis in cubis finis.

¶Finis huius diffiniti cũ præcedentis diffiniti fine idem est: videlicet multas in Geometria conclusiones, pariter in astrologia intelligere:quas ignorare oportet hac scientia neglecta. Seruit præsens diffinitum astrologis & calculatoribus:raro autem alijs hominum conditionibus.

In cubicę radicis extractione considerãda.

PRIMO NOTANDVM EST in hac specie duos esse numeros necessarios. Prior nuncupatur numerus à quo radix cubica extrahi debet. Posterior radix cubica dicitur. In communi sex sunt sæpissime occurrentia. Primum,est numerus à quo radix cubica extrahi debet. secundum,radix cubica. tertium,lineæ parallelæ. quartum,puncta locata locis millenariorum,excepto primo,sub numero à quo radix cubica extrahi debet. quintum,radix siue radices triplatæ. sextum,numerus manens. ¶Modus quidem scribendi, talis est. Primo & superiori loco numerus,à quo radix cubica extrahi debet,locetur:sub quo (si plura quàm tria fuerint elementa) puncta ponantur,eo modo vt sub primo elemento vnum ponatur punctum:& duobus prætermissis immediate sequentibus, sub quarto ponatur etiam punctum,& ita consequenter, taliter ꝙ sub omnibus elemẽtis locis millenariorum positis puncta locentur. deinde sub numero illo punctis signato,duę protrahantur lineæ parallelæ,queadmodũ præsens ostendit figura.

Numerus à quo radix cubica extrahi habet.	5 3 4 6 2
Puncta supposita.	. .
Lineæ parallelæ.	————

Postmodum inter illas lineas cubica radix mediabit, & sub eisdem,radix, siue radices triplatæ ponantur. Deniq; manentem numerum obliqua virgula docebit. quæ ipsum à cancellato numero diuidet. Hæc omnia sequenti notabili clarius videbuntur.

Mod^o extrahendi cubicam radicem.

SECVNDO NOTANDVM EST modum operandi in hoc diffinito partim conuenire cum præhabito modo in quadratis,partim vero ab eo discrepare. Est igitur aduertendum à sinistra manu incipiẽdum esse operari,dextram versus eundo,quemadmodum & præcedenti diffinito procedere oportet. Digitum igitur inuenias sub vltimo elemẽto,puncto signato,qui in se cubice ductus, totũ deleat respectu sui suprapositũ, vel saltem illius maximã (quam potest) partẽ: quo inuento,inter lineas ponatur directe sub vltimo elemento signato. Deinde digitus ille tripletur,& consurgentem numerum sub proxima tertia figura versus dextram infra lineas parallelas locabis. Postmodũ iterum reperiendus est digitus (si quod fuerit elementũ præcedẽs signatum puncto) & est ponẽdus inter lineas sub illo signato elemento,qui quidẽ digitus simul cum priori in triplatum ductus,deinde per se ductus in productũ totum,deleat suprapositum respectu triplati, vel quantũ vicinius potest,& postea digitus ille in se cubice ductus deleat totũ suprapositũ respectu sui,vel maximã quam potest partem:quo terminato,totalem numerũ inter lineas repertum triplabis,& productum infra lineas sub proxima tertia figura versus dextram eundo manum ponatur,ita vt primũ elementum producti, siue tri-

☞Summa in hac operatione est difficultas inueniẽdi digiti:qua si te optime lector leuarim,gratiã Deo Optimo Max. habebis. A principio operationis per solam cubicã multiplicationẽ reperitur digitus, quare nulla ibi difficultas. At vbi progres-

ſus fueris ad alia elementa pũctis ſignata, illic ad totam radicem loco digiti quærendi pone cifram, deinde per totam radicẽ multiplica triplatũ, pérq; productũ diuide eas figuras quæ poſt elementũ ſignatũ fuerint omnes, in quotiente apparebit digitus quæſitus, aut vnitate interdum vel etiam binario minor, quemadmodũ & ĩ quadratis accidere dixi. hũc igitur ita, num verus ſit probabis. Repone digitũ illum in locũ fictæ illius cifræ ad radicẽ. atq; per totam radicem hãc, multiplica triplatũ, ac rurſus productũ per ſolũ digitum inuentũ, tãdem'q; hunc ipſum digitũ duc cubice in ſeipſum, cubũ ei⁹ adde priori numero producto, adiecto (ſicut in q̃dratis) vno limite à dextris. demum ſi hic numerus totus ſemel ſubtrahi ab omnibus figuris, quæ poſt elementũ pũcto notatum vnà cũ ipſo ſignato elemẽto poſſit, æquus fuit digitus inuentus. Sin autem non poſſit ſubtrahi, vnitate minor quærendus eſt, aut ſaltem binario: ac rurſus operandum vt prius, ſic'q; deinceps, donec totũ negocium abſolueris.

plati ſub proxima tertia figura locetur, & ſecundum ſub ſequenti, & de alijs pari modo. Deinde iterum operaberis ac prius, vſquedum deuentum fuerit ad primũ elementum à quo radix cubica extrahi debet: & ſi nullum fuerit reſiduum, numerus ille eſt dicendus cubus, cuius radix eſt numerus inter lineas repertus: vbi vero reſiduũ contingat eſſe, numerus ille non eſt cubus, & numerus inter lineas habitus dicẽdus eſt radix maximæ partis illius numeri mixti, cuius radicem cubicam inuenire quæris. Cõſyderabis tamen vt in præhabito diffinito, hæc duo documẽta. Primũ eſt, q; ſemper digitus, quãdo in ſe cubice ducitur, debet inter lineas eſſe poſitus ſub ſignato elemẽto. Secundũ eſt, Quotieſcunq; in media operatione cõtingit digitũ inueniri non poſſe ſub aliquo ſignato charactere, qui ſimul cũ alijs numeris inter lineas poſitis in triplatum ductus, deinde per ſe in prouenientẽ, totum deleat ſuprapoſitum reſpectu triplati: & poſtea in ſe cubice ductus, totum reſpectu ſui ſuprapoſitum deleat: ponẽda eſt o inter lineas ſub ſignato charactere, & cæteris intactis manentibus totum numerũ inter lineas repertum triplabis, & ſub proxima tertia figura verſus dextram eundo manũ, triplatum infra lineas debitis locabis ſedibus, ita videlicet vt illa quæ eſt triplati prima figura diametraliter ſub proxima tertia figura ponatur, & ita de reliquis ſuo ordine procedas. Q; ſi in operationis fine digitum non poſſe inueniri accidat, inter lineas ſub proximo elemento ſignato, o pone: quo expedito, finẽ operationis habebis.

Primum documentum.

Secundũ documentum.

¶Pro regula inſuper in hac parte tenebis: reſiduum operationis quãdoq; eſſe æquale radici, quãdoq; minus, quãdoq; autem maius, tam in quadrata quàm cubica operatione. Sed vt iſtorum practicam habeas, tale tibi pone exemplũ: 1860869, cuius ſi radicem cubicam inuenire intendis, elementa locis millenariorum poſita, pariter & primum, ſcilicet 9, & 0, & 1, punctis ſignabis: ſub quibus duas protrahas lineas parallelas, ſecundum quod præſens figura oſtendit.

Regula.

Operationis exemplum.

1 8 6 0 8 6 9

Deinde ſub vltimo elemento ſignato ſcilicet 1, reperies digitum inter lineas locandum ſub eodem elemento, qui in ſe cubice ductus, deleat totum ſuprapoſitũ reſpectu ſui: & ille digitus erit 1. duc igitur 1 in ſe cubice, & proueniet idem digitus ſcilicet 1. quem ſi à ſuprapoſito elemẽto ſubtrahas, nihil remanebit: cancellato igitur elemẽto ſignato, digitum triplabis, & triplatum numerum, qui erit 3, infra lineas ſub proxima tertia figura pone: & operatio ſub tali diſpoſitione manebit.

$\cancel{1}$ 8 6 0 8 6 9

1

3

Poſtmodum operari incipies, & reperies digitum ſub præcedenti elemento ſignato, ſcilicet 0, ſimul & ſequentibus ſcilicet 6 & 8, qui quidem digitus, vnà cum priori inter lineas poſito ductus in triplatum, deinde per ſe in productũ ductus, totum ſuprapoſitum reſpectu triplati deleat, vel quantũ vicinius poteſt, poſtea in ſe cubice ductus, deleat totum reſpectu ſui ſuprapoſitum: & inuenies q; digitus ille eſt 2, quem inter lineas ſub o pone: ducas igitur 2 ſimul cum 1, in triplatum, ſcilicet 3, dicendo duodecies ter, ſiue ter 12, faciunt 36: deinde dicas bis 36, conſtituunt 72. quem numerum ab 86, ſubtrahe, reſiduum deſuper ponendo 1 ſupra 8, & 4 ſupra 6, cancellatis prius 8 & 6. Deinde dicas, bis 2 bis, componunt 8: quem à ſuprapoſito elemento, videlicet o, ſubtrahere non potes, ideo à præcedenti numero vnitatem accommodato habeas, & cancellato 4, deſuper 3 pone. & poſtquam vnitas accommodata valet 10 in loco cifræ vnitates, ab illis ſubtrahe 8, & reſiduum, ſcilicet 2, ſupra o ponatur, o prius cancellata: quo facto, numerum inter lineas repertum videlicet 12, triplabis, & triplatum infra lineas pone, ſic q; triplati primum elementum ſub proxima tertia figura ponatur, & aliud ſubſequenti (cancellato tamen prius priori numero triplato) & talem reperies diſpoſitionem.

3

1 $\cancel{4}$ 2

$\cancel{1}$ $\cancel{8}$ $\cancel{6}$ $\cancel{0}$ 8 6 9

1 2

$\cancel{3}$ 3 6

Poſtremo autem inuenias digitum ſub primo elemento ſignato, ſcilicet 9, ſimul & ſequentibus, qui vnà cum cæteris digitis inter lineas repertis, ducatur in triplatum: deinde per ſe in productum ductus totũ ſuprapoſitum reſpectu triplati deleat, vel maximam quam poteſt partem: poſtmodum in ſe cubice ductus, totum reſpectu ſui deleat, vel quantum vicinius poteſt: & digitus ille erit 3.

ducas igitur 123 in triplatum, fcilicet 36,& proueniens numerus erit 4428: deinde per folum digitum, fcilicet 3, præhabitum numerum multiplica,& refultans numerus erit 13284, quem à numero fupra triplatum pofito fubtrahe, refiduum (fi quod fuerit) defuper ponendo, ita quòd 1 ab 1 fubtrahes, & 3 à 3,& 2 à 2,& 8 ab 8,& 4 à 6, defuper ponendo 2, prius autem cancellatis 1,3,2,8,6: deinde digitus repertus in fe cubice ducatur,& proueniet numerus 27, quem à fuprapofito fubtrahe, videlicet 2 à 2,& 7 à 9, & refiduum videlicet 2, quem virgula obliqua fignificabit, fupra 9 pone, 9 prius cancellato: quibus terminatis, talem operationem habebis.

	7	
	2 4 2 · 2 | 2	Numerus manens.
Numerus à quo radix cubica extrahitur.	1 8 6 0 8 6 9	
	. . .	Puncta fuppofita.
Radix cubica	1 2 3	Lineæ parallelæ.
Radices triplatæ	3 3 6	

¶ Et quoniam in tali operatione aliquod eft refiduum: ideo numerus, cuius radicem cubicam inuenire quærebas, non eft dicendus cubus: & ita numerus inter lineas repertus non eft radix illius fuprapofiti numeri, fed folum maximæ illius partis in qua poteft inueniri radix. Et fi fcire cupis quifnā fit ille numerus, cuius ille inter lineas locatus fit radix: illū numerū, videlicet 123, in fe cubice multiplica,& proueniens numerus erit 1860867. cui⁹ radix eft numerus inter lineas locatus, fcilicet 123.

Sed quoniā longe plura pro huius diffiniti enodatione requirūtur, quàm pro prius habitis, ideo opus eft fis in iam dictis promptiffimus, maxime in multiplicatione. Et vt plenius præfens diffinitum intelligere valeas, ad iuxta pofita exempla tuum dirigas intellectum.

2 7 6 6 | 9	7 1 3 2 8 9 1
. .	. .
3 0	5 11
9	15

TERTIO NOTANDVM EST in præfenti diffinito tres effe probationes ac in præcedentibus. Quarum prima eft 9. fecunda 7. tertia vero per multiplicationem habet fieri. Pro intellectu primę, eft aduertendum ꝙ à numero, à quo radix cubica extrahi debet, eft primo accipienda nota, quam in capite lineæ antepofitæ operationi pones, deinde à numero inter lineas reperto (quem quotientem, fiue radicem appellant) notam pariter accipias, quam in fe cubice multiplicabis,& à confurgente numero notam fumes ante lineam directa fede locādam: poftmodū à refiduo operationis (fi quod fuerit) notam capies, ante lineam fuo loco ponendam: deinde ab illis duabus notis, nota habeatur, quæ in altero lineę extremo ponatur: quo facto, videbis an extremales notæ fint fimiles, vel non: fi primum, bene operatus es: fi fecundum contingat, iterum de nouo operari incipias. Vbi vero nullum operis refiduum fuerit, accepta à fuperiori numero nota,& capite lineæ pofita (vt dictū eft) fumenda eft nota à radice,& lineæ anteponēda, quam in fe cubice multiplica,& à producto notam accipies, quam in altero virgulæ fine locabis: & videbis an extremæ illæ notæ fint æquales, vel non. Si primum detur, bona eft operatio: fecundo autem dato, nulla. Exemplum refpicere vales. Hunc probandi modum ex præcedentibus nullum effe notum relinquo.

Prima probatio per 9.

1	1
4 2 2 | 2	2
1 2 1 8 8	
. .	8
2 3	
6	1

☞ Idem hic probādi modus eft, qui & in quadratis, nifi quòd hic refidua non femel tantū in fe ducūtur fed bis, feu femel in fuum quadratū. id'ꝗ per omnia probationū genera obferuandū eft. Cætera conueniunt cum quadratis.

☞ Notādū hoc eft ī omni fpecierū ꝓbatione, quę vel per 9 vl' per 7 vel etiā per 5 fit, vt fi notę fint difpares, falfam effe operationē, certo argumēto oftēdatur, nō tamē femper bonā quantūuis pares fuerint notę. Spei igit̃ multū, fidei parū habere debebit in quolibet probationū genere, notarū cōcordia, fed earūdē difcordia totam negabit operationē. Plus fidei habebit duarū probationū (fi tertia non repugnet) vnanime teftimoniū. quib⁹ fi & tertię ꝓbationis videlicet quinariæ acceſſerit confonātia, plærūꝗ quidē operationis veritatē conuincet, at nō femper: in cau-

Secunda probatio per 7.

¶ Secunda probatio, quæ feptenaria dicitur, eodem modo fieri habet, ac præcedens, hoc folo dempto: vt videlicet notæ accipiantur eodem modo quo tertio notabili fecundi diffiniti in probatione fecunda diximus: ideo pro hac parte folum præfens exēplum fufficiat. Hæc quidem probandi via nulla eft: quemadmodum nec præcedēs. Et fi in me forte aliquis infurgat hoc pacto arguendo, poftquā igitur duo præhabiti probandi modi nihil valentes,& caffi dicūtur: fufficiebat eos tactos fuiffe fecundo diffinito, nec oporteret toties probationes non valentes reiterari. Ad hoc refpondeo,

1 | 3	3
6 2 8 4	3
. .	
2 1	0
6	3

dato illos probandi modos esse nullos (vti visum est) quia tamen iuuenes incipientes facilius multo cum illis operantur: ideo mihi congruum visum est non omnino omittendos esse. Insuper multa falsa scribere sæpenumero licet, vt quæ vera sunt, apertiora & oculatiora videantur. ¶Ad tertiam probationem accede, quæ instantiam nullam patitur, & aduerte, quòd si vis cognoscere an bene operatus fueris, debes numerum inter lineas repertum cubice multiplicare, & producto residuum operationis (si quod fuerit) addatur: quo facto, videbis an numerus resultans sit æqualis numero cuius radicem quæris: quod si contingat, bene operatus es, si autem oppositum occurrat, nihil operatio valebit: vbi vero nullum esse residuum accidat, duntaxat videbis vtrum proueniens ex cubica radicis multiplicatione sit æquale supposito, vel non: primo dato, bona erit: secundo reperto, nulla.

Tertia probatio, verior reliquis.

sa sunt cifræ multiplices, si aliquãdo fuerint neglectæ, errorẽ nõ mediocrẽ faciũt, is tamẽ ꝓbationũ non omni genere semper sentitur. Vnde id ꝓbationũ certissimũ genus est, quod per cõtrarias species fieri consueuit, quo indubie additio subtractionẽ, multiplicatio diuisionẽ, duplatio dimidiationẽ & è cõtrario ꝓbant sese bine mutuo. Radicũ item extractionẽ tam ĩ quadratis q̃ in cubis, cũ diuisionis quoddã genus sit, multiplicatio probare cõsueuit: at non contrà, extractio radicum, multiplicationem probare potest.

¶Operatio numerorum mixta, est debita mixtorum numerorum secũdum aliquam, aut aliquas prius habitas species repræsentatio. Operari vero cum numeris mixtis, est debite numeros mixtos secũdum aliquam, aut aliquas prius habitas species repræsentare. 10

☞ Hoc 10 diffinitũ sub reductionis modo potuisset concludi, nisi author nos exercere magis q̃ docere voluisset. Paucissimos noui, qui alias species norint, & hanc ignorarẽt praxin, quæ nec speciei neq; diffiniti nomen meretur, nulla arte, sed solo vsu & exercitio contenta.

Exempli gratia, vis significare, seu per characteras repræsentare centum ducatos, cum quindecim duodenis, hoc pacto facies. 100 ducati, 15 duodeni. Item si vis addere quinquaginta ducatos, & septem duodenos, quadragintaquinque ducatis, cum nouem duodenis, reperies pro summa 95 ducatos, 16 duodenos. Si vis etiam abstrahere trigintaquinq; ducatos, cum octo duodenis, à quadraginta ducatis, cum nouemdecim duodenis: inuenies pro residuo 5 ducatos cum 21 duodenis, & in cæteris speciebus est pari modo operandum. ¶Finis huius diffiniti, est debita in mixtis numeris operatio, secundum prius habitas arithmeticæ species. ¶Seruit autem præsens diffinitum ijs omnibus quibus præcedẽtia diffinita deseruiunt, videlicet astrologis, physicis, calculatoribus, mercatoribus, trapezitis: & breuiter quibusuis hominũ statibus, ac conditionibus.

Operationis in mixtis finis.

PRIMO NOTANDVM EST duos in hac parte numeros esse aduertendos: quorum alter simplex nuncupatur, alter vero mixtus dicitur. Nam eum numerum simplicem appellamus cui vnica est denominatio. Exempli gratia, numerus 1435 ducatorum dicitur simplex, cum solum vnam habeat denominationem, videlicet ducatorum: idem esset dicendum vbi scutorum, francorum, vel duodenorum diceretur. Eum vero numerum mixtum dicimus, cui plures partiales insunt denominationes, quemadmodum est numerus 1354 ducatorum cum 326 francis: aggregatum istorum duorum numerorum mixtus numerus nuncupatur, ex eo quòd in ipso plures sunt denominationes partiales: altera eius pars ducatorum dicitur, altera enim francorum appellatur. Est insuper vnum in hac parte potissime aduertendum, & est numeri mixti qualitas: hoc est an duarum sit denominationum, trium, aut plurium. In speciali autem multa sunt consyderanda: quæ inferius in conclusionibus videbuntur. ¶Modus insuper scribendi in hac parte, pariter & operandi, sequenti notabili declarabitur: quod in nouem conclusiones erit diuisum: in quarum qualibet, modus operandi alicuius speciei prius habitæ, significabitur.

In mixtorũ operationibus aduertenda.

Numerus Simplex. Mixtus.

SECVNDO NOTANDVM EST longe aliter in hac parte esse operandum, quàm in præhabitis diffinitis. Pro cuius clara intelligentia sit prima conclusio pro numeratione. ¶Si numerus mixtus sit solum duarum denominationum, eo pacto scribatur, vt eius pars minoris denominationis ante scribatur, altera vero pars, cuius denominatio est maior, retro locetur: capio ante & retro, vti in primo diffinito declaratum est. Si autem numerus mixtus trium, aut plurium sit denominationum (postquam æquales esse nequeunt) secundum ipsarum ascensus scribantur, sic ꝙ minimæ denominationis numerus primo loco scribatur, & maximæ denominationis numerus vltimo ponatur fine, mediarum vero denominationum numeri, secundum ipsorum qualitates locabuntur. Verbi gratia. Vis scribere mille ducatos, cum quindecim duodenis, illos taliter dispones, 1000 ducati, 15 duodeni. Si quingentos quadragintaquinq; ducatos, cum octo-

Prima cõclusio pro numeratione mixtorum.

decim duodenis,& nouem turonis scribere velles:est hoc modo faciundum,545 ducati.18,duodeni.9 turoni:& de ascendētibus pariter dicendum est.Si enim alicuius mixti numeri valorem exprimere velles,ab illa parte incipere debes cuius denominatio est maior,versus numeros minoris denominationis procedendo.In his facile est exemplū assignare.

Secunda conclusio pro additione.

¶Secunda conclusio pro additione.Si numeros mixtos vis addere,illos eodem modo disponas,vt maioris denominationis numerus loco supremo ponatur (quāuis non sit necessarium) deinde cæteri supponantur,sic quòd in aliquibus communicēt denominationibus, illis limites siue loca respondeant eadem, secundum ipsorum exigentiam: & incipias operari à minoribus versus maiores eundo numeros. Verbi gratia.vis cognoscere summā quæ ex his numeris mixtis emergit, scilicet 945 scuta, 412 franci,356 duodeni,& 687 scuta,403 franci,730 duodeni,& 430 scuta, 700 franci,532 duodeni/illos numeros tali ordine locabis,sub quibus directa protēdatur linea:vt præsens figura ostendit.

9 4 5	scuta.	4 1 2	franci.	3 5 6	duodeni.
6 8 7	scuta.	4 0 3	franci.	7 3 0	duodeni.
4 3 0	scuta.	7 0 0	franci.	5 3 2	duodeni.

Nempe duplici modo potest datorum numerorum summa haberi:vno modo per reductionem ipsorum ad scuta:alio modo per reductionem partialium numerorū eiusdem denominationis.Si autem primo modo illorum summam assignari quæras:id facies iuuamine septimi diffiniti, in quo de reductione sufficienter declaratum est: & pro eorum summa habebis 2973 scuta,1 francum,13 duodenos. Si autem secundo modo summam quæras dari, reperies 2062 scuta, 1515 francos, 1618 duodenos. Pones igitur sub linea summam in ordine, sic vt duodeni sub duodenis, franci sub francis,scuta sub scutis ponantur,limitibus correspondentibus: & operationem completam habebis.

Tertia cōclusio pro subtractione.

¶Tertia conclusio pro subtractione.Triplici contingit differentia subtractionem in mixtis numeris reperiri. Primo modo,si à simplici numero mixtus subtrahatur numerus: vt si à 1543 scutis, subtrahere velles 978 scuta,126 francos,18 duodenos.Secūdo modo,si à numero mixto,simplicem subtrahas numerum: vt si à 4530 scutis,9210 francis,15 duodenis,subtrahantur 5608 scuta. Tertio modo, si à mixto mixtus subtrahatur numerus:vt si à 3456 scutis,8234 francis,17 duodenis, subtrahantur 936 scuta, 89300 franci, 19 duodeni. In qualibet harum differentiarum opus est reductione.Si vis in primo exemplo operari,dispone numeros quemadmodum præsens figura ostendit.

	1 5 4 3	scuta.	Numerus à quo habet fieri subtractio.			
Subtrahendus	9 7 8	scuta.	1 2 6	franci.	1 8	duodeni.

Deinde vterque numerus tam simplex,quàm mixtus ad duodenos reducatur:quo facto,proueniens duodenorum summa numeri subtrahendi , subtrahatur à prouenienti duodenorū summa,quæ ex numero à quo habet fieri subtractio,resultat:& completam operationē habebis. Et si velles scire quot supersunt scuta:residuum duodenorum per 35 diuide (postquam scutum 35 valet duodenis) & numerus quotiens, remanentium scutorum numerum propalabit. Eodem modo operandum est in secunda subtractionis differentia, pariter & in tertia:nec opus est maiori vti discursu pro his omnibus cognoscendis.

Quarta conclusio pro multiplicatione.

¶Quarta cōclusio pro multiplicatione.In mixtis,triplici differentia cōtingit multiplicationem fieri.Primo contingit numerum multiplicandum esse simplicem, multiplicanti existente numero mixto: vt si per 4567 scuta, 5678 franci, 19 duodeni, & 11 turoni multiplicentur.Secūdo modo euenit per numerum mixtū,simplicem multiplicari: vt si per 5678 scuta, 3459 francos,7 duodenos, 4987 scuta multiplicentur. Tertio modo accidit vt, per mixtū mixtus multiplicetur numerus:vt si per 7894 scuta, 6789 francos, 13 duodenos,5679 scuta, 9875 franci, 16 duodeni multiplicentur. In quolibet istorum exemplorum vtendum est reductione. ¶Si circa primum istorum velles operari:oportet tam numerum multiplicandum,quàm multiplicantem ad minimæ denominationis numerū,videlicet ad duodenos reduci:deinde per maiorē numerū,minor multiplicetur:& facta multiplicatione, si cognoscere velles quot proueniunt scuta,illam duodenorum prouenientem summam per 35 diuides,& numerus quotiēs

illud significabit. Eodem modo in secūda multiplicationis differentia procedendū est, pariter & in tertia. Exēpla perinde sunt clara, vt non sit opus longius euagari. ¶Quinta conclusio pro diuisione. Duplex in diuisione reducendi modus habetur. Quorū prior est reductorius, & hoc modo fieri habet. In primis numerus diuidendus ad minorē eius denominationē reducatur: deinde per diuisorem, productus numerus diuidatur. ¶Nam pro documēto tenendum est, nullum numerum mixtum posse esse diuisorem, sed duntaxat simplicem: diuidendus tamen numerus pōtest bene mixtus esse numerus. Vnde satis conuenienter hic numerus videlicet 3456 scuta, 4567 franci, 17 duodeni, inter 13 homines distribui, seu diuidi potest: quod facies facillime, si prius totum numerum ad duodenos reducas, & inde summa proueniens per diuisorem iam dictum diuidatur, scilicet per 13. Et si deinde velles cognoscere quot scuta quilibet illorum hominum pro sua parte habebit, numerum quotientem per 35 diuides: qua peracta diuisione, quotiens numerus, quod cognoscere petebas, ostendet. Posterior diuidendi modus est sine reductione, & hoc diuidendo quemlibet numerum determinatæ denominationis per diuisorem: quod facile est facere in præassumpto exemplo. ¶Sexta cōclusio pro progressione. In vtraque progressione videlicet arithmetica, & geometrica cum numeris mixtis possumus eo pacto procedere, ac in præcedentibus, cum simplicibus operatū est: & pro hac parte non est opus nouis vti regulis, & documentis: postquam ex prius habitis omnia saluare possumus. Veniunt autem proportionabiles numeri eo ordine scribendi, ac præsentes formulæ indicant.

Quīta cōclusio pro diuisione

Sexta cōclusio pro progressione.

Prima formula.		Secunda formula.	
8	4	8	27
6 scuta.	3 franci.	4 scuta.	9 franci.
4	2	2	3
2	1	1	1

In prima istarum arithmetica procedimus medietate: in secunda geometricam medietatē notificamus. In arithmetica progressione huius primæ formulæ, duplicem discursum facies: primus erit francorum, secundus scutorū. quibus factis, secundum primam regulam sexti diffiniti, summę prouenientes, vnum mixtum numerum component qui talis erit, videlicet 20 scuta, 10 franci. Consimili modo operaberis in secundo exemplo, prout secūda regula sexti diffiniti docet, duas geometricas progressiones faciēdo, quarum summæ simul acceptæ componunt numerū, videlicet 15 scuta, 40 franci, isto modo in cæteris progressionibus, quas mixtas appellamus, procedamus. ¶Septima conclusio pro reductione. In reductione mixtorum numerorum, diffinito septimo sufficienter admodū est declaratum: ideo non opus est impræsentiarū iterum quæ acta sunt reiterare. Ad alia igitur sine mora est pertranseundū. ¶Octaua conclusio, pro radicum in quadratis extractione. Est autem aduertendum in quadrata radicum extractione duplicem in mixtis operandi modum inueniri. Alter est reductorius, qui eo habet fieri modo, ac in quinta conclusione dictum est: ita videlicet ꝙ si mixtus proponatur numerus, cuius radicem inuenire quæris, ad eius minimam reducendus est denominationem: ita vt si turonorū infima sit denominatio, ad turonos reducatur: deinde in turonorū summa, radix quadrata inueniatur, vel saltem radix maximæ turonorum partis in qua inueniri potest: qua inuenta, operatio facta manebit. Alter est operandi modus in quadrata radicum extractione, qui nullā præsupponit reductionem, sed immediate operatum est perinde ac in simplicibus fiebat numeris, & est talis. Dato numero mixto: videbis an duarum, triúmve sit denominationum: deinde à maiore incipiendo denominatione, in eadem radicem inuenias quadratam, quæ sit eiusdē denominationis, vel saltem maximæ illius partis: deinde consequenter ad cæteras ibis denominationes ad vltimam vsque inclusiue, id idem faciendo, & radicem mixtam procreabis, quam inter lineas parallelas debitis locis siue limitibus locabis. Verbi gratia. Huius numeri 441 scuta, 1024 franci, 16 duodeni, radix reperiatur mixta: quæ ex tribus simplicibus componatur numeris, postquam tres in numero mixto reperiūtur denominationes: & inuenies radicem esse 21 scuta, 32 franci, 4 duodeni. & sub tali dispositione operatio manebit.

Septima conclusio pro reductione.

Octaua conclusio pro radicū in quadratis extractione

✱	✱	x	ſcuta	x	✱ ≠ ✱		franci	x	✱	duodeni
2	1		ſcuta		3	2	franci	4		duodeni
4					6					

Nona cõcluſio pro radicũ ex tractione in cubis.

¶Nona concluſio pro radicũ in cubis extractione. Si in mixtis numeris cubam velles extrahere radicẽ, id duplici via fieri poteſt, queadmodum in præcedenti concluſione dictum eſt. Primo numerum mixtum ad minorem eius denominationem reducendo: deinde ipſo reducto numero, operando ac in ſimplicibus dictũ eſt: ſecundo ſine mixti numeri reductione poteſt cubica radix haberi: ita vt videlicet tot partiales radices extrahantur quot in mixto numero exiſtunt denominationes, ſiue ſimplices numeri: & hoc dummodo numeri ſint capaces: & illud facies modo aſſignato in præcedenti concluſione: & vt pręſens demonſtrat figura.

x ✱ ✱ x	ſcuta	x	✱ ≠ ✱ x		franci	✱	duodeni.
1	1	ſcuta	2	1	franci	2	duodeni.
3			6				

Mixtorũ operationum probationes.

TERTIO NOTANDVM EST in numeris mixtis eaſdem inueniri probationes, quę in ſimplicibus numeris habebãtur. Additio enim in mixtis per 9, per 7, & per ſubtractionẽ probari poteſt: queadmodum ſubtractio per 9, per 7, & per additionem fieri habet: & de alijs ſpeciebus eſt pari modo dicendum. Qua de re in aſſignandis cuiuſlibet ſpeciei peculiaribus probationibus, diutius eſſe immorandum, minus vtile reputamus. Hæc igitur de primo huius libri tractatu dicta ſufficiant.

PRIMI PRACTICAE TRACTATVS FINIS.

DE NVMERIS INTEGRIS SECVNDVM CALCVLOS SVPputatorios, tractatus ſecundus.

Iſidorus. Pollux. Plinius.

A Nummo numerus ſumpſit nomen, vt refert Iſidorus tertio etymologiarum libro. Nummus enim, pro tertia talenti parte computabatur, vt author eſt Pollux. loquor de nummo aureo: ſed Plinij authoritate, nummum drachmam eſſe, hoc eſt denarium, conſtat. Ex his igitur verbis facile comprehendi poteſt hãc ſupputatoriam artem altera eſſe priorem, quæ per characteras operari oſtendit. Et ſi poſteriorem illam faciamus, non inde venimus taxandi: quoniam (vt in fine prooemij, præhabiti tractatus enucleauimus) doctrinæ ordinẽ in præſenti libro inſequimur, pro ijs præſertim erudiendis ſcholaſticis, qui noſtræ artium facultati ſtudent. Eſt autem præſens tractatus, in quo de numeris tam ſimplicibus, q̃ mixtis per ſupputatorios nummos pertractare intendimus, vtilis admodum ijs omnibus, quibus characterũ cognitio deficit: vt ſunt plęriq; mercatores, trapezitæ, caupones, & alij quãplurimi paruæ conditionis viri. Erit igitur præſens tractatus in quinque ſolum diffinita diuiſus, in quibus modus operandi in quinq; arithmeticæ ſpeciebus ſecundum calculos ſignificabitur.

DIFFINITA.

1 ¶Numeratio ſupputatoria, eſt numeri per nummum, aut competentes nummos artificialis expreſſio. Numerare ſupputatorie, eſt numerum per nummum, vel nummos competentes declarare.

Numerationis ſupputatorię finis.

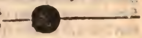
¶Finis numerationis, eſt quęcunq; numerum propoſitum nummis conuenientibus, ſiue locis proprijs locare, & quantus ſit, quærenti debite declarare. ¶Seruit hæc ſpecies ijs omnibus, qui eorum negligentia, vel ingenij tarditate literas ediſcere non potuerunt: quemadmodum multis hominum conditionibus contingit.

PRIMO NOTANDVM EST quãdam inter nummos supputatorios, & caracteras similitudinẽ reperiri: quemadmodũ enim character primo limine positus, dicitur vnitas, & si secundo limite ponatur, dena: tertio cẽtena, & ita ascendendo: calculus autẽ prima domo positus in quintuplo valet magis q̃ ille qui prima ponitur linea, & in duplo minus illo qui secũda linea ponitur, videlicet 5. Eodem modo calculus secunda domo positus, in quintuplo valet magis illo qui secunda linea ponitur: & in duplo minus calculo tertiæ affixo lineæ, videlicet 50. & de ascendentibus dic consequenter. Vnde pro intelligẽtia nummorum, siue calculorum dispositione, aliquas lineas parallelas in latera opposita transeuntes protrahere oportet: quandoq; plures, quandoq; pauciores, secundum quòd numerus est magnus. Lineam inferiorem primam dicimus, secundam illam appellamus quæ statim ascendendo reperitur hoc pacto cõsequenter. Spaciũ autẽ inter duas primas lineas medians, prima domus appellatur: & id quod inter tertiã, & secũdã habetur, domus secũda dicitur: & sic de reliquis pari modo. Exempli gratia.

——————— Quarta linea.
Tertia domus.
——————— Tertia linea.
Secunda domus
——————— Secunda linea.
Prima domus.
——————— Prima linea.

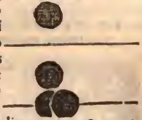
SECVNDO NOTANDVM EST tria in hac parte esse documẽta, quæ huic arti deseruiunt. ¶Primum est, super nullam lineã plures q̃ quatuor calculi ponãtur: & in nulla domo duo, aut plures calculi reperiantur: sed si calculus habeatur, tantum sit vnus: postq̃ in prima domo vnus calculus valet quinq;, eorum qui prima ponũtur linea, & vnus in secũda linea duobus videlicet in prima domo. & sic consequenter progrediendo. Frustra enĩ per plura fierẽt, quæ possent fieri per pauciora. ¶Secundũ documentũ est. Si quempiã numerum ponere velles, ab inferioribus incipias lineis, ad superiores procedendo: ecõuerso autem est faciendũ, si quẽ numerũ velles explicare. ¶Tertiũ documẽtum. Postq̃ in hac parte nullã habemus figurã, aut calculũ qui cifrę habeat virtutẽ, loco cifrę linea maneat absq; calculi positione. ¶Vt autẽ quę dicta sunt melius intelligere queas, ad prȩsens aduertas exemplũ. Vis enim scire qualiter 1357 ducati veniant disponendi: protractis quatuor lineis parallelis, supra primã duos calculos pone: & in prima domo vnum calculũ locabis: deinde in secunda domo vnum etiam calculum pones: & in tertia linea tres: postremo in quarta & vltima linea vnus calculus ponatur: & talẽ calculorum dispositionẽ habebis.

Primum documẽtum.

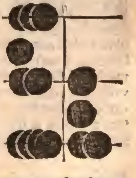


Secundũ documẽtum.

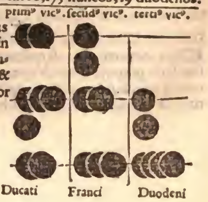
Tertium documentum.



TERTIO NOTANDVM EST sæpenumero vsu venire lineas parallelas in binas partes secari à linea ortogonaliter cadente, quandoque à duabus lineis, & quandoque à tribus, & ita ascendendo: & hoc ideo fit, quia multę, & varię sunt monetarum appellationes, multi pariter numeri mixti, qui ex diuersis denominationibus consurgunt. Si enim à te petatur qualiter per calculos hic numerus mixtus veniat disponendus, videlicet 374 ducati, 17 duodeni: protractis tribus lineis parallelis, à linea perpẽdiculariter cadente in duas æquas partes secentur, & in latere sinistro ducatorum numerus ponatur: in dextro vero duodenorum locetur numerus: vt præsens ostendit figura.



Si aũt ex te quęratur, disponas per calculos 237 ducatos, 173 francos, 19 duodenos: dispositis tribus lineis parallelis, duę ortogonaliter descendent etiã parallelæ, quæ alias tres, in tres tertias diuidant: quo facto, tres reperies ascendentes vicos, in quorum quolibet duę reperiuntur dom9: in primo ducatorum numerus ponatur, in secundo francorum, & in tertio duodenorum numerus locetur: vt præsens forma ostendit.



2 ¶Additio supputatoria, est vnitatum, vel numerorum in vnam summam facta per calculos collectio. Hinc addere supputatorie, est vnitates, vel numeros vnico colligere per calculos numero.

¶Finis additionis in hac parte, est per supputatorios calculos numeros expedite cõprehendere: qui diuersis primitus lineis concipiebantur. Seruit additio calcularis præ cęteris, trapezitis, mercatoribus, & cauponibus seu tabernarijs, & omnibus infimę cõditionis homninibus.

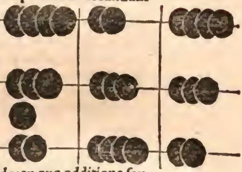
Duplex calcularis additio.

PRIMO NOTANDVM EST duplicẽ esse additionẽ supputatoriã: alteram simplicẽ, alterã vero mixtã. Simplicẽ eam dicimus: cuius omnes numeri, vnicã monetarũ speciem intercipiunt, vti esset illa quæ ex his duobus numeris resultaret, videlicet 235 ducatis, & 742 ducatis. Nã quoniã duo illi numeri sunt ducatorum, ideo facta ex ipsis additio simplex nominatur: idem etiam esset vbi quilibet illorũ esset francorũ, vel duodenorũ numerus. Mixtã vero additionẽ eã esse significamus, cuius numerus, vel numeri diuersas monetarũ species cõtinent: & illa adhuc est multiplex, secundum quod monetarũ multiplex est vsus. Quædã est duplata: quædã triplata: & ita ascendendo. Duplatã additionẽ eã vocamus, cuius numerus, vel numeri duas monetarũ cõtinẽt species. Triplatã autẽ, cuius numerus, vel numeri tres diuersarũ monetarũ cõtinẽt species: & de alijs ascendẽtibus pari modo est dicendũ. dare in his exẽplũ, est facillimũ.

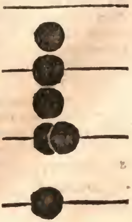
Addendi per calculos mod⁹

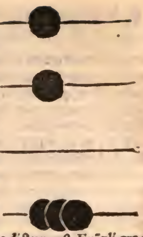
SECVNDO NOTANDO EST in additione calculari tam simplici q̃ mixta, operationẽ incipiendã esse ab infimis lineis, & domibus versus superiores eũdo. Cõsyderabis igitur an tã numerus cui additio fieri debet q̃ numeri addendi sint simplices, vel mixti. Si simplices extiterint, isto modo operaberis: in primis disponãtur lineæ parallelæ (vt declaratũ est diffinito præcedẽti) & ponatur numerus cui additio habet fieri in lineis, & domibus secundũ eius exigentiã: deinde primũ addendorũ numerorum addas, & ab inferioribus lineis incipiendo versus superiores ibis: postmodũ secundum numerum addendum (si quis talis fuerit) addas resultanti ex prima additione numero: & de cęteris (si fuerint) numeris eodem modo facere licet. quo facto, ea erit omniũ numerorũ summa, quæ in operationis fine manebit. Obseruabis tamen inter operandũ tria illa documenta, quæ in prębabito diffinito posita fuerũt. Declarãtur ista omnia familiari exẽplo. Sit numerus cui additio habet fieri 437 ducati: primus numerus addendus, 234: secundus autẽ numerus sit 432 ducati: disponatur numerus cui additio fieri habet vt pręsens figura ostẽdit.

Operationis exemplum.



Deinde primũ numerũ addendũ eo modo adijcias: in primis quatuor vnitates duabus in prima linea existẽtibus addẽdo: ex qua additione sex proueniẽt vnitates. Sed cũ dictũ sit primo documẽto præcedẽtis diffiniti nõ posse plures calculos reperiri supra lineã q̃ quatuor: ideo ab illis sex vnitatib⁹, vel calculis, quinq; remoueas, solo vno calculo manente supra primam lineam, & loco illorũ quinq; ablatorũ, vnũ in prima domo locabis: in qua valet quinq;: sed quoniã in eadẽ prima domo vnus calculus reperitur, & per primũ documentũ esse nõ possunt plures, q̃ duo: ideo illo ablato, pro secũda linea vnus calculus seruetur, qui ibidẽ dena dicitur: copuletur igitur idẽ calculus tribus denis numeri addẽdi, & inde quatuor denæ cõsurgent, quæ tribus calculis in secũda linea existentibus addantur, & prouenient septẽ, à quibus quinque semoueas, loco quorum in secunda domo vnus calculus ponatur. Deinde duæ denæ numeri addendi per duos calculos addãtur quatuor suprapositis calculis, & proueniet calculorum numerus 6. depone igitur quinq;, quorum loco vnus calculus (supposita vna linea parallela) in tertia domo ponatur: quo peracto, talis resultabit summa atque calculorum dipositio.





Deinde ſecundum numerum addendum illi producto nume-
ro addas, procedēdo eo modo iā declarato, & pro ſumma om
nium illorū triū numerorū, 1103 ducatos habebis: & ſub tali cō
poſitione illorum ſumma per ſupputatorios calculos appare
bit. Patet igitur operādi modus in numeris ſimplicibus. ℂSi
autē in mixtis numeris velles operari, debes primo eorū qua
litates cōſyderare, hoc eſt an duarū pluriúmve ſint denomina
tionū: ſi ſolum ſint duarum, per duos vicos operaberis, factis
lineis in domibus conuenientibus: ſi trium, per tres, & de alijs
huiuſmodi eſt pari modo dicendum. ℂPotes igitur duplici
via mixtos addere numeros: primo modo per reductionē eo-
rum ad infimam eorū denominationē, ita videlicet vt omnes
numeri mixti addendi reducantur ad turonos (ſi infima eorū
denominatio ſit turonorum) deinde eiſdem reductis, numeri
prouenientes addētur, & poſtq̄ erunt ſimplices, debent addi ac dictum eſt. Exēpli gra-
tia. Sint dati mixti numeri 1234 ducati, 345 frāci, 19 duodeni. & 2345 ducati, 589 fran-
ci, 17 duodeni: ſi ipſos vis addere, prius quemlibet ipſorum ad duodenos reducas: de-
inde numeros prouenientes addas: & proueniens numerus, erit ſumma datorum nu-
merorum. Et ſi vis cognoſcere quot ducatos habeas in illa ſumma, aut quot francos:
vtendum eſt diuiſione, vti vltimo diffinito præcedentis tractatus viſum eſt. Sed quo-
niam in hac parte non eſt adhuc datus modus diuidendi, nec multiplicandi, qui requi
runtur pro reductionibus faciundis: ideo ad alium operandi modum eſt pertranſeun-
dum. ℂSecundo modo, & clariori poteris illos duos numeros addere ſic, vt diſpoſitis
vicis tribus, cum cōpetentibus lineis, & domibus: numerus cui additio fieri debet, pri-
mo ponatur ſecundum q̄ primo diffinito declaratum eſt: deinde ducatis ducati addā
tur, & francis franci, & duodenis duodeni: ſic q̄ tres partiales additiones compones:
quo facto, ſummam numerorum procreatam reperies. ℂPoteſt inſuper alius operādi
modus aſſignari in mixtis numeris, qui talis eſt. Diſpoſito numero cui additio fieri de-
bet per ſuas domos, & lineas: cæteri numeri mixti eo veniunt addendi modo, vt à mi-
noribus incipiendum ſit, verſus maiores procedendo numeros, & ſimul cum additio-
ne reductionem facies, quemadmodum præſens exemplum indicat. Sit numerus cui
additio habet fieri, 323 franci, 19 duodeni, 19 turoni: numerus addendus ſit 234 franci,
15 duodeni, 7 turoni. diſpoſito igitur per calculos numero cui additio fieri habet ſecū-
dum eius conditionem, incipias additionem facere à turonorum vico, ſic q̄ ſeptē tu-
roni numeri addendi addantur illis 19 turonis numeri cui additio fieri habet, & proue-
nient 26 turoni: poſitis igitur duobus turonis ſupra primam lineam eiuſdem vici, ali-
os 24 pro duobus computabis duodenis, qui ſimul cum duodenis numeri addendi
(ſcilicet 15) addantur duodenis ſecundo vico exiſtentibus: ex qua additione 19 emana
bunt duodeni: relictis igitur in illo duodenorum vico 16 duodenis, 20 alij componen-
tes francū, loco vnitatis cum cæteris francis numeri addendi computentur, qui ſecun-
dum aſſignatum modum francis ſecundi vici addantur: & creabitur numerus 558 frā-
corum. iſto igitur diſcurſu peracto, reperies pro illorum duorum prius aſſignatorum
numerorum ſumma, 558 frācos, 16 duodenos, 2 turonos. Vbi autem multos eſſe ad-
dendos numeros contingat, eſt conſimili proceſſu operandum.

Mixtorū additio p calculos.

Operationis exemplum.

TERTIO NOTANDVM EST ſupputatoriam additionem probādam eſſe
per ſubtractionem, ita ſcilicet vt prouenienti ſummæ addendi numeri ſubtrahantur: &
ſi manens numerus fuerit æqualis numero cui additio fieri habet, operatio integra di-
cetur: occurrente autem oppoſito, additionis diſcurſus inefficax & nullus reputabitur.
Hæc probandi via pro hac ſupputatoria ſpecie ſufficit: ideo probationum copiam mi
nus bene nobis viſum eſt impræſentiarum eſſe adducendam.

ℂSubtractio ſupputatoria, eſt debita minoris, aut æqualis numeri, ab 3
æquali, vel maiori calcularis ablatio. Inde ſequitur ſubtrahere ſuppu-

tatorie, esse minorem, aut æqualem numerum ab æquali vel maiori calculatorie auferre

Subtractionis supputatorię finis.

¶Finis huius speciei, est propositis duobus numeris, alterū ab altero auferre: residuū (si esse contingat) per calculos ostendendo. ¶Seruit hæc species ijs omnibus quibus & pręcedens diffinitum seruiebat.

Duplex subtractio calculatoria.

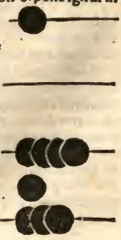
PRIMO NOTANDVM EST duplicem esse subtractionem supputatoriam: alteram simplicem, alteram vero mixtā. Mixta etiam subtractio multiplex est, secundū ꝙ in ipsa multiplices numerorum denominationes ponuntur, vt primo notabili præsentis diffiniti visum est. Sūt igitur in hac specie consyderāda, numerus à quo fieri habet subtractio: numerus subtrahendus: & numerus relictus, qui in fine operationis domibus ac lineis decentibus secundum supputatorios calculos dispositus appareat.

Modus subtrahēdi per calculos.

SECVNDO NOTANDVM EST in vtraq; calculari subtractione operandi modum inchoandum esse ab infimis lineis, & domibus ad superiores progrediendo: & in primis consyderare oportet an numerus à quo habet fieri subtractio sit simplex aut mixtus, pariter & numerus subtrahendus, vel quilibet illorum mixtus reperiatur, aut eo habeatur modo, vt alter simplex, alter vero mixtus inueniatur. Si enim primū detur, eo pacto operaberis: disposito prius numero à quo subtractio fieri habet, secūdum quod permittit, vnitatē ab vnitate subtrahe, denam à dena, & à cētena centenā, vniformiter ascendendo: ꝙ si euenerit subtrahendi numeri vnitatē ab vnitate numeri, à quo fieri debet subtractio, subtrahi nō posse, habebis accōmodato à numero subtrahendo vnum calculum, qui dena nuncupatur: idem faciūdum est, si subtrahendi dena à locati numeri dena subtrahi nō posset, ita vt mutuādus seu accōmodandus sit calculus à tertia, vel à quarta linea (si nullum in tertia esse contingat) & sic consequēter. potest etiā quādoq; calculus in domo repostus, qui quinq; valet, in inferioris lineæ calculis inferioribus accommodari.

Operationis exemplum.

Exempli gratia sit numerus à quo habet fieri subtractio 3582, qui eo modo disponatur ac pręsens forma indicat. Numerus autem subtrahēdus sit 2534, à digitis autem inferioris lineæ, videlicet à duabus illis vnitatibus per duos calculos signatis, digitus subtrahēdi numeri (qui est 4) subtrahi non potest: ideo à secunda linea, in qua tres calculi locantur, vnum pro prima linea accommodato habebis calculum, qui decem in ipsa vnitatibus valebit: & ita 12 numerum complent calculi existentes in prima linea, & calculus accommodatus, qui virtualiter decem valet vnitatibus: subtrahe igitur 4 ab illo duodenario numero, & manebit 8. pone igitur in prima linea vnum calculum qui cum duobus existentibus 3 efficiat numerum, & prima domo vnum etiam calculum locabis: deinde calculis manentibus in secunda linea (qui duo sunt) tres denæ subtrahendi numeri subtrahi non possunt: ideo calculus secundæ domus sit accommodus secundæ lineæ calculis, cum quibus 7 numerum componit, à quo 3 optime potest subtrahi, 4 in eadem secunda linea remanenti: hoc igitur facto, subtrahe à 5 centenarum tertia domo existenti, 5 numeri subtrahendi, quod facies per solam calculi ablationem: postremo autem à tribus calculis tribus millenis valentibus in quarta linea, duos subtrahe calculos, siue duas millenas (quod idem est) & vnicus manebit in quarta linea calculus: hoc igitur terminato, operationis finem sub sequenti dispositione reperies. Et eodem modo in alijs numeris simplicibus operandum. ¶Si autem vterque numerus mixtus fuerit, vel alter so-



lum mixtus extiterit, altero simplici existēte, anteq̄ subtractio fiat, numeri tales reducantur ad eorundem infimā denominationem: deinde subtractio fiat. Nec opus est, vt in præsentiarū longior fiat processus pro reductionis declaratione: quoniam intellectis duobus sequentibus diffinitis, & ijs quæ in priori tractatu dicta sunt, facile constat reductio. Iste modus subtrahendi in mixtis videtur mihi clarior quouis alio subtrahendi modo. Notum est enim, si numerus à quo subtractio fieri debet, esset iste, 987 ducati, 654 franci, 527 turoni. id melius fieri non posset, q̄ ꝙ primum vterq; numerorū ad turonos reducatur, vel ad aliquam aliam summam: ideo opus est tam in hac supputatoria arte, q̄ in præcedenti (quæ per characteras docet operari) quemlibet arithmeticum promptissimū esse in reducendo: imò maxime requiritur reductorius modus pro quolibet huius libri tractatu intelligendo: quoniam (vt videre potes) impossibile videtur quartum tractatum, in quo fractiones declarātur perfecte intelligi, si reducēdi modus obliuioni detur: quapropter inter arithmeticæ species nō indigne venit numerandus.

TERTIO NOTANDVM EST hāc subtractionis speciē esse probādam per additionem, eo modo vt numerus subtrahendus, & numerus ex subtractione manens simul addantur: & si cōsurgens numerus ex tali additione fuerit æqualis numero à quo subtractio debet fieri, operatio firma erit: aliter si accidat, infirma & cassa dicetur. *Probatio subtractionis.*

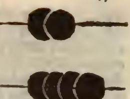
¶Multiplicatio supputatoria, est numeri calcularis procreatio ad multiplicandum proportionabiliter se habentis, ac ad vnitatem multiplicans numerus se habet. Hinc facile constat, ꝙ supputatorie multiplicare, est numerum per calculos procreare, qui ad multiplicandum numerum eadem proportione se habeat, qua ad vnitatem multiplicans numerus se habet. 4

¶Finis huius speciei, est per calculos summam prompte assignare, quæ vnius numeri multiplicatione per alterum procreatur. ¶Seruit autē hæc species supputatoria mercatoribus & mundanis hominibus, & sæpenumero astrologis, vbi accidit eos nec papirum, nec calamos in promptu habere. *Multiplicationis supputatoriæ finis.*

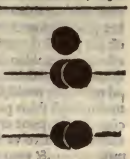
PRIMO NOTANDVM EST duplicem in hac parte multiplicationem inueniri, perinde ac in prehabitis diffinitis declaratum est, scilicet simplicem, & mixtam: de quibus in præsentiarum pertractare intendimus, & primo de simplici. Pro cuius intellectu, aduerte nullam esse difficultatem in supputatoria multiplicatione vnius digiti per alterū: etiam grandis non est difficultas per aliquem digitum numerum, articulum vel compositum multiplicare. Difficultas igitur in hac specie solū consistit in multiplicatione articuli, seu compositi numeri, per articulum, vel compositum. Vt tamen locupletius supputatoriam intelligere valeas multiplicationem: primo docebimus per digitum numerum, articulum seu compositum multiplicare: deinde articulum & compositum, per articulum & compositum calculatorie multiplicabimus.

SECVNDO NOTANDVM EST pro huius diffiniti clara intelligētia, digitū articulū, & compositū numerū disponendū esse per calculos, lineis, & domibus decētibus (vt dictum est diffinito primo) & ipsis dispositis, incipiendum est operari ab infimis lineis, atq; domibus versus superiores eundo: & si contingat in prima linea calculum, aut calculos inueniri, simul & in prima domo: numerus ille digitus (qui multiplicans appellatur) multiplicet totum numerū, scilicet primæ lineæ, & primæ domus, & numerus ex multiplicatione proueniēs, si articulus fuerit, in mente seruetur, qui secūdum eius decimæ partis denominationem numero prouenienti ex secunda multiplicatione addetur: si autem talis numerus cōpositus fuerit, eius digitus addatur digito numeri multiplicandi, articulo in mente seruato pro secunda operatione. Si vero euenerit nullum prima domo calculū reperiri (aliquo prima linea reperto) illū multiplicabis per multiplicantē numerum qui digitus est: ex cuius multiplicatione si digitus numerus cōsurgat, venit locādus seu addendus numero multiplicādo secundū quod exigit: si autē articulus fuerit, seruādus est in mente pro secūda operatione: ꝙ si cōpositus cō- *Multiplicandi per calculos ars.*

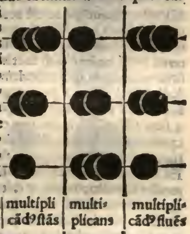
surgat numerus, eius digitus locetur secūdum quòd permittit, articulo in mente seruato. quo facto, ad secundam operationē ibis: eodem modo operādo. Istud exemplo facili declaratur. Sit numerus multiplicandus 24, & multiplicans sit 3. numerum igitur multiplicantē (postquam digitus est) in mente tenebis: multiplicandum vero numerum in proprijs lineis pone, secundum quod præsens forma ostendit.



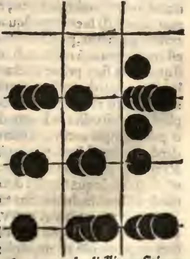
¶Deinde numerū 4 positū in prima linea per multiplicantē numerū, videlicet 3 (quē in mente conseruas) multiplicabis, dicendo ter 4 componunt 12. tolle igitur à prima linea duos calculos, sic quòd nō plures in illa maneāt q̄ duo, & articulū in mēte seruabis pro secūda operatione, qui secūdum eius decimæ partis denominationē (quę vnitas est) calculis secūdæ lineæ addatur: multiplica igitur pro secunda operatione, binariū calculorū positū in secūda linea per 3, dicēdo ter 2 faciūt 6. huic numero addēdus est nūerus in mēte seruatus, & proueniet 7, qui eo modo venit locandus, vt duo calculi dūtaxat supra secūdā lineā reperiātur, & vnus secūda domo ponetur, & in fine talē reperies operationē.



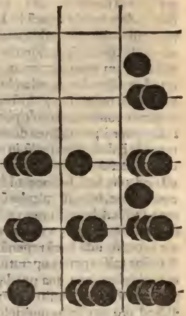
¶Patet igitur operādi modus in multiplicatione, qua per digitū compositus numerus multiplicatur: pari processu procedendū est in multiplicatione, qua per digitum numerus articulus multiplicatur. ¶Sed pro intellectu multiplicationis supputatoriæ, cuius tā numerus multiplicādus q̄ multiplicans sunt compositi numeri, est aduertendū numeros illos eo pacto esse disponēdos: dispositis lineis parallelis secundum numerorum quantitatē, à duabus ortogonaliter cadētibus lineis etiā parallelis cæterę diuidantur, sic q̄ ex tali linearū sectione, tres proueniant vici, in quorū primo multiplicādus numerus (qui stās appellatur) locabitur: in secūdo & medio, multiplicans numerus ponetur: in tertio & vltimo, multiplicādus numerus (quem immanentē appellamus) cubiculū suum habebit. ¶Hæc ōnia vt clarius intelligere valeas, claro tibi aperiūtur operatiōis exēplo. Sit numerus multiplicādus 321. multiplicās 123. illos sub tali dispositiōe locabis.



Et incipies operari multiplicādo omnes numeros multiplicādi fluentis per omnes multiplicātis numeros, ita vt per vnitates multiplicantis primum multiplicentur. deinde per denas, & consequēter sic eūdo, quod facies hoc modo. ter 1, sunt 3. ponantur igitur in prima linea multiplicādi fluētis duo calculi, qui cū existēti tres vnitates componunt: deinde dic, ter 2, componunt 6. auferatur igitur à secunda linea multiplicandi fluentis vnus calculus altero manente, & ponatur in domo secunda: deinde multiplicabis centenas, dicendo ter 3, cōponunt 9. ponatur igitur cum illis tribus adhuc vnus calculus in tertia illa linea, & vltrà vnū ī tertia domo locabis: & facta prima multiplicatiōe, sub tali forma operatio apparebit.



¶Deinde ad secūdā procedes multiplicationē, multiplicādo omnes numeros multiplicādi stantis, per secūdū multiplicātis numerū, videlicet 2, sic dicendo, bis 1, sunt 2. pones igitur duos calculos in secunda linea multiplicandi fluentis, in qua vnus reperitur calculus, & sic in illa, 3 remanebunt calculi: & hoc est summe aduertendum, q̄ calculi illic positi non adduntur calculis primæ lineæ, sed duntaxat secundæ, & hoc ideo est, quia per calcu-

los secundæ lineæ multiplicantis, stans multiplicandus multiplicatur. Deinde ducas multiplicãtis numerum secundum in secundũ multiplicandi stantis numerũ, dicendo bis 2, faciunt 4. hos igitur quatuor calculos in ascendẽti linea fluẽtis multiplicãdi videlicet tertia, locabis. Sed quoniã in illa etiã quatuor reperiũtur, & per documẽtũ primũ primi diffiniti, plures q̃ quatuor calculi esse nequeunt in aliqua linea: ideo illorũ octo calculorũ, quinq; auferãtur, solis tribus manẽtibus, & loco ablatorũ vnus calculus in domo tertia debet poni. Sed quia in eadem vnus calculus reperitur, & cũ per primũ documentũ in nulla domo duos calculos esse contingit: ideo ratione amborũ calculorum vnus in quarta lineã sedebit, nulla tertia domo manente: deinde ad tertiã ibis multiplicationẽ, & multiplicabis centenas multiplicãdi stãtis per denas multiplicãtis, dicẽdo bis 3, cõponunt 6, pone ergo sex calculos in fluenti multiplicando, eo pacto vt vnus ponatur in quarta linea cum prius posito, & vnus in domo quarta ascẽdenti locetur: qui (vt primo diffinito dictum est) quinque calculorum lineæ immediate inferioris valorem continet: quo peracto, talem calculorum compositionem habebis.

❡Postremo autẽ ad tertiã accedas multiplicationẽ, qua per vnum calculũ multiplicãtis tertia linea repositũ, oẽs multiplicãdi stãtis calculos vicissim multiplicabis: incipias igitur, dicẽdo semel 1, est 1, pones ideo vnũ calculũ supra tertiã lineã multiplicãdi fluẽtis, in qua tres inueniuntur, & sic quatuor in ipsa erũt: deinde ascẽde multiplicando, & dic semel 2, sunt 2. pone ergo duos calculos in quarta linea, & ad vltimã ibis multiplicationem: dicendo semel 3, sunt 3. Ponãtur igitur tres calculi supra quintã multiplicandi fluentis lineam: & totalem supputatoriam operationem sub tali nummorum fabricatione reperies.

Ex his quæ declarata sunt, sufficienter patet operandi modus in multiplicatione calculatoria secundum simplices numeros. ❡Pro mixtorum numerorum supputatoria multiplicatione, id solum teneas documẽtum. Nunq̃ numeri mixti multiplicentur, nisi prius ad simplices numeros reducti fuerint: postquam vero ad simplices reducentur numeros, poteris eosdẽ multiplicare. Nec opus est impræsentiarũ reducendi modum assignare: quoniã si quæ dicta sunt primo tractatu recte intelligantur, facile talis reducẽdi modus poterit inueniri. Vnde si hũc numerũ mixtũ videlicet, 123 frãcos, 234 duodenos ad simplicẽ numerũ velles reducere: debes pro multiplicãdo nũero, numerũ francorũ capere, & pro multiplicanti viciũ numerũ quot frãcus duodenos continet: & cũ vigesies duodenũ cõtineat frãcus, pro multiplicãti, 20 sumes: & operaberis modo prius assignato, & reperies pro sũma 2460 duodenos: & si cognoscere velles quot faciũt frãcos, opus est diuisiõe, de qua sequẽti diffinito dicẽr. Et quis ali⁹ posset i mixtorũ multiplicatiõe mod⁹ assignari: nihilominus tamẽ visũ est nobis hũc iã assignatũ ꝑ hac ꝑte sufficere.

Multiplicationis ꝓbatio.

TERTIO NOTANDVM EST supputatoriã multiplicationẽ probandã esse per diuisionẽ, eo modo quo dictũ est quarto diffinito præcedentis tractatus: ita videlicet ꝙ proueniẽs ex multiplicatione summa per multiplicantẽ numerũ diuidatur, & si in tali diuisione quotiẽs numerus fuerit ęqualis multiplicãdo, bene valebit calcularis multiplicatio: si vero aliter cõtingat, oportet iterum de nouo operationẽ incipere.

5 ¶Diuisio supputatoria, est numeri per calculos inuentio, qui ad vnitatem in eadem se habet proportione, qua ad diuisorem diuidēdus numerus se habet. Constat ex diffinitione quòd supputatorie diuidere, nihil aliud est, quàm numerum per proiectiles calculos procreare, qui ad vnitatem æque proportionabiliter se habeat, ac diuidendus numerus ad diuisorem.

Diuisiōis supputatoriæ finis.

¶Finis huius speciei, est expedite numerum quotientem per calculos supputatorios inuenire, qui ex diuisione numeri diuidendi per diuisorem potest procreari. ¶Seruit hæc species in primis argentarijs, trapezitis, atq; mercatoribus, & ijs omnibus quibus & præhabitæ deseruiebant.

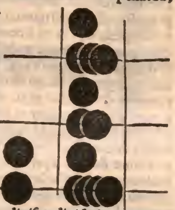
PRIMO NOTANDVM EST supputatoriam diuisionē duplicem esse, simplicem videlicet, & mixtam, vti de multiplicatione declaratū est. Tractabimus in primis de simplici: deinde transeunter aliquid de mixta dicemus.

Diuidēdi mod' per calculos.

SECVNDO NOTANDVM EST in supputatoria diuisione incipiēdum esse operari à superioribus lineis, & domibus versus inferiores descendendo. Et quoniam (vt 5 diffinito prę̄habiti tractatus diximus) longe difficilius in diuisione est operandū, vbi pro diuisore capitur numerus duorum, aut plurium elementorū significatiuorū, q̄ vbi vnica reperitur significatiua figura, siue per se, siue cifris aut cifra adiūcta: ideo vt plenius hæc species intelligatur, primo operandi viā aperiemus, vbi solum digitus pro diuisore accipietur: deinde ad alteram partem accedemus.

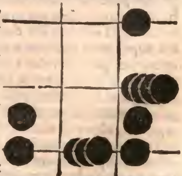
Operationis exemplum.

¶Pro primi igitur expeditione, est aduertendum tres vicos pro quauis diuisione constituendos esse: in quorum primo, diuisor numerus ponatur: in secūdo numerus diuidēdus: in tertio quotiēs numerus apparebit. Exempli gratia. Sit numerus diuidendus 879. diuisor sit 6. illos numeros (vt pręsens forma indicat) locabis. Et operaberis eo pacto: primo videbis quoties diuisor in suprema linea, & domo calculis occupata reperiatur, & inuenies esse tantum semel.

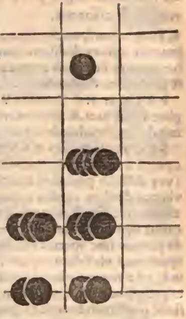


diuisor. diuidēdus. quotiēs.

6 enim (qui diuisor appellatur) in suprapositio 8 tantū semel reperitur: ideo ponēdus est vnus calculus supra tertiam lineam vltimi vici: multiplicabis igitur diuisorē per numerū vicium: videlicet per vnitatem, & idem diuisor scilicet 6, proueniet, qui subtrahendus est à supremo numero, videlicet ab 8, & residuū scilicet 2, tertia linea manebit: deinde ad secundam lineam descende, & iterum videbis quoties 6, qui est diuisor, in numero eiusdem secundæ lineæ, simul & ascendenti inuenitur: & reperies diuisorem quater inueniri: pone igitur supra secundam lineam secūdi vici 4 calculos, & multiplicabis diuisorem per numerum vicium. dicendo quater 6, efficiunt 24. quem numerū subtrahe à numero diuidendo posito in secunda linea simul & suprapositis, sed cum numerus in secunda linea repertus, & suprapositus simul 27 componunt, ab illo subtrahatur 24, residuum scilicet 3 supra illam secundam lineam diuidendi ponendo: deinde ad vltimam accedas operationem &

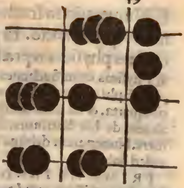


videbebis quoties diuisor in numero supra primam lineam diuidendi prosito, simul & ascendentibus inueniatur, & reperies quòd vicium numerus est 6, quem in vltimo vico pone, supra primā lineam vnum calculū ponēdo: & in prima domo vnum alterum: & per illū 6 multiplicabis diuisorem, & prouenientem numerum, qui est 36, à numero deuidēdo prima linea existēti, simul & superpositis subtrahe: quo facto, tres calculi tantū manebunt supra primā lineā secundi vici: & operatio eo pacto disposita inuenietur.

Patet igitur si numerus 879 per 6 diuidatur, pro numero quotiente generabitur 146. & residuum, numerus 3 erit, qui per 6 diuidi sine fractione non potest. ¶Si autem in diuisione pro diuisore accipiatur sola vna figura significatiua, cum cifra aut cifris: omnino eodem modo est operandum, ac dictum est: hoc solo dempto, vt scilicet operatio cesset cum primum cifra diuisoris ponetur in conspectu primæ lineæ diuidendi. voco impræsentiarum cifram lineam, siue domum & lineam simul, in quibus nullus ponitur calculus, & hoc quando in aliqua linea calculus reperitur. ¶Sed quoniam (vt dictum est) longe maior est difficultas in diuisione cuius diuisor est duarum, aut plurium figurarum significatiuarum: ideo pro operationis intellectu hæc duo documenta consyderabis, quæ posita fuere diffinito 5 præcedentis tractatus. ¶Prius documentum est. Si diuisoris aliquis linearis numerus, siue linearis & domesticus, pluries q̃ nouies in sibi suprapositis nummis inueniatur, tãtum 9 pro quotiente numero accipiatur. ¶Secundum documẽtum est. Si post primam operationem eueniat aliquem diuisoris numerum linearem, seu domesticũ in sibi suprapposito vel suprapositis diuidendi numeri inueniri non posse, anterioretur operatio, & in vico numeri quotientis, linea immediate præcedens maneat absq; calculi positione, pariter & domus illi supraposita. ¶Vt autem melius hæc omnia intelligere valeas, ad istud aduertas exemplum. Sit numerus diuidendus 5432. numerus autem diuisor 32, numeri illi disponantur vt præsens calculorum dispositio ostendit. Deinde incipies operari à suprema domo versus inferiores eũdo: & primo videbis quoties posterior diuisoris numerus in numero vltimæ domus reperitur, & inuenies quòd semel tantum: videbis igitur, vtrum semel etiam prior diuisoris in numero diuidendi immediate inferiori reperiatur, & inuenies ita esse: pones igitur in tertio vico pro numero quotiente vnum calculum supra tertiam lineam, per quẽ multiplicabis diuisoris secundũ numerum, & proueniet idem, videlicet 3, quem à numero in quarta domo diuidendi existẽte subtrahe, & residuum videlicet 2, supra quartã lineam per duos calculos pone, deposito prius calculo quartæ domus: deinde diuisoris priorem numerum per quotientem numerum multiplica, & proueniet idem numerus scilicet 2, quẽ subtrahe à numero tertiæ lineæ, in qua quatuor calculi ponuntur, & supra eandem soli duo calculi manebunt, & sub tali dispositione operatio reperta erit. Deinde iterum operari incipies, & videbis quoties posterior diuisoris numerus in numero tertiæ lineæ diuidendi, & suprapposito reperitur, & inuenies quòd septies: sed quia diuisoris prior numerus nõ toties in secunda linea, & suprapositis reperitur, ideo vna vice minus accipiatur: pone igitur pro numero quotiente supra secundã lineam vnum calculum, & supra domum secundam vnum etiam, & hoc in tertio vico: deinde multiplica diuisoris posteriorem numerũ per quotientẽ, videlicet per 6, & proueniet numerus 18: quẽ subtrahe à numero diuidendo supra tertiam lineã simul & sequenti (residuũ secundũ eius qualitatem disponendo) facies igitur, vt in tertia linea quatuor sint calculi, & depone duos calculos à quarta linea, qui 20 valebãt. posmodũ multiplicabis per quotiẽtem priorem diuisoris numerũ, & proueniet numerus 12: quẽ à numero secũdæ lineę diuidẽdi, simul & sequẽtis subtrahe: quo facto, operationẽ taliter dispositã

Prius documentũ

Secundũ documentum.

Operationis exemplum.



reperies. Cõsequẽter operaberis, & videbis quoties diuisoris prior numerus in numero diuidendo posito in secũda linea, simul & suprapofito inuenitur, & inuenies q decies reperitur: sed per prius documentũ non potest vltrà nouies sumi, & diuisoris secundus numerus nouies etiam reperitur: ideo pro quotiẽte numerus 9 habeatur, qui tertio vico locabitur, eo pacto vt 4 calculi supra primam lineam ponãtur, & vnus prima locetur domo: deinde multiplica diuisoris posteriorem numerum per quotientem, videlicet 9, & proueniet 27: quem subtrahe à numero diuidendo, videlicet ab illo qui ponitur secunda linea simul & à suprapofito. capies igitur tres calculos existentes tertia diuidẽdi linea, quos supra secundam pone: postea multiplicabis diuisoris priorem numerum per quotientem, & proueniet 18: quem à numero existenti in prima linea diuidendi, & suprapofito simul subtrahe, & pro residuo operationis manebit numerus 24: qui sine fractione per 32 diuidi non potest: hoc igitur discursu peracto, operatio completa sub tali calculorũ compositione manebit.

Mixtorũ partitio. ¶ Completo igitur diuidẽdi modo in simplicibus numeris, aliquid transeunter de mixtis operæprecium est dicamus. Pro quorum intelligentia est aduertendum, & pro documento obseruãdum, nullum numerum diuidendum esse, prius q̃ ad simplicem numerũ reducatur, ipso autem reducto, eum diuidere potes, quemadmodũ declaratum est de simplicibus. Nolo enim negare: imò mihi exploratissimum est, absq; reductione, & numerorũ fractione multos numeros mixtos posse diuidi: sed quoniã prolixa, & valde cõfusa taliũ esset diuisio: ideo nõ est opus in cõfusis, & admodũ prolixis operationibus immorari.

Diuisiõis calculatorię probatio. TERTIO NOTANDUM EST diuisionem per multiplicationem esse probandam modo declarato quinto diffinito præcedentis tractatus: sic videlicet, vt multiplicato numero quotiente per diuisorem, & summę prouenienti addito operationis residuo (si quod fuerit) videbis an proueniẽs numerus sit æqualis numero diuidendo, vel nõ: si ęqualis extiterit, bene operatus es: si vero inęqualis reperiatur, nihil operatio valebit. Et quamuis per supputatorios calculos possemus in progressione, & radicum extractione operari, & noua efficere diffinita: quia tamen ab omnibus ante me scriptoribus omissa fuere, & tenuis inde cõmoditas sequitur, esse omittenda nobis visum est.

DE FRACTIONIBVS PHYSICIS, SEV ASTRONOMICIS, tractatus tertius.

Euripides. Seneca. Plato.

RES vera, simplex sermo est, inquit Euripides. sermone igitur simplici, quid veritatis physicæ fractiones intercipiant edocebimus. & si qua ex parte difficiles videantur, eas vtique claras, & digestas reddere nitemur. Nam plura sunt quæ nos terrent, quàm quæ premunt, ait Seneca. Veritatem igitur insequendo, quæ secundum Platonem dulcissimum est auditorium, in septem diffinita hunc tractatum diuidemus. In quibus operandi modus cum fractionibus significabitur.

Finis calcu. fract. physi. vel astro. ¶ Finis huius tractatus, est perfecta in astronomicis atque physicis computationibus operatio. Seruit hæc doctrina apprime astrologis, medicis, naturalibus, ijs que omnibus hominibus qui corruptibilia relinquentes, incorruptibilia & cælestia corpora, ipsorúmque independentem causam rimantur.

¶Numeratio in fractionibus physicis, est debita physicalium fractio- num repræsentatio. Et physice in fractionibus numerare, est debite fra ctiones physicas repræsentare. 1

¶Physicas enim fractiones eas appellamus, quibus physici, astronomi, & naturales philosophi in suis operationibus vtuntur, quemadmodum sunt minuta, secunda, ter- tia, quarta, & ita ascendendo. Et quamuis quarto, & quinto diffinitis primi tractatus aliquid de his dixerimus, illa duntaxat transeunter, non tamen impertinenter dicta fuere. Nunc autem debitus se offert locus, atque dispositio vbi ad amussim illa omnia videri habent.

Physicæ fractiões

PRIMO NOTANDVM EST astrologos, & naturales quibusdã totis, & fra- ctionibus vti. Tota, apud eos, duodecim cęli signa dicuntur, quibus duodecim in quo- uis simplicium elementorum correspondẽt tota. Vnde totũ in ista acceptione, duode- cima firmamenti pars appellatur, siue duodecima simplicis elemẽti portio. Hæc autẽ tota altero discretiori termino, signa dicuntur. ¶Signũ autem multipharium accipi- tur. quandoq; pro duodecima zodiaci parte quadrangulari, cuius longitudo est 30 gra duum: & latitudo solum 12. & in ista acceptione, dupliciter contingit signũ imaginari. Primo modo, vt sit quadrilatera pyramis, cuius acuties seu vertex, in centro terræ di- citur esse, basis autem est superficies ad quam tale signum terminatur. Secundo modo imaginatur, vt nullam efficiat pyramidalem figuram, & in hac acceptione tales con- ceduntur propositiones, sol est sub tauro, luna est sub libra. Alio modo accipitur signũ prout firmamẽti duodecima dicitur pars, & adhuc duplici acceptione. Primo, vt ima- ginatur oblonga superficies à polo vno zodiaci incipiens in oppositum terminata, cu- ius maxima latitudo ex ea parte reperitur qua ab eclyptica interscinditur, 30 gradus la titudinis habens: secundũ quam acceptionem, quicquid in his inferioribus est, sub ali- quo signo manet. Secundo modo imaginatur oblonga pyramis, quæ est duodecima mundi pars, cuius basis est signum proximo modo captum, vertex autem supra zo- diaci axem. His vel consimilibus modis quodlibet simplicium elementorum, 12 in se continet tota. Quodlibet autem signorum in quauis illarum acceptione, 30 continet gradus, qui integra dicuntur: & quilibet, 60 fractiones, seu minuta: quoduis minutũ in 60 scinditur partes, quarum quęlibet secundum appellatur: & de secũdis in tertia: & de tertijs in quarta: & sic consequenter est procedendũ secundũ sexagenariã diuisionem.

Totum.

Multiplex signi acce- ptio.

SECVNDO NOTANDVM EST easdẽ in tẽpore reperiri fractiones, vel sal- tem his cõsimiles, quæ & in cælestibus inueniũtur corporibus. Vnde queãdmodum fir mamentũ in 12 diuiditur partes, ita annus in 12 scindicur menses: quilibet mensis, pro- portionabiliter ad prius dicta, totũ appellari potest: deinde quilibet mensis in 30 aut 31 diuiditur dies, vnico duntaxat excepto, qui vigintiocto residet contentus diebus: & quilibet dies in 24 secatur horas: quælibet hora i 60 minuta distribuitur: deinde quod- uis minutum in 60 secunda profunditur: & de reliquis dic pari modo, sexagenariam vbique diuisionem obseruando. Possent consimiles haberi fractiones in monetis, atq; mensuris, quibus pharmacopolæ, & plærique alij vtuntur.

Tempo- ris fra- gmenta.

TERTIO NOTANDVM EST modũ scribendi in hac parte talẽ debere esse: à manu sinistra incipiendũ est, versus dextrã eundo: & primo tota ponãtur, deinde gra dus, postmodũ minuta, consequenter secunda: & de cæteris pari modo. Eandẽ positio nem in tempore obseruabis: ita vt primo loco menses locentur, deinde dies, tertio ho ræ, quarto minuta, & sic consequenter. Hæc omnia infra positæ formulæ ostendunt.

Scriben- di ordo in fractio nib' phy sicis.

2	4	5	6	3	
Signa.	Gradus.	Minuta.	Secunda.	Tertia.	Fractiones zodiaci.
2	4	5	6	3	
Menses.	Dies.	Horæ.	Minuta.	Secunda.	Fractiones temporis.

Quamuis in hac parte duplicem possemus fractionem assignare, alteram simplicẽ, al- teram mixtam: quia tamen primo tractatu sufficiẽter de numero mixto discussum est, & sequenti pariter aliquid etiam dicetur, ideo pertranseo.

2 ❡Reductio astronomica, est integri siue grossioris fractionis in subtiliorem, vel subtilioris in integrum, aut grossiorem fractionem commutatio. Hinc physice seu astronomice reducere: est integrum, seu grossiorem fractionem, in subtiliorem, vel subtiliores in integrum, aut grossiorem fractionem commutare.

❡Nempe tota huius tractatus difficultas, in reductione fractionum consistit. Ideo pro reductionis clara intelligentia, quatuor documenta ponemus, per quæ clare modus reducendi physicas seu astronomicas fractiones significabitur.

Primum documentum.

Operationis exemplum.

PRIMO NOTANDVM EST, & pro primo documento tenendum. Si volueris gradus, quos integra dicunt, ad fractiones reducere: debes numerũ graduum toties, siue tot vicibus per sexagenarium numerũ multiplicare, quoties, seu quot vicibus numerus à quo fractio denominatur, vnitatem continet: & proueniens numerus erit talium fractionum summa, ex reductione graduum ad fractiones resultans. Istud declaratur facillimo exemplo. Vis scire tres gradus, quot efficiunt quarta/ multiplicabis numerum graduum, videlicet 3, per 60 quater, & numerus proueniens, erit 38880000. Est tamen vnum aduertendum non esse intelligendum vt litera sonat: sed isto pacto, vt videlicet 3, qui est numerus graduũ multiplicetur quater per 60: taliter ꝙ ex prima multiplicatione proueniens numerus qui est 180, multiplicetur per 60: deinde numerum ex secunda multiplicatione prouenientem, qui est 10800, per 60 multiplices, & producetur 648000: postmodum hunc numerum productum ex tertia multiplicatione per 60 multiplices, & habebis 38880000, qui est summa proueniens ex reductione trium graduum ad quarta. In cæteris eodem modo est operandum. ❡Ex quo infero, si 5 gradus ad quinta reducantur, proueniens summa erit 3888000000 quintorum.

3	g̃
180	m̃
10800	2
648000	3
38880000	4
per 60	

Secundũ documentum.

Operationis exemplum.

SECVNDO NOTANDVM EST, & pro secundo documento tenendum. Si velles grossiores fractiones ad subtiliores reducere, videbis per quot vnitates denominatio subtilioris fractionis à denominatione grossioris distat, & toties numerum grossioris fractionis per 60 multiplicabis: quo facto, proueniens numerus, reductionis summam ostendet. Exempli gratia. Vis reducere 5 minuta ad quarta/ postquam minutum ab vnitate denominatur, quarta vero à 4, qui per tres vnitates ab 1 distat: ter igitur multiplicabis numerum minutorum, videlicet 5 per 60, ad sensum in primo documẽto declaratum, sic videlicet, vt 5 primo per 60 multiplicetur: deinde ex tali multiplicatione prouenieñs numerus qui est 300, per 60 multiplicetur: & proueniet 18000: postremo autem hunc numerum per 60 multiplicabis: & proueniet numerus 1080000, qui proueniens summa nuncupatur ex reductione 5 minutorum ad quarta. ❡Ex quo facile sequitur, si ad sexta, 7 tertia reducantur, numerus proueniens erit 1512000. Et si ex te quispiam petat, qualiter 5 minuta, 3 secunda, & 4 tertia simul ad quinta reducantur: debes primo minuta ad quinta reducere: deinde secunda ad quinta: postmodũ tertia ad quinta reducantur: & numeri prouenientes simul addantur: ex quorum additione proueniens numerus erit datarum fractionum reductiora summa 65462400 quintorum.

5	m̃
300	2
18000	3
1080000	4
per 60	

7	3
420	4
25200	5
1512000	6
per 60	

TERTIO NOTANDVM EST duos esse reducendi modos his primis oppositos: & hoc pro reducendis fractionibus ad integra, & subtilioribus ad grossiores fractiones. Pro primi intelligentia tale teneas documentum, quod tertium in ordine erit. Si fractiones ad integra reducere velles: debes in primis cognoscere numerum à quo denominantur tales fractiones, & toties illarum numerus per 60 diuidatur, quoties vnitatem talium fractionũ denominatio continet. Exempli gratia. vis reducere 57980463 tertia ad integra, scilicet ad gradus/ ter diuides illum numerum per 60, eo pacto vt facta prima diuisione numerus quotiens, qui numerus est secũdorum, per 60 diuidatur: deinde secundæ diuisionis quotiens, qui minutorum est numerus, per 60 etiam diuidatur: quo facto, tertiæ diuisionis quotiẽs, graduum numerum manifestabit. Et si in qualibet illarum trium diuisionum aliquod sit residuum: illud in prima diuisione denominationem tertij capiet: & in secunda denominationem secundi: in tertia vero minuti de-

Tertium documentum.

Operationis exemplum.

☞Tot⁹ reducẽdi modus in hoc cõsistit, vt si grossiores fractiões ad subtiliores reducere velis, ita multiplicatione vtaris, ne denominationes vtrarunq; trãsgrediaris. Cõtrà vero si subtiliores ad grossiores reducas, toties vicissim diuisione sexagenaria opus erit, quota fuerit denominatio grossioris à subtiliori.

nominationem suscipiet. Si igitur datum numerũ ad integra reducas: facta prima diuisione per 60, pro quotiente habebis 966341, & supersunt 3 tertia. Deinde illo quotiente numero per 60 diuiso, numerum quotientem ipsius habebis 16105. & residuum erit 41 secunda. Postmodum si hunc quotientem numerum per 60. diuidas, talis procreabitur numerus quotiens 268, qui numerus graduum erit, & residuum erit 25 minuta. Habes igitur si 57980463 tertia ad gradus reducantur, prouenient 268 gradus, cum 25 minutis, 41 secundis, & tribus tertijs. ¶ Ex isto deducitur, si 987654321 quinta ad integra, videlicet ad gradus, reducantur, emanabit 1 integrum cum 16 minutis, 12 secundis, 28 tertijs, 25 quartis, & 21 quintis. Poteris hoc reducendi processu quasuis fractiones alias ad integra reducere. Sed quoniam contingit sæpenumero subtiliores fractiones ad grossiores reduci: ideo pro talium reductione, istud aduertes documentum. Si aliquas subtiles reducere velles fractiones ad grossiores, animaduertas in primis denominationem illarum subtilium fractionum, & videbis per quot vnitates, subtilioris fractionis denominatio, grossioris fractionis denominationem excedit, & toties diuides numerum illarum subtilium denominationum per 60: quo peracto, quotiens numerus vltimo habitus, propositũ ostẽdet. Hoc declaratur facili exẽplo. Vis 89786754 sexta ad tertia reducere? tres diuisiones sunt faciendæ, modo in præcedenti documento declarato: & reperies pro summa tertiorum 415 tertia, cum 40 quartis, & 45 quintis, & 54 sextis. Ex hoc habetur, si 9073605 quinta ad secundã reducantur, consurgẽt 42 secunda, cum 26 quartis, & 45 quintis.

Quartũ documentum.

Operationis exemplum.

3

¶ Additio astronomica, est physicalium fractionum in vnam summã collectio. Et addere astronomice, est fractiones physicales in vnã summam colligere.

¶ Difficultatem impræsentiarum pro additione facienda, nullam fere habemus. Est autem aduertendum, & pro documento obseruandum, nullas fractiones diuersarum denominationum esse addendas, nisi prius ad fractiones vnius denominationis reducantur. Intendo enim dicere gradus non esse addendos minutis, nec minuta secundis, nec secũda tertijs, antequam reducantur ad consimilis denominationis fractiones: ipsis autem reductis secundum quod præcedentis diffiniti documenta indicant, addi poterunt: vnde

Fractionũ physicaliũ additio.

PRIMO NOTANDVM EST pro talium fractionum additione, fractiones dissimiles, locis dissimilibus locandas esse, ita q̃ disponendæ veniunt secundum quod primo diffinito diximus. Primo gradus (si fuerint) ponantur: deinde minus grossæ fractiones: vltimo subtiliores locentur. Si aliquas fractiones addere velles, illas debes eo pacto disponere, vt mutuo correspondeant quæ earundem sunt denominationum: ita videlicet vt gradibus gradus supponantur: minutis minuta: secundis secũda, & ita consequenter. Vnum tamen est aduertendum, vtendum esse vnitatibus in hac parte, perinde ac in primo tractatu vtebamur: & vnitatibus vnitates addantur, denis denæ, centenis centenæ: & sic de singulis: cum autem ad sexaginta deuentum fuerit vnitates, illas in mente tenebis, pro vnitate addenda sequentibus fractionibus diuersarum denominationum: & semper incipiendum est operari a subtilioribus fractionibus versus grossiores eundo. ¶ Vt autem clarius hæc omnia intelligere valeas, ad præsens respice exemplum. Numerus cui additio fieri habet sit 4 signa, 28 gradus, 45 minuta, 28 secunda. Primus numerus addendus sit 2 signa, 20 gradus, 15 minuta, 13 secunda. Secundus numerus addendus sit 1 signum, 15 gradus, 20 secunda. Tertius numerus addendus sit 1 signum, 12 gadus, 14 minuta, 24 secunda. Disponantur illi numeri secundum quod sequens elementorum combinatio ostendit.

4	Signa.	28	Gradus.	45	Minuta.	28	Secunda.
2	Signa.	20	Gradus.	15	Minuta.	13	Secunda.
1	Signum.	15	Gradus.			20	Secunda.
1	Signum.	12	Gradus.	14	Minuta.	24	Secunda.

Operaberis incipiendo à secundis, ipsa simul addendo, eo pacto vt ipsorum vnitates

addantur: deinde denæ. Poſtmodum ad minuta ibis eodem modo operando: conſequenter ad gradus: & demum ad ſigna: & totali diſcurſu completo, ſub tali compoſitione operationem reperies.

4	Signa.	28	Gradus.	45	Minuta.	28	Secunda.
2	Signa.	20	Gradus.	15	Minuta.	13	Secunda.
1	Signum.	15	Gradus.			20	Secunda.
1	Signum.	12	Gradus.	14	Minuta.	24	Secunda.
10	Signa.	16	Gradus.	15	Minuta.	25	Secunda.

SECVNDO NOTANDVM EST, ſi velles cognoſcere ſummam ſignorum, aut graduum, vel minutorum, ſiue alicuius alterius fractionis, quam omnes illi quatuor numeri ſuprapoſiti efficiunt: opus eſt reductione. Vnde ſi ad ſigna reducantur, oportet id fiat ſecundum tertium documentum, in quo declaratus eſt modus reducendi fractiones ad integra. Si autem ad gradus, vel ad minuta reducantur, alijs documentis adiutus id facillime facere poteris. Et quamuis poſſet alius addendi modus aſſignari in hac parte: datus modus, poſtquam & ſuccinctus & bonus eſt, ſufficit.

TERTIO NOTANDVM EST conſimili procedendi modo eſſe operandum in fractionibus temporum, & monetarum, & conſimilibus alijs. Vnde ſi in temporis fractionibus operari libuerit, ſecundum hanc ſpeciem, ad iſtud aduertas exemplum.

4	Menſes.	25	Dies.	23	Horæ.	52	Minuta.
2	Menſes.	17	Dies.			36	Minuta.
1	Menſis.			19	Horæ.	56	Minuta.
3	Menſes.	19	Dies.	22	Horæ.	47	Minuta.
12	Menſes.	3	Dies.	19	Horæ.	11	Minuta.

¶Poteſt hæc ſpecies probari per ſubtractionem, vt ſequens diffinitum docebit: nam ſi facta additione, omnes numeros addendos abſtuleris à ſumma, & reſiduum ſit æquale numero cui additio fieri habet, bene operatus es: aliter ſi euenerit, iterum incipias operari oportet.

4 ¶Subtractio aſtronomica, eſt fractionũ phyſicaliũ à phyſicalibus fractionibus ablatio, vt inde relicta ſumma deprehẽdatur. Subtrahere vero aſtronomice, eſt phyſicas fractiones à phyſicis fractionibus auferre.

¶Quandam inter ſe ſimilitudinem obſeruant ſubtractio in fractionibus, & ſubtractio prius habita in integris: ita videlicet vt quemadmodum tertio diffinito primi tractatus dictum eſt, operationẽ initiandam eſſe ab vnitatibus, ita impræſentiarũ incipiẽdum eſt operari ab vnitatibus ſubtilium fractionum verſus denas, & cætera (ſi fuerint) eundo.

PRIMO NOTANDVM EST pro huius diffiniti vero intellectu, operationẽ eo pacto eſſe faciendam: diſpoſitis numero à quo fieri habet ſubtractio, & ſubtrahendo ſecundum quod dictum eſt, ſubtrahes fractiones à fractionibus eiuſdem denominationis: quòd ſi tales non reperiantur, ſubtrahes minores fractiones à maioribus: ita videlicet quòd à maioribus habebis accommodato vnam fractionem, quæ 60 valet pro immediate præcedenti fractione. Sed vt melius hæc omnia intelligantur, ad iſtud reſpice exemplum. Sit numerus à quo ſubtractio fieri habet 26 gradus, 35 minuta, 48 ſecunda: numerus ſubtrahendus ſit 24 gradus, 26 minuta, 55 ſecunda: diſponantur vt preſens forma ſignificat. Deinde incipe operari à ſecundis, & dic ab 8 deponendo 5, remanet 3, quem ſub linea directo loco ponas: poſtmodum à 4 non poteſt 5 deponi, ideo opus eſt vt habeas accõmodato vnum minutum quod 60 valet ſecunda in primo ſecundorum limite: & in ſecundo valet 6 denas, quæ ſimul cum 4 ibidem exiſtentibus, 10 componunt, à quibus poteris bene 5 ſubtrahere, reſiduum ſcilicet 5, ſub linea directa ſede ponendo: poſtmodum ad minuta ibis: & quia à 4 manẽtibus propter ablationem vnius minuti ſeparari non poteſt 6: igitur habebis vnam vnitatem accommodato à 3 ſequentibus, quæ 10 valet minuta, & ſic à 14 ſeparabis 6, reſiduum in-

Operationis exemplum.

26	Gradus.	35	Minuta.	48	Secunda.
24	Gradus.	26	Minuta.	55	Secunda.

☞ Alter eſt in phyſicis fractionibus ſubtrahendi modus, & (meo quidẽ iudicio) vſui accõmodatior illo, quem author hic ponit. Eſt'que huiuſmodi. Quemadmodũ in primis quibuſq; limitibus, à denario numero maioris digiti ſubtrahẽdi differẽtiã ſumis (iuxta alterũ modũ ſubtractionis tertij definiti, primi tractatus praxeos arithmeticæ) quã ſuperiori minori additam, aut ſolam ſi cifra ſuperius ſit, ſub lineã ſcribis, atq; deinde ſecũdo limite vnitatẽ addis numeris ſubtrahẽdis ſimul cũ eis auferẽdam: ſic quoq; in quibuſlibet ſecũdis limitib⁹ phyſicis inq̃, ſubtrahendi ma

ioris differentiam à fenario, superiori adijce, productúmq; substitue, atq; vnitatẽ ad proxime crassiorẽ fractionem trãsfer: vbi subtrahas illam. id'q; per omnes physicas fractiones, quæ sexagenæ fuerint (quales & apud Alphõsum signorum sunt) te obseruasse non pœnitebit, quisquis es studiorũ amator

fra lineam ponendo, videlicet 8: deinde quia à 2 manenti, 2 subtrahendus est æqualis, ideo ad gradus eundum est: & operaberis consequenter vt dictum est. & hoc peracto, talem, qualis sequitur, completam reperies operationem.

26	Gradus.	35	Minuta.	48	Secunda.
24	Gradus.	26	Minuta.	55	Secunda.
2	Gradus.	8	Minuta.	53	Secunda.

SECVNDO NOTANDVM EST alterum posse assignari subtrahendi modum, qui videtur in parte clarior. Et est, dispositis numero à quo fieri subtractio habet, & numero subtrahendo, reducantur ad subtiliorem fractionem in ipsis repertam: quibus reductis, secundum documenta secundi diffiniti, facillima erit subtractio.

Alius modus subtrahẽdi.

TERTIO NOTANDVM EST eadem omnino via esse operandum in fractionibus temporis, monetarum, & aliorum huiusmodi, ac in astronomicis fractionibus dictum est. Probari autem potest hæc species per additionem: vnde si subtrahendi numeri, & subtracti proueniens summa extiterit æqualis numero à quo subtractio fieri habet, bona erit operatio: si autem oppositum contingat, opus est vt iterum operandi sumas laborem.

Probatio subtractionis.

¶Multiplicatio astronomica, est procreatio numeri compositam denominationem multiplicãtis & multiplicãdi habentis, qui ad multiplicandum extrinseca appellatione in eadem proportione se habet, qua multiplicans etiam extrinseca denominatione ad vnitatem se habet. Hinc facile constat quid sit astronomice multiplicare.

5

¶Si enim per quatuor tertia, tria secunda multiplices: procreabis duodecim quinta. Nam ter quatuor, duodenarium constituunt: denominatio multiplicandi intrinseca, est ternarius, extrinseca vero est quaternarius: & multiplicantis numeri extrinseca denominatio est ternarius, & intrinseca binarius. Collectis igitur duabus intrinsecis denominationibus, reperies quinarium: quare numerus proueniens ex talium fractionum multiplicatione, quinti nuncupationem habebit: denominabitur igitur numerus duodenarius, qui ex multiplicatione cõsurgit, duodecim quintæ: cuius numeri intrinseca denominatio est quinarius, extrinseca vero duodenarius, quæ si ad extrinsecam multiplicandi denominationem referatur, triplam proportionem generabis. & consimilis habetur proportio, si multiplicantis extrinseca denominatio ad vnitatem comparetur.

☞ In physica multiplicatione notabis, si gradus per gradus multiplices, prouenientẽ numerũ esse graduũ. si gradus per minuta, proueniũt minuta. si gradus per secũda, proueniunt $\overline{2}$. si gradus per tertia, proueniunt $\overline{3}$ &c. Si vero minuta per minuta, proueniũt $\overline{2}$. si minuta per secũda, ꝓueniũt $\overline{3}$. si minuta per tertia, proueniũt $\overline{4}$. Itẽ si $\overline{2}$ per $\overline{2}$, proueniũt $\overline{4}$. & sic cõsequẽter vtrarũq; denominationũ numeris additis ad denominatorẽ producti. Quòd si milliaria per gradus, proueniũt milliaria. si milliaria per minuta gradus, ꝓueniũt mi. milliariũ. si mi. milliariũ per grad⁹, ꝓueniũt mi. milliariũ, & si mi. milliariũ per mi. gradus multiplicaueris, ꝓueniẽs numerus erit secundorum milliaris.

PRIMO NOTANDVM EST triplicem in hac specie multiplicandi modum inueniri. Primo modo contingit vt tota, quæ signa dicuntur, per gradus, qui integra appellantur, multiplicentur, aut per fractiones. secundo modo, gradus per fractiones possunt multiplicari. tertio autem modo, fractiones per fractiones multiplicantur. Si igitur primo modo fiat multiplicatio, numerus prouenies sumet denominationem gradus aut fractionis. Verbi gratia: si decem signa, per viginti gradus multiplicentur, proueniens numerus erit ducentorum graduum: q; si decem signa, per viginti minuta multiplicentur, crescens numerus erit ducentorum minutorum. etiam si quindecim tota per triginta tertia multiplicentur, numerus consurgens erit 450 tertiorum. & de cæteris pari modo.

Triplex multiplicandi modus.

SECVNDO NOTANDVM EST si gradus per fractiones multiplicentur, numerum prouenientem appellationem fractionis habere. Exempli gratia. Si cẽtum gradus, per triginta minuta multiplicentur, consurgens numerus erit 3000 minutorum. Et si quadragintaquinque gradus, per quinquagintasex secunda multiplicentur, proueniens numerus erit 2520 secundorum. Quòd si centum & viginti gradus, in quadraginta tertia ducantur, profluens numerus erit 4800 tertiorum: & in cæteris consimili modo est dicendum.

TERTIO NOTANDVM EST. Si fractiones per fractiones multiplicentur, numerum consurgentem appellationem ambarum fractionum obtinere. Exempli gratia. Si per quindecim minuta, quindecim secunda multiplicentur, consurget numerus

225 tertiorum. Nam minuti appellatio est vnitas, & denominatio secundi est binarius, & amborum simul ternarius: imò proueniens numerus compositam multiplicantis, & multiplicãdi denominationem sumit. Pari modo si viginti minuta per quindecim tertia multiplicentur, proueniet numerus 300 quartorum. Et si viginti tertia per triginta quinq; tertia multiplicentur, proueniet numerus 700 sextorum, & hoc pacto deinceps. Et secundum hunc tertium multiplicandi modum, diffinitum venit intelligendum.

6 ¶Diuisio astronomica, est procreatio numeri eam denominationem habentis, quæ relinquitur ex subtractione denominationis minoris fractionis à denominatione maioris, qui eadem proportione extrinseca nuncupatione ad vnitatem se habet, qua diuidendus etiam extrinseca denominatione ad diuisorem. Hinc facile potest deduci quid sit astronomice diuidere.

¶Nam si octo tertia, per duo minuta diuidantur, procreabuntur quatuor secunda: eo quòd subtracta minoris fractionis denominatione, quæ est vnitas, à maioris denominatione, quæ est ternarius, relinquitur binarius, à quo fractio (quæ dicitur quotiẽs) sumit appellationem: & in eadem se habet proportione numerus quotiens ad vnitatem extrinseca denominatione, qua diuidendus ad diuisorem extrinseca etiam denominatione: vtrobique enim quadrupla proportio inuenitur.

Triplex diuidẽdi modus physicales fractiones.

PRIMO NOTANDVM EST triplicem in hac parte diuidendi modum inueniri. Primo modo contingit signa per gradus, aut per fractiones diuidi, & ediuerso gradus per signa, etiam & fractiones. Secundo modo gradus per fractiones diuidũtur, & ediuerso. Tertio autem modo, fractiones per fractiones diuiduntur. ¶Si igitur primo modo libet operari, pro numero diuidẽdo accipiatur is numerus cui extrinseca denominatio est maior, pro diuisore vero is cui minor est denominatio habeatur: & facta diuisione, modo assignato in quinto diffinito primi tractatus, numerus quotiẽs sumet denominationem integri, aut fractionis. Exempli gratia. Si duodecim signa per quatuor gradus diuidantur, prouenient tres gradus pro numero quotienti: etiam si duodecim gradus per quatuor signa diuidantur, numerus quotiens erit tres gradus. Quòd si duodecim signa per quatuor minuta diuidantur, numerus quotiens erit trium minutorum: ediuerso etiam si duodecim minuta per quatuor signa diuidantur, tria minuta producentur pro quotienti. Et pari modo in reliquis operandum est.

Secũdus modus.

SECVNDO NOTANDVM EST, si gradus per fractiones, vel ediuerso fractiones per gradus velles diuidere, numerus quotiẽs fractionis appellationem sumet. Exempli gratia. Si viginti gradus per quinque secunda diuidantur, numerus quotiens erit quatuor secunda: etiam ediuerso, si viginti secunda per quinq; gradus diuidantur, consurget pro quotienti numerus quatuor secundorum. Est tamen vnũ potissime considerandum in hac specie, quod si facta prima diuisione contingat aliquot esse residuum, id per sexagenarium est multiplicandum, & productum per diuisorem diuidendum, & numerus quotiens secundæ diuisionis, denominationem sequentis fractionis accipiet. quòd si adhuc secunda diuisione facta aliquod inueniri residuum contingat, id per numerum sexagenarium est etiam multiplicandum, & productum per diuisorem diuidendum: quo facto huius tertiæ diuisionis numerus quotiens, sequentis denominationem suscipiet: & consequenter hoc modo. Exempli gratia. Si nouem gradus per 4 minuta diuidantur, numerus quotiens erit 2 minuta, cum 15 secundis. Et si 12 secunda per 5 gradus diuidantur, numerus quotiens erit 2 secunda, cum vigintiquatuor tertijs. Et si quindecim gradus per septem tertia diuidantur, quotiens erit 2 tertia, cum octo quartis, 34 quintis, & 17 sextis: & adhuc aliquod est residuum, quod qualitercunque multiplicetur per sexagenarium ad sensum datum, non est possibile terminari diuidendo: quoniam (vt facile est reperire) facies circulationem in infinitum protensam.

Documẽtum.

Tenendum igitur est pro documento, in hac parte tunc esse cessandum diuidere, cum in aliqua sequẽtium diuisionum, residuũ est æquale denominatione extrinseca, residuo pri-

mæ diuisionis. Alterum præterea in hac parte documentum obseruandum est, videlicet. Si facta multiplicatione residui primę diuisionis per sexagenarium, proueniens numerus non potest diuidi per diuisorem, est multiplicandus totus numerus productus per sexagenarium, & proueniens numerus per diuisorem diuidatur: & numerus quotiens sumet denominationem sequentis fractionis vnica interiecta.

Documentum.

TERTIO NOTANDVM EST, si fractiones per fractiones diuidantur, hoc dupliciter euenire, aut diuiduntur fractiones per fractiones eiusdem denominationis, aut per fractiones diuersarum denominationum. Si primo modo contingat, numerus quotiens integri nuncupationem habebit: & si residuum manserit, per sexagenarium numerum multiplicetur, & productus inde numerus per diuisorem diuidatur: quo facto, numerus quotiens, minuti denominationem habebit. Et consequenter iuxta prius dicta. Exempli gratia. Si 359 tertia per 45 tertia diuidantur, numerus quotiens erit septem gradus, 48 minuta, & 40 secunda. Si vero fractiones per fractiones diuersarum denominationum diuidantur, numerus quotiens sumet appellationem à numero relicto ex subtractione minoris denominationis fractionis à maiore fractionis denominatione. Verbi gratia. Si sex tertia per tria secunda diuidantur: vel sex secunda per 3 tertia, numerus quotiens erit duo minuta, quoniam subtracta minore denominatione fractionis (quæ binarius est) à maiore fractionis denominatione (quæ est ternarius) relinquitur vnitas, à qua numerus quotiens minuti denominationem sumit. Et si nouem sexta per tria decima diuidantur, quotiēs numerus erit trium quartorum. Si vero 13 minuta per 6 tertia diuidantur, consurget pro quotienti numerus duorum secundorum, & decem tertiorum: & in isto sensu vltimo, textuale diffinitum est intelligendum.

Tertius partiendi modus in minuta physi.

¶Operatio astronomica in progressione, & duplici radicum extractione, quadrata scilicet & cubica: est debita, ac proportionata operatio ad dicta in primo tractatu, sexto, octauo & nono diffinitis. 7

¶Peculiares diffinitiones assignare pro progressione, & radicum extractione superuacaneum esse censemus: postquam parum, aut nihil differunt ab his quæ in primo tractatu dicta fuere: sub contracta igitur breuitate in hoc septimo & huius tractatus vltimo diffinito de his tribus speciebus differemus.

PRIMO NOTANDVM EST duplicem impræsentiarum progressionem inueniri, perinde ac in integris, videlicet arithmeticam, & geometricam: in quarum vtraque operandum est per additionem, vel conformiter ad duas regulas positas diffinito sexto primi tractatus. Vno tantum documento obseruato: scilicet, nullæ fractiones progressiuo ordine se habentes, diuersarum denominationum possunt esse, sed tantum vnius: si igitur duo minuta, tria, quatuor, quinq;, sex, quæ progressiuo ordine se habent, eodémq; arithmetico disponantur ac decet, & simul addantur, aut per primam regulam in eis operetur, consurget summa viginti minutorum. Pari modo si vnum, duo, quatuor, octo, sexdecim secunda, recto ordine disponantur, postquam geometrico ordine se habent, operandum est per additionem, vel iuxta tenorem secundæ regulæ: & pro summa habebuntur triginta, & vnum secunda. In reliquis est eo modo faciendum.

De physica mi. progressione

Documentum.

SECVNDO NOTANDVM EST radicum extractionem in quadratis parum admodum differre ab ea quæ habita est octauo diffinito primi tractatus. Est tamen in hac parte istud documentum potissime obseruandum. Si aliquæ proponantur fractiones à quibus quadrata radix extrahi debeat, oportet (si diuersarum sint denominationum) ad fractiones eiusdem denominationis reducantur, ad eas inquam fractiones quæ à numero pari denominantur, vt sunt secunda, quarta, sexta & consequenter. Deinde operaberis quemadmodum in integris declaratum est: radix tamē reperta, subduplam denominationem habebit ad illam qua denominatur numerus cuius radicem quæris. Et si aliquod residuum esse contingat, id denominabitur eadem denominatione qua numerus cuius radicem quæris, denominatur. Exēpli gratia. Si a 493 sextis, quadratam extrahere cupis radicem, operaberis omnino ac in integris dictum est, & reperies pro radice 22 tertia, & residuum erit 9 sexta: radix enim à ternario, denomi-

De quadra. extractio. in minu. physi.

Documentum.

nantur tertia, eo ꝙ numerus à quo radix extrahi debet, à 6 sumit denominationem.

De radicũ extractione in cubis documẽtũ.

TERTIO NOTANDVM EST radicum extractionem in cubis esse eo pacto extrahendam, ac in integris dictum est: hoc seruato documento, vt numerus cuius talis radix extrahi habet, in tres æquas partes sit secabilis: ꝙ si aliqua reperiatur radix, cuius radicem quæris cubicam, quæ in tres diuidi partes æquales non potest, reducatur ad eam fractionem quæ in tres partes æquas posset diuidi: deinde ab illa fractione cubicam extrahe radicem, modo ac arte signatis nono diffinito primi tractatus. Et radix inuenta sumet denominationẽ tertiæ partis numeri, à quo talis radix extrahitur. Exempli gratia. si à 27 quartis extrahere velles radicem, illa erit tria nona: eo ꝙ tertia pars 27 quartorum, est numerus 9. Et si à 216 quintis, cubam extrahas radicem, ea erit sex septuagesima secunda. Nam tertia pars 216, est 72. in cæteris eo pacto est operandum. Quòd si in mixtis secundum has tres recitatas species operari libet (si quæ dicta sunt in hoc tractatu debite intelligantur) facile admodum id facere potes.

TERTII TRACTATVS PRACTICAE FINIS.

DE FRACTIONIBVS, SEV MINVTIIS VVLGAribus, tractatus quartus.

Bias. *Periãder*

IN labore, constantiam esse adhibendam, præcipit Bias ille Prienensis, qui vnus ex septem Græciæ sapiẽtibus fuit. Vt igitur post cõstantem laborem, quietem adipiscamur (quæ pulchra res est, vt inquit Periander) inceptum continuabimus laborem. in hoc enim quarto tractatu, fractiones (quas minutias dicũt vulgares) enucleabimus. Istæ sunt fractiones quas potissime mercatores summopere venerantur, quarum opitulamine perquam multas diuitias consequuntur. Ne igitur mercatoribus habear inuisus, eis non abscondam, quas sunt consecuturi diuitias, hac parte intellecta: ait enim Pictacus, Ne diuitias abscondas, cũ veneris in eas. aperiam ideo per septem solum diffinita (postquam debitus se offert minutiarum locus) modũ operãdi in fractionibus eisdem.

Pictacus.

¶Finis huius tractatus, est debita secundũ fractiones vulgares operatio. ¶Seruit magnis mercatoribus, & ijs breuiter omnibus qui diuersis mercium fragmentis vtuntur.

DIFFINITA.

1 ¶Numeratio in minutijs vulgaribus, est recta talium minutiarum repræsentatio. Et minutim numerare, est debite vulgares minutias repræsentare.

Nũerator *Denominator.*

¶Duo numeri potissime in hac parte sunt consyderandi, quorum alter numerator, alter vero denominator appellatur. Numerator, est numerus, qui integri partem, vel partes aliquotas repræsentat: & talis numerus facta breui linea venit desuper locãdus. Denominator, est numerus partium aliquotarum, integri denominationem repræsentans: & talis sub linea semper est scribendus. Exempli gratia $\frac{5}{3}$. Numerus ibidem figuratus repræsentat quinque tertia vnius integri. 5 enim significat numerum: & 3, dat numero denominationem. Si autem vnius integri quatuor septima scribere volueris, facies hoc pacto $\frac{4}{7}$. vnde eisdem in hac parte vtimur elementis, quibus primo tractatu vtebamur. quamuis alia eorum positione, atque vsu.

Fractio simplex.

PRIMO NOTANDVM EST aliquam impræsentiarum denominari fractionẽ: aliqua vero fractionũ fractio appellatur: & vtraq; istarũ est duplex, videlicet simplex, & mixta. Fractio simplex ea dicitur, cui vnica in recto est denominatio, siue in qua vnus tantum denominator inuenitur: & eo pacto venit repræsentanda: eius numerator in superiori parte locetur, sub quo suus denominator ponatur, inter quos parua linea mediet. Exemplum. Si vis scribere vnum secundũ, & vnum pariter tertium, similiter & duo

quarta: id facies hoc pacto $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{4}$. Mixta autē fractio (vt ad præsentem materiam spectat) ea est, cui in recto plures denominationes sunt: quemadmodum sunt illæ quæ in præsentibus figuris ostenduntur $\frac{7}{2}\ \frac{8}{5}\ \frac{5}{4}$: eodem modo $\frac{145}{3}\ \frac{232}{5}$. Prior istarum mixtarum fractionum est septem secunda, octo quinta, quinq; quarta vnius integri: & posterior est centum quadraginquinq; tertia, ducenta triginta duo quinta integri. Fractio fractionis ea est, quæ alicuius fractionis est pars aliquota: vt est vnum tertium vnius quarti: quod sic habet repræsentari $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$. Omnis enim fractionis fractio, duas ad minus habet denominationes: quarum prior solum est in recto: cæteræ (si plures fuerint) in obliquo reperiuntur. Et illæ eo modo debent repræsentari: fractio quæ est in recto, in sinistra parte ponatur, inter cuius numeratorē, & denominatorē parua linea mediet: aliæ autem fractiones, quarū denominationes sunt in obliquo, versus dextram manū locentur, absq; lineę interpositione, solis punctis insertis si plures fuerint. Exemplū, scribatur vnum tertium vnius quarti isto modo $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$. Simili modo scribātur quatuor secūda duorū tertiorum: & hoc sic $\frac{4}{2}\ \frac{2}{3}$. Item repræsententur tria quinta vnius secundi duorum tertiorū, hoc pacto $\frac{3}{5}\ \frac{1}{2}.\ \frac{2}{3}$. Et de cæteris pari modo est dicēdum. ¶ Mixta fractionis fractio ea est, quæ plures fractionū fractiones intercipit: vt est tria secūda vnius tertij, quatuor quinta duorū tertiorū: quæ sic habēt repræsentari $\frac{3}{2}\ \frac{1}{3}.\ \frac{4}{5}\ \frac{2}{3}$. Facile est in multis alijs exempla assignare.

Fractio mixta.

Fractio fractiōis.

Fractio fractiōis mixta.

☞ Quantitas cōtinua quæ vel in lineis, vel superficiebus, vel etiā corporib⁹ mathematicis cōsistit, ob varias atq; multiplices suas proportiones quādo diuiditur, exigit vt nūeris fractis vtēdum nobis sit, si modo proportionum varietatē cognoscere cupiam⁹: rem i primis necessariā omnibus ijs qui disciplinis mathematicis, imò & mechanicis artib⁹ operam suam locare velint: perutilē & ijs, quibus negociationes quæcunq; studio esse solent. id quod luce clarius patebit, vbi ad tractatum qntū te cōtuleris lector, quē sane citra hui⁹ operā intelligere nequeas.

SECVNDO NOTANDVM EST maximā in simplicibus posse dari fractionem: minimā vero non. Illa dicitur maxima fractio, quę integri est maxima pars aliquota, videlicet medietas, quæ alio termino secunda dicitur: & quemadmodum non est dabilis minima pars aliquota (saltē in continuis) ita minima factio non est reperibilis: est tamē inter simplices fractiones idem ordo, qui & inter cōtinui partes aliquotas reperitur. Post medietatem, tertia est maior: deinde quarta, & consequēter. In mixtis autem nec maxima, nec minima est reperibilis fractio. Est insuper consyderandū in mixtis fractionibus scribēdis, eam latere sinistro esse ponendā, quæ minoris est denominationis, quāuis maiorem numerū efficiat: ea vero fractio in dextro latere locetur, cui maior est denominatio. Exēpli gratia. Vis scribere duo tertia, septē quarta? hoc modo veniūt disponenda $\frac{2}{3}\ \frac{7}{4}$. Quando autem econuerso ponerētur, nullum esset inconueniēs: quēadmodū si in integris operādo, frācos sinistra manu poneremus, ducatis dextra sede affixis.

TERTIO NOTANDVM EST tria esse in hac specie documenta pro cognitione valoris fracti numeri, siue fractionis. Primum documentum. Quandocunq; numerator, & denominator alicuius sunt æquales: talis fractio integro vno duntaxat valet. Exemplum $\frac{3}{3}\ \frac{4}{4}\ \frac{5}{5}$. Quælibet istarum trium fractionum integro valet: & ita adinuicem sunt æquales. ¶ Secundum documentum. Quotiescunq; numerator fuerit maior denominatore, fractio valet magis integro: & hoc in ea proportione, qua numerator ad denominatorem se habet, vel per tot vnitates, per quot denominatorem excedit. Exemplum $\frac{7}{5}\ \frac{8}{3}\ \frac{6}{4}$. Quælibet datarum trium fractionum valet magis integro: prima vero in proportione superbipartienti quintas: & secunda in porportione dupla superbipartienti tertias: tertia vero in proportione sesquialtera. ¶ Tertium documentum. Si denominator fractionis est maior numeratore eiusdem, talis fractio minus integro valet, per tot vnitates per quot datum numeratorem excedit. Exemplum $\frac{1}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$. Per vnitates in proposito, integri partes aliquotas intelligimus.

Primū documentū

Secundū documentum.

Tertiū documētum

¶ Reductio in vulgaribus minutijs, est integri, aut grossioris minutiæ in minutiam subtiliorē, vel subtilioris in integrū aut grossiorem cambitio. Reducere minutim, est integrum, aut grossiorem fractionē in subtiliorem, vel subtiliorem in integrū aut grossiorem fractionem cambire. 2

¶ Reductorium in vulgaribus fractionibus modum aggrediendo, qui præsentis tractatus basis & fundamentum nuncupari potest, tria seriatim per tria notabilia discutiemus. In primo notabili, modum reducendi integra ad simplicem fractionem tibi voluntariam, & ediuerso fractionem ad integra ostendemus: similiter reducendi grossiorem fractionem ad subtiliorem tibi pariter voluntariam: & ediuerso subtiliorem, scilicet fra-

ctionem ad grossiorem manifestabimus. In secundo notabili, declarabimus modum reducendi simplices fractiones diuersarum denominationum, ad fractionem vnius denominationis. ostendemus pariter reducendi modum earum fractionum, quæ fractiones fractionum dicuntur, ad simplicem fractionem. In tertio notabili declarabitur modus reducendi integra & fractiones: similiter integra & fractionum fractiones ad simplicem fractionem: & in fine aliquid de mixta reductione dicetur.

Integrorū ad fractiones reductio.

PRIMO NOTANDVM EST, si integra ad fractionem tibi voluntariam reducere velles, numerus integrorum est multiplicandus per denominatorem talis fractionis, & proueniens numerus, reductionis summam ostendet. Exempli gratia. Vis reducere vnum integrum ad tertia, multiplica vnitatem per ternarium, & producetur 3, qui est numerus habitus ex reductione integri in fractionem. vnum enim integrum est tria tertia, & ediuerso. Pari modo si tria integra, ad quinta velles reducere, multiplicabis ternarium per quinarium, & producetur 15, qui est reductoria summa. Nam tria integra, quindecim quinta efficiunt, & ediuerso. Quòd si septem integra, ad sexta reducantur, prouenient quadraginta duo sexta, & consequenter hoc pacto.

Fractionū ad integra reductio.

¶Si vero aliquam fractionem tibi voluntariam, ad integra velles reducere: debes numeratorem talis fractionis per denominatorem eiusdem diuidere: quo facto, numerus quotiens, intentum propalabit. Exempli gratia. Vis reducere quindecim tertia ad integra? diuide numerum quindenarium, qui est numerator, per ternarium denominatorem datæ fractionis: & generabitur 5, qui est numerus integrorum: & sic habebitur quòd ex reductione quindecim tertiorum ad integra, quinque integra consurgent. etiam si triginta quinta ad integra reducere velles, habebis pro integrorum numero, senarium. quòd si quadraginta septem quinta, ad integra reducas, nouem integra generabis: & duo quinta pro residuo manebunt. Nam quotiescunque numerator fractionis per denominatorem eiusdem sic diuiditur, quòd aliquod esse residuum oportet, illud debet denominari à denominatione datæ fractionis.

$\frac{47}{5}$ (9 $\frac{2}{5}$

Fractio. grossi. ad subtiliorē reductio.

¶Si autem grossiorem fractionem ad subtiliorem tibi voluntariam velles reducere, debes numeratorem grossioris per denominatorem subtilioris multiplicare, & numerum productum per denominatorem grossioris diuidere: quo facto, numerus quotiens propositum manifestabit. Exempli gratia. efflagitas reducere decem secunda ad tertia? multiplicabis numerum denarium per ternariū, & proueniet numerus 30, quem per binarium denominatorem grossioris diuide: & pro quotienti habebis quindecim tertia: decem igitur secunda, reductorie, quindecim tertia efficiunt. Eodem modo si octodecim tertia ad quinta reducantur, multiplicabis 18 per quinarium, & proueniet 90, quem si diuidas per denominatorem grossioris fractionis, scilicet per 3, pro quotienti habebis 30 quinta: & sic reductorie, 18 tertia, 30 quinta constituūt. Quòd si viginti tertia ad quarta velles reducere, multiplicabis vigenarium per quaternarium, & proueniet numerus 80: quem si per ternarium diuidas, pro quotienti habebis viginti sex quarta: & residuum erit duo tertia vnius quarti. Nam quandocunque in tali reductione residuum esse contingat, id tale, fractionis fractio appellatur, quæ suam denominationem in recto sumit à denominatione grossioris fractionis, & alteram in obliquo à denominatione subtilioris fractionis habet.

$\frac{10}{2}$ } ad { $\frac{15}{3}$

$\frac{18}{3}$ } ad { $\frac{30}{5}$

$\frac{20}{3}$ } ad { $\frac{26}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$

Subtilioris fractionis ad grossiorē reductio.

¶Si autem subtiliorem fractionem ad grossiorem tibi voluntariam velles reducere: debes numeratorem subtilioris per denominatorem grossioris multiplicare, & numerum prouenientem diuidere per denominatorem subtilioris: quo facto, numerus quotiens propositum declarabit. Exempli gratia. Si duodecim quarta ad tertia velles reducere: multiplicabis duodenarium per ternarium, & proueniet numerus 36: quem per quaternarium diuide, & pro quotienti generabis nouem tertia. duodecim igitur quarta, nouem tertia, reductorie, efficiunt. Eodem modo si duodecim sexta ad quarta reducantur: numerus duodenarius per quaternarium est multiplicandus, & prouenit 48: quem si per denominatorem subtilioris fractionis, videlicet per senarium, diuidas, pro quotienti habebis octo quarta: quare deducitur duodecim sexta, octo quarta componere. Quòd si octodecim quarta ad tertia reducantur: numerum octodenarium per ternarium multiplicabis, & producetur numerus 54: quem per quaternarium diuide, & pro quotienti consurgent

$\frac{9}{3}$ multi. $\frac{12}{4}$ diui. $\frac{36}{p4}$ (9

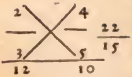
$\frac{8}{4}$ multi. $\frac{12}{6}$ diui. $\frac{48}{p6}$ (8

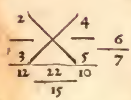
$\frac{18}{4}$ ✕ $\frac{54}{3}$ (12) $\frac{13}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ 3

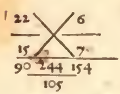
tredecim tertia, & residuum erit duo quarta vnius tertij. Nam quotiescunque in tali reductione aliquid est residuum, id fractio fractionis nuncupatur, cuius denominatio in recto sumitur à denominatione subtilioris fractionis, & denominatio in obliquo à denominatione grossioris habetur.

Duarum fractionũ diuersarũ ad vnam reductio.

SECVNDO NOTANDVM EST, si duæ fractiones diuersarum denominationum, siue diuersos denominatores habentes (quod idem est) tibi proponantur, & eas ad fractionem vnius denominationis reducere velles, debes in primis denominatorem vnius per denominatorem alterius multiplicare, & numerus productus, denominator communis dicetur: deinde numeratorem prioris fractionis in denominatorem posterioris ducas, etiam numerator secundæ fractionis in denominatorem prioris ducatur: quo facto, numeri prouenientes ex ijs duabus multiplicationibus simul addantur, & proueniens numerus, numerator communis dicetur: quo terminato, datas fractiones in aliquam fractionem reductas habebis. Exempli gratia, proponantur tibi istæ duæ fractiones reducēdæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$: in primis multiplicabis denominatorem prioris, qui est 3, per denominatorem posterioris, qui est 5, & proueniet numerus 15 pro communi denominatore. Postmodum, ad modum crucis numeratorem prioris in denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris in denominatorem prioris multiplicabis, & numeros prouenientes simul coniungas, & consurget numerus 22 pro communi numeratore. Habes igitur si $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ ad fractionem vnius denominatoris, siue vnius denominationis reducantur, ea erit $\frac{22}{15}$. Et si cognoscere velles quot sunt in vtraque datarum fractionum decimaquinta: oportet diuidas denominatorem communem in cuiuslibet fractionis denominatorem peculiarem, & numeri quotientes multiplicentur per numeratores proprios: quo facto, numeri producti intentum manifestabunt. Verbi gratia. vis cognoscere quot sunt in priori fractione decimaquinta? diuide communem denominationem videlicet 15, per 3, qui est denominator eiusdem prioris fractionis, & numerus quotiens erit 5, qui per numeratorem proprium, scilicet per 2, multiplicetur, & consurget 10. decem igitur in priori datarum fractionum dices decimaquinta inueniri. Et si in posteriori illarum fractionum velles cognoscere quot decimaquinta habentur, facies consimili modo. & reperies duodecim decimaquinta inueniri. Poteris hoc idem cognoscere longe facilius, si numeratorem prioris per denominatorem secundæ multiplices, & numeratorem secundæ per denominatorem prioris: nam si 2 numerator prioris fractionis per 5 denominatorem secundæ multiplices, prouenit 10. Et si numeratorem secundæ, puta quaternarium, per denominatorem prioris, scilicet per ternarium multiplices, duodenarium procreabis: in priori igitur fractione decem decimaquinta inuenies, & in posteriori duodecim. ¶ Si autem plures quàm duæ extiterint minutiæ, eo modo procedendum est. Dispositis in primis per ordinem fractionibus, denominatores adinuicem multiplicentur: sic vt primæ fractionis denominator per denominatorem secundæ multiplicetur: & proueniens ex multiplicatione numerus, per denominatorem tertię fractionis multiplicetur: & numerus productus in denominatorem quartæ minutiæ ducatur, & consequenter si plures fuerint fractiones: quo facto, proueniens ex talibus multiplicationibus summa, communis denominator appellabitur: deinde numeratorem communem sic produces, facta in primis duabus fractionibus operatione ac dictum est, illarum numeratorem communem per denominatorem tertiæ multiplicabis, & numerus productus per denominatorem quartæ multiplicetur: & consequenter hoc pacto: quibus terminatis numeratorem communem reperies, & ex consequenti completa erit reductio talium fractionum. Exempli gratia. Sint istæ tres fractiones $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$, quas ad vnam simplicem fractionem reducere cupis. Primo de duabus primis te expedias modo prius declarato: & habebis $\frac{22}{15}$. Deinde huius denominator in denominatorem tertiæ ducatur, & procreabitur 105, pro communi denominatore: postmodum numerator istius fractionis in denominatorem tertiæ ducatur, & numerator tertiæ in denominatorem istius multiplicetur: deinde numeri producti simul addantur, & consurget numerus 244, qui communis numerator dicetur: habes igitur si istæ tres fractiones $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$ ad vnam simplicem fractionem reducantur, ea







erit $\frac{244}{105}$. In cæteris conſimili proceſſu operaberis.

☞ Quorundam incuria neglectus eſt modus reducendi fractionum fractiones, qui ſe ad hunc fere modum habet. Ducantur numeratores in numeratores, & denominatores in denominatores, & reſultabunt fractiones vnius ſpeciei ſeu ſimplices, ita vt ex ductu numeratorum, numeratores reſultent: & ex denominatoribus, denominatores. Exemplũ, ſint reducendæ iſtæ fractiones ad ſimplicem, videlicet $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$. $\frac{4}{5}$. multiplicabis bis vnum per 4, reſultabit 8 numerator fractionis. Et deinceps ter quatuor per 5, habebis 60 denominatorem fractionis hac forma $\frac{8}{60}$.

☞ Fractiones mixtæ, ſic reducuntur ad ſimplices: in primis duc fractionis fractionem ad eandem ductu numeratoris in numeratorem. & (vt iam docui) denominatoris in denominatorem. deinde factis ſimplicibus fractionibus, eas ad vnam & eandem ſimplicem reducere potes per ſecundi notabilis doctrinam. vt $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{7}$. fiunt $\frac{2}{12}$ & $\frac{15}{35}$.

☞ Generalis eſt & regula admodum vtilis & neceſſaria neglecta de abbreuiationibus fractionum. Eſt autem huiuſmodi abbreuiatio nihil aliud, quàm pauciſſimis figuris repræſentare valorem fractionis alicuius, quæ multis figuris offertur, & quo pluribus, tanto fit obſcurior intellectui. Difficilius enim apprehẽdet intellectus hanc fractionem $\frac{500}{1000}$, quàm ſi hoc modo repræſentetur $\frac{1}{2}$. cum tamen vtriuſque ſit æqua poteſtas. Vnde hanc notabis regulam. Quaſcunque oblatas fractiones diuide per maximum numerum, qui tam numeratorem, quàm denominatorem numeret, & quotientes faciliorem prodent fractionem. vt ſi datam fractionem diuidas per 500, habebis in quotiente pro numeratore vnum, & in altero quotiente pro denominatore 2, quos ſic diſponas $\frac{1}{2}$ id eſt, medietas. eodẽmque modo in reliquis omnibus operare. Altera item eſt regula, qua abbreuiari poſſint fractiones magnæ, nempe per dimidiationem continuam, ſi fuerint numeri pariter pares, aut per alterius digiti paris diuiſionem, aut denarij ſubtractionem, aut cuiuſcunque numeri diuiſionem, qui modo vtrunque numeret numerum, videlicet numeratorem & denominatorem, ſed hoc vno obſeruato, vt numerus quotiens numeratoris pro numeratore: & denominatoris pro denominatore ſemper ſtatuatur. exempla aſſignare facillimum eſt, quare tranſeo.

TERTIO NOTANDVM EST, ſi integra cum ſimplici fractione reperiatur, hoc pacto ad ſimplicem fractionem debere reduci. Numerus integrorum multiplicetur per denominatorem fractionis, & producto numero addatur fractionis numerator: & inde conſurgenti numero ſupponatur idem denominator, virgula interpoſita. Exempli gratia. vis reducere 5 integra, & 4 tertia, ad ſimplicem fractionem: ipſa hoc pacto præſentetur 5 $\frac{4}{3}$: deinde multiplica numerum integrorum, puta 5, per denominatorem datæ fractionis, ſcilicet per 3, & conſurget 15: cui numerator fractionis addatur, & proueniet 19, numerator communis, cui ſupponatur denominator illius fractionis, videlicet 3, & ſub hac forma reductionem completam habebis $\frac{19}{3}$. ¶ Quòd ſi integra, & plures ſimplices fractiones in vnam ſimplicem fractionem reducere velles: in primis de numero integrorum, & prima fractione modo iam tacto te abſoluas: deinde fractionem ſimplicem conſurgentem ſimul cum alijs ſequentibus ad ſimplicem fractionem reduces, modo aſſignato in præcedenti notabili. ¶ Si vero integra, & fractionis fractio ſimul reperiantur, & ea ad ſimplicem fractionem velles reducere, debes in primis fractionis fractionem ad ſimplicem fractionem (☞ modo prius neglecto, per nos repoſito) reducere: poſtmodum operaberis vt iam dictum eſt. ¶ Et ſi integra cum multis fractionum fractionibus comprehendantur: reductis ijs fractionum fractionibus ad ſimplices fractiones: operaberis modo iam dicto. ¶ Ex omnibus his quæ dicta ſunt ſequitur. quibuſcunq; fractionibus præſentatis, qualiter ad ſimplicem fractionem ſunt reducendæ. Poſſunt enim prope infinitis modis combinationes fieri, & eiſdem factis, videre qualiter ad integra ſunt reducendæ, aut ad fractiones ſimplices, vel ſi ſimplices extiterint, qualiter ad ſubtiliores fractiones reducantur. De iſtis omnibus peculiarem ſermonem efficere, minus vtile reputamus: quare ad reliqua eundum eſt.

3 ¶ Additio in minutijs vulgaribus, eſt vulgarium fractionum in vnam

summam collectio. Et addere minutim, est minutias vulgares in vnam summam colligere.

¶Nulla in præsenti diffinito se offert difficultas pro additione, si debite quæ in præcedenti diffinito dicta fuere, apprehendantur: nihilominus succincte aliquid de hac specie dicemus.

PRIMO NOTANDVM EST, si simplices fractiones eiusdem denominationis velles addere, sola numeratorum fiat additio, & sub numero producto, denominator talis fractionis locetur, virgula inserta siue interposita. Exempli gratia, si $\frac{5}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{3}$ vis addere, solos numeratores addas adinuicem, & producetur numerus 15, sub quo denominator, videlicet 3, ponatur hoc pacto $\frac{15}{3}$ & completam reperies additionem. ¶Si vero duæ, aut plures simplices fractiones diuersorum denominatorum proponantur addendæ, debes omnino eodem modo operari, ac declaratum est in secũdo notabili præcedentis diffiniti: sic vt denominatores earundem adinuicem multiplicentur, & prouenies numerus, communis denominator appellabitur: deinde numerator primę per denominatorem secundæ multiplicetur, & numerator secundæ per denominatorem primæ: quo facto, numeri prouenientes simul addantur, & consurget numerator communis duarum primarum fractionum: deinde consimili modo operando, in cæteras fractiones (si plures fuerint) procedendum est. Exempla dare, est facillimum.

Fractionum additio.

SECVNDO NOTANDVM EST, si plures fractionum fractiones proponantur addendæ, eas esse reducendas ad simplices fractiones, modo prius signato: deinde addantur ac dictum est. Nam si has duas fractionum fractiones velles addere: scilicet $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{2}$. $\frac{5}{4}$ $\frac{2}{3}$. reducãtur prius ad has simplices fractiones $\frac{4}{6}$ $\frac{10}{12}$: deinde istæ duæ simplices fractiones simul addantur, & proueniet $\frac{108}{72}$, id est $\frac{3}{2}$, id est vnum integrum cum dimidio. Quòd si plures quàm duas fractionum fractiones addere velles: facies conformiter ad prius dicta in præcedenti diffinito.

Fractionũ fractiones quomodo addendæ.

TERTIO NOTANDVM EST, si integra & simplex fractio proponãtur addenda: debes numerum integrorum per fractionis denominatorẽ multiplicare, & productus numerus, numeratori fractionis addatur, & sic cõmunem numeratorem generabis: deinde sub eo denominator fractionis locetur: quo facto, terminatam additionem habebis, & hoc si vnica simplex fractio cum integrorum numero sumatur. ¶Quod si tres, aut plures simplices fractiones cum numero integrorum sumantur: te in primis ab integrorum numero, & prima fractione absolue: deinde genitam fractionem cæteris sequentibus modo iam dicto adijcies. Vbi autem integra, & fractionis fractio proponantur addenda: aut integra, & fractionum fractiones: vel integra, & simplex fractio cũ fractionis fractione: & consequenter mixtiones ordinando, operaberis iuxta ea quæ in præcedenti diffinito dicta fuerunt.

Integrorũ cũ fractio. additio.

4 ¶Subtractio in minutijs vulgaribus, est debita vulgarium fractionũ à minutijs vulgaribus ablatio, vt relicta inde summa habeatur. Et subtrahere minutim, est debite vulgares minutias à fractionibus vulgaribus auferre.

¶In huius diffiniti operatione certa inuenitur conuenientia cum operatione tertij diffiniti primi tractatus. Nam vt illic dictum est minorem numerum à maiore, vel ab æquali æqualem subtrahendum esse, & non maiorem à minore, impræsentiarum minor fractio à maiore, vel æqualis ab æquali subtrahi permittit: maiorem vero à minore deduci siue subtrahi, possibile nõ est. Et si petas, qualiter potest cognosci aliquam fractionem altera esse maiorem, æqualem, aut minorem: dico generaliter hac via posse dignosci. Reducantur ambæ fractiones, ad fractiones eiusdem denominationis. & tunc ea dicetur maior, euius numerator maior est: & ea minor, cuius minor est numerator. Est insuper in hac materia pro documento obseruandum, eam fractionem maiorem esse, cui minor est denominatio, & eam minorem, cui maior, cæteris paribus. Nam vnum tertium, maius est vno quarto: & quartum, quinto: quintum, sexto: & consequenter.

Maioritas fract. penes quid attẽdẽda

☞ Cæteris paribus dicit, quod pertinet ad numeratores. si enim numerator maioris denominationis, id est subtilioris fractionis, fuerit multo maior numeratore minoris denominationis, id est grossioris (vt ante vocauit) fractionis, nullũ tum signũ esse potest illam fractionem esse minorem altera, scilicet in qua minor est denominatio. Certum enim est $\frac{7}{4}$ à $\frac{4}{3}$ non posse subtrahi, quãuis in hac grossior sit denominatio, in illa autem subtilior. Nam cum reducuntur ambæ fractiones ad sexta, videbis ex posteriore $\frac{8}{6}$, ex priore vero $\frac{10}{6}$ & $\frac{21}{12}$ prouenire. vnde id intelligendum est, vbi numeratores sunt aut æquales, aut saltem non multum excedentes.

Simpliciũ fract. subtractio.

PRIMO NOTANDVM EST, si duæ proponantur fractiones simplices, eũdem denominatorem habentes, quarum altera ab altera subtrahi debeat, hoc modo esse operandum: subtrahatur minor numerator vnius à maiore numeratore alterius (si inæquales extiterint) & residuum supra denominatorem ponatur, virgula interposita. Exempli gratia, si à $\frac{7}{3}$ subtrahas $\frac{5}{3}$, pro residuo $\frac{2}{3}$ habebis. Vbi vero numeratores & denominatores æquales extiterint, subtracta vna fractione ab altera, residuum nullũ erit. Quòd si duæ proponantur fractiones simplices, diuersos denominatores habẽtes, earum denominatores multiplicabis, & consurgens numerus, denominator communis erit: deinde ad modum crucis, prioris fractionis numerator in denominatorem posterioris ducatur, & numerator posterioris per denominatorẽ prioris multiplicetur: quo facto, si cõsurgentes numeri fuerint inæquales, minor à maiore subtrahatur, & residuũ supra communẽ denominatorem, linea intermedia, ponatur. Exempli gratia. si vis $\frac{8}{12}$ à $\frac{7}{3}$ subtrahere, multiplica in primis denominatorẽ prioris, puta 12, per denominatorẽ posterioris, videlicet per 3, & cõsurget 36 pro denominatore cõmuni: deinde multiplica prioris fractionis numeratorem, scilicet 8, per denominatorem posterioris, videlicet 3, & consurget 24. postmodum posterioris fractionis numerator, scilicet 7, per denominatorem prioris, vtpote 12, & proueniet numerus 84, qui maior est 24. ideo ab ipso numerus 24 subtrahatur, & residuum, videlicet 60, supra communem denominatorem ponatur, linea interposita, & factam subtractionem reperies.

Fractio fractionũ qualiter subtrahẽdæ.

SECVNDO NOTANDVM EST, si aliquam fractionis fractionem ab altera fractionis fractione subtrahere cupis: oportet prius ad simplices fractiones reducantur: deinde operaberis omnino ac dictum est in præcedenti notabili. Quòd si duæ fractionum fractiones proponantur, est eodem modo faciendum. Hoc dixerim propter differentiam quę reperitur inter fractionem fractionis, & fractionem fractionum. Nam proprie eam fractionem fractionis dicimus, cui vnica est denominatio in recto, & vnica in obliquo, vt est ista $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$. Eam vero fractionem fractionũ appellamus, cui in recto quidem vnica denominatio est, sed duæ, aut plures in obliquo reperiuntur. Exemplũ $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{5}$: Nihilominus sæpenumero termini confunduntur, sic vt eam quæ fractionis fractio est, fractionem fractionum appellemus. Sed hac in parte de terminis contendendum non est.

Fractio fractiõis.

Fractio fractionũ

Fract. ab integris & ecõtra subtractio.

TERTIO NOTANDVM EST, si à numero integrorum aliquam simplicem fractionem subtrahere velles, vel econuerso: debet integrorum numerus per denominatorem fractionis, multiplicari. & si numerus productus fuerit maior numeratore fractionis, ab eo numerator talis fractionis subtrahatur: quòd si productus numerus minor extiterit numeratore fractionis, ab eo numeratore talis numerus subtrahatur: & semper vtroque modo residuum operis supra denominatorem ponatur, linea interposita. Eodem modo dicendum est, si ab aliquo numero integrorũ fractionis fractio subtrahi debeat, & ediuerso: facta prius reductione talis fractionis ad fractionem simplicem. Et si numerus mixtus ex integro & simplici fractione, proponatur subtrahẽdus ab aliqua simplici fractione: debes prius talem numerum mixtum in simplicem fractionem reducere, modo declarato in secundo diffinito. deinde operaberis iuxta dicta: & conformiter in cæteris operandum est, à prius dictis non discrepando.

☞ Subtractio in fractis numeris sic se habet, generaliter reducantur numeri ad eandem denominationem. tunc minor à maiori aut saltem æquali, subtrahatur. Quòd si numerus à quo fieri habet subtractio, sit integrorum & fractorum, nec possit fieri aliàs

ſubtractio, accommodetur vnitas ab integris ad fractos numeros ſecundum proportionem, & tunc commoda erit ſubtractio. vt ſi quis vellet ſubducere $\frac{5}{4}$ de 13 & $\frac{5}{6}$, oportet in primis reducere fractiones ad eandē denominationem, fient de $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{12}$. & de $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$. ſed quia 15 à 10 non poſſunt ſubtrahi, mutuetur vnitas de 13 integris, quæ valebit 12, quæ cum $\frac{10}{12}$ conſtituent $\frac{22}{12}$ à quibus ſubtractis $\frac{15}{12}$, manebunt 12 integra & $\frac{7}{12}$. Ex hoc facilis tibi erit & in alijs numeris qui vel integrorum tantū, vel integrorum cū fractionibus, & fractionibus fractionum offerantur, ſubtractio, ſi ſemper ad eandem denominationem fractiones omnes, modis ſupra notatis reduxeris.

¶Multiplicatio, eſt vnius ſimplicis fractionis procreatio: cuius numerator, & denominator ad ſuos multiplicandos denominatione extrinſeca apprehenſos, in eadem ſe habent proportione, qua multiplicantes etiam extrinſeca appellatione, ſe habent ad vnitatem. 5

¶Hæc diffinitio clara admodum ſe offert, intellecta diffinitione multiplicationis pręcedentis tractatus: & clarius longe apparebit in ſequentibus tribus notabilibus.

☞Multiplicationis huius vtilitas maxime conſiſtit in hoc, ꝙ cognoſcimus valorem fractarum fractionum: & item plurium fractionum diuerſarū denominationum in eandem reductionē, vt ſecundo diffinito huius tractatus abunde viſum eſt. Nam ſi ignores quota pars vnius integri ſit hæc fractionum fractio $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{4}$, multiplica denominatores in ſe mutuos, dicendo, ter quinque quater, ſunt 60. Et numeratores ſimiliter, dicēdo, bis duo ſemel, ſunt 4, numerator 60 partium $\frac{4}{60}$, quę iā ſimplex fractio abbreuiata, dat $\frac{1}{15}$ id eſt vnam decimamquintā partem alicuius integri. Per hanc item multiplicationem poteris dimidiare quęlibet numerum fractum, ſi multiplices eum per $\frac{1}{2}$: aut triſecare, ſi per $\frac{1}{3}$ & ſic conſequēter. Aut ſi numerator ſit par, capiendo eius medietatem. ſi impar, duplando denominatorem. vt $\frac{3}{4}$ medietas eſt $\frac{3}{8}$. & $\frac{4}{5}$ medietas eſt $\frac{2}{5}$ &c.

Fractiōis ſimplicis multiplicatio.

PRIMO NOTANDVM EST, ſi vnica ſimplex fractio proponatur multiplicanda, eius duntaxat numerator eſt multiplicandus, ſub producto numero denominatorem propoſitæ fractionis ponendo. Exempli gratia, ſi $\frac{7}{3}$ proponātur tibi duplanda: duplabis 7, numeratorem datæ fractionis, & producetur numerus 14, pro numeratore, ſub quo, 3 denominatorem pone: & talem inuenies cōſurgentem operationem $\frac{14}{3}$. Quòd ſi data illa fractio per 3 eſſet multiplicanda, prouenirent $\frac{21}{3}$. & ſi per 4 multiplicetur, conſurgerent $\frac{28}{3}$, & conſequenter hoc pacto. Si vero aliquā ſimplex fractionū fractio proponatur multiplicanda: ſolum numerator rectus multiplicetur, & ſub numero producto, eius rectus denominator locetur, cęteris ſequētibus ſe habentibus ac prius. Exempli gratia. Vis duplare, ſiue per 2 multiplicare $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$? duplabis 2, rectum numeratorem, & conſurget 4, ſub quo 3 rectum denominatorem pone, & quod ſequitur maneat intactum: & talis operatio manebit $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{4}$. Vbi autem datam fractionis fractionem velles triplicare, eodem modo facere oportet: & conſurgent $\frac{6}{3}$ $\frac{1}{4}$. Et ſi quadrupletur, habebis $\frac{8}{3}$ $\frac{1}{4}$: & conſequenter hac arte procedēdum eſt. Si autem aliqua mixta fractio, vel aliqua mixta fractionum fractio proponatur multiplicāda: fac conformiter ad iam dicta, multiplicādo quamlibet fractionem ſimplicem incluſam in aliqua tali mixta fractione. Etiam vbi mixta fractio proponatur multiplicanda, quæ ex integro, & ſimplici fractione, & fractionis fractione componitur, eſt conformiter multiplicanda: ſic vt integrum, & fractio ſimplex, & fractionis fractio ad, ſenſum datum multiplicentur. Nec opus eſt pro iſtis noua deprehendantur exempla.

Fractionum fractio quomodo multiplicāda.

Præcedētium fra. in mixtis additio.

SECVNDO NOTANDVM EST, ſi duæ ſimplices fractiones eundem denominatorem habentes, proponantur multiplicandæ: numeratores earundem pręciſe multiplicentur, & ſub numero producto, denominator talium fractionū locetur. Verbi gratia, ſint iſtæ duæ ſimplices fractiones multiplicandæ $\frac{5}{3}$ $\frac{4}{3}$: multiplicabis 5 numeratorem prioris per 4, numeratorem poſterioris, & generabis numerum 20, ſub quo 3, qui vtriuſque fractionis eſt denominator, locetur: & talem habebis operationem $\frac{20}{3}$. Quòd ſi duæ fractionum fractiones, eundem denominatorem habentes præſentētur

Præcedētiū eundē denominatorem habentiū additio.

multiplicandæ:solos earundem numeratores adinuicem multiplicabis,& sub numero producto,talium fractionum denominator locetur. Facile est in his exemplū assignare. Si vero duæ simplices fractiones,diuersos denominatores habentes,proponantur multiplicandæ:fac vt prioris numerator per numeratorem posterioris multiplicetur, & proueniens numerus, numerator communis dicetur : deinde denominator prioris per posterioris denominatorem multiplicetur,& consurgens numerus, denominator communis erit. Exempli gratia,vis multiplicare $\frac{4}{3}$ per $\frac{5}{6}$,multiplica in primis dictarum fractionum numeratores,scilicet 4,per 5,& consurget 20 pro communi numeratore : postmodum denominatores multiplicentur,videlicet 3 per 6, & proueniet numerus 18 pro denominatore communi:quo peracto,completam sub tali forma reperies operationem $\frac{20}{18}$: & secundum istum operandi modum,diffinitum venit intelligendum. Si autem duas simplices minutiarū minutias,diuersos denominatores habentes, multiplicare velles: est eodem modo operandum: sic vt earundem numeratores multiplicētur,& productus inde numerus,numerator communis dicetur:postea earum denominatores etiam multiplicentur,& productum communis denominator erit. Exempli gratia. vis multiplicare $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{2}$:per $\frac{7}{6}$ $\frac{8}{9}$? Multiplica numeratores ipsarum,& consurgent pro numeratore communi 1120:deinde datarum fractionum denominatores multiplicentur, & pro communi denominatore habebis 324 : quo peracto, sub tali compositione reperiets operationem $\frac{1120}{324}$. In cæteris huiusmodi fractionibus pari arte operandum est.

Precedētiū fract. diuersos denominatores habentiū multiplicatio.

TERTIO NOTANDVM EST. *Si aliqua simplex fractio proponatur multiplicanda per integra:* debes per numeratorem talis fractionis, integrorum numerum multiplicare.& numerus consurgens,numerator communis dicetur, sub quo denominatorem fractionis locabis,& finitita erit operatio. Exempli gratia. vis multiplicare $\frac{7}{3}$ per 5 integra? multiplica 7,numeratorem fractionis per 5 numerum integrorum, & consurget pro communi denominatore 35,sub quo,3 denominator datę fractionis locetur, & completam sub tali forma operationem inuenies $\frac{35}{3}$. Omnino eodem modo est operandum si integra per fractionem simplicem velles multiplicare. Si autem aliqua simplex fractionis fractio per numerum integrorum proponatur multiplicanda: operaberis multiplicando numeratorem fractionis per numerum integrorum, & sub producto (qui dicitur numerator communis) productum ex multiplicatione denominatorum fractionis ponatur. Exempli gratia,si $\frac{2}{2}$ $\frac{4}{4}$ per 9 integra multiplicentur:fac vt numerator datæ fractionis per 9 numerum integrorū multiplicetur,& proueniet pro numeratore communi 72. deinde denominatores datæ fractionis multiplicentur, & consurget pro communi denominatore 8, sub numeratore communi locandus: & talis in fine operatio reperietur $\frac{72}{8}$. Si autem in numeris mixtis velles operari : opus est vtaris reductione,de qua diffuse actum est diffinito secundo huius tractatus. Nam si aliquis numerus integrorum cum aliqua simplici fractione proponatur multiplicandus per alteram simplicem fractionem: opus est vt numerus ille integrorum ad simplicem fractionem reducatur:deinde operaberis vt dictum est. Exempli gratia. si 4 integra cū $\frac{4}{3}$ proponantur multiplicāda per $\frac{7}{5}$:oportet numerū integrorum,scilicet 4,per denominatorē fractionis prioris ipsi adiūctæ multiplicare,& producetur 12:cui numerator prioris fractionis,videlicet 4,addatur,& resultabit numerus 16,pro numeratore communi,cui supponatur eiusdem fractionis denominator,scilicet 3.& sub tali forma factam reductionem habebis $\frac{16}{3}$:deinde hanc simplicem fractionem,quæ habita est ex reductione,multiplicabis per posteriorem prius datarum fractionum,videlicet per $\frac{7}{5}$ & consurget talis simplex fractio $\frac{112}{15}$. In cæteris mixtis fractionibus (si quæ dicta sunt intelligantur) facile est operari.

Frac. per integra multiplicatio.

Mixtarū fract. multiplicatio

☞ Nunquam integrorum numerus,cui fractiones adhærent, multiplicetur, nisi prius in suas fractiones reductus fuerit & additus numeratori. Sed si contingat nullas adesse fractiones numero integro multiplicando per fractionem simplicem,aut contrà,vt 18 per $\frac{4}{5}$,aut $\frac{4}{5}$ per 18 multiplicanda sunt integra:integra per numeratorem fractionis, aut è conuerso, productūmque diuidendum per denominatorem, & completam ha-

☞ Simplicē intellige eam quæ illi adhæret, & hoc fit si nūerus integrorū multiplicē per denominatorē, & pducto addatur nūerator fractiōis, tandē subscripto denoīatore, simplicem habebis fractionē cui⁹ numerator per numeratorē, & denominator per deno-

bes operationem. vt in dato exemplo dico quater 18 sunt 72, quod diuido per denominatorem 5, & habeo 14 integra & $\frac{2}{5}$.

minatorē alterius multiplicent. & facta erit multiplicatio, cuius si nūeratorē per denominatorem diuiseris, ad integra reduces.

¶Diuisio, est vnius simplicis fractionis procreatio, cuius numerator & denominator ad suos multiplicandos denominatione extrinseca apprehensos, in eadem se habent proportione, qua multiplicantes etiam extrinseca appellatione se habent ad vnitatem. 6

¶Hæc diffinitio nulla ex parte differt verbaliter ab ea quæ tacta est in præcedenti diffinito: nihilominus differt in modo operationis ex ea deducibili, qui ad modum crucis fieri habet. Sed hæc omnia diffusius in sequentibus notabilibus apparebunt.

Vnicæ simplicis fra. partitio.

PRIMO NOTANDVM EST, si sola vna simplex fractio proponatur diuidenda: est multiplicandus solus eius denominator, & numerus productus sub numeratore propositæ fractionis locetur, & factum erit. Verbi gratia. si $\frac{5}{4}$ proponantur dimidianda, seu per 2 diuidenda: multiplicabis illius fractionis denominatorem per 2, & consurget 8, denominator communis, quem sub 5 numeratore datæ fractionis pone: & completa sub hac forma operatio manebit $\frac{5}{8}$: & si data illa fractio tripartiatur, seu per 3 diuidatur, consurget pro quotienti hæc fractio $\frac{5}{12}$. Si vero illam fractionē quadripartitam efficias, habebis pro quotienti $\frac{5}{16}$: & consequenter hoc modo. ¶Si autem aliqua simplex fractionis fractio proponatur diuidenda: rectum denominatorem multiplicabis, & productum sub recto numeratore locetur, cæteris manentibus intactis. Verbi gratia. Vis dimidiare, vel per 2 diuidere (quod idem est) $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{5}$? dupla datæ fractionis rectum denominatorem, videlicet 2, & proueniet 4 sub numeratore recto illius fractionis ponendus, cæteris intactis manentibus: & operatio talis erit $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$. Quòd si illa fractio tripartiatur, inuenies $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{5}$. & si quadripartiatur, consurgent $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{5}$. & hoc pacto cōsequenter. ¶Si vero aliqua mixta fractio, vel mixta fractionum fractio proponatur diuidenda: facies vniformiter ad ea quæ dicta sunt obseruando: sic vt de qualibet simplici fractione (modo iam dicto) te absoluas. Vbi autem mixta fractio offeretur diuidenda, quæ ex integro, & simplici fractione, & fractionis fractione componitur: fac cōformiter ad iam dicta: sic vt tres partiales fiant diuisiones, ex quarū quotiētibus vnus quotiens mixtus consurgat.

Fract. fractio, quomodo partienda.

Mixtarū frac. diuisio.

Diuersorū fract. inter se partitio.

SECVNDO NOTANDVM EST, si duæ simplices fractiones eundem denominatorem, diuersosve habentes, proponantur diuidendæ: sic vt altera per alteram diuidatur: debes eas hoc pacto locare: fractio diuidēda in parte sinistra ponatur, & fractio per quam debet diuidi, in dextra manu locetur: deinde numerator diuidendæ fractionis in denominatorem alterius ducatur, & consurgens numerus, numerator cōmunis dicetur: postmodum denominator diuidendæ fractionis in numeratorem alterius fractionis ducatur, & proueniens numerus (qui denominator communis dicetur) sub communi numeratore ponatur, virgula interiecta: quo finito, completam operationē habebis. Exempli gratia. Vis diuidere $\frac{4}{3}$ per $\frac{5}{6}$? multiplica 4 per 6, & proueniet numerus 24, qui numerator communis appellatur: postmodum multiplica 3 per 5, & procreabis 15, communem denominatorem, quem sub communi numeratore locabis, linea interposita: quo peracto, talem operationem sub hac forma completam habebis $\frac{24}{15}$. Et in hoc sensu intelligendum est textuale diffinitum. ¶Si autem duæ simplices fractionum fractiones eundem denominatorem, aut diuersos habentes assignentur diuidendæ: conformiter operandum est ad iam dicta, sic vt diuidenda fractio priori loco ponatur, & posteriori sede fractio, quæ diuisor appellatur, locetur, & ad modū crucis prioris fractionis numerator in denominatorem posterioris ducatur, & numerus proueniens, numerator communis dicetur: deinde denominator prioris fractionis in numeratorem posterioris ducatur, & consurget denominator communis, locandus sub communi numeratore virgula interposita. Exempla assignare tu ipse poteris.

$\frac{4}{3} \times \frac{5}{6} \quad \frac{24}{15}$

☞ Cōformiter ad iam dicta, intellige reducēdas esse fractionum fractiones ad simplicem & vnā, similiter & diuisoris fractionum fra-

Frac. per integra diuisio.

TERTIO NOTANDVM EST, si aliqua simplex fractio detur diuidenda per numerum integrorum: debes numeratorem talis fractionis pro communi numera

tore recipere, & denominatorem eiusdem per numerum integrorum multiplicare, & productus inde numerus sub numeratore talis fractionis (virgula interiecta) ponatur: & facta erit operatio. Exemplum. Vis diuidere $\frac{4}{3}$ per 5 integra? fac vt 4 pro numeratore operis recipiatur: deinde multiplices 3 per 5, & consurget 15 denominator communis, qui sub 4 locetur, virgula interposita: & sub hac forma operationem inuenies $\frac{4}{15}$. Si autem aliqua simplex fractionis fractio per numerum integrorum proponatur diuidēda: facies eodem modo, reductis prius fractionibus ad simplicem, ac dictū est. Quòd si detur simplex fractio per numerum mixtum ex integro, & simplici fractione diuidenda: oportet, antequam fiat diuisio, quòd mixtus ille numerus ad simplicē fractionem reducatur, conformiter ad dicta in secundo diffinito huius tractatus: deinde operaberis vt dictum est. Pari modo est faciendum, si aliqua simplex fractionis fractio proponatur diuidēda per numerum mixtum ex integro & simplici fractionis fractione: & consequenter in cæteris combinationibus mixtis, quæ fieri possunt, operaberis ad prius dicta respiciendo. Ex his omnibus quę in isto, & in pręcedenti diffinitis dicūtur: facile comprehēditur fractiones vulgares decrescere in multiplicatione: in diuisione vero augmentum sumere, quæ tamen videntur esse repugnantia multiplicationis, & diuisionis naturis. Nihilominus si recte concipiantur, nulla inde oritur repugnantia.

ctiões ad eandem: deinde operare iuxta regulam.

Corollarium.

7 ℭOperatio vulgarium fractionum in progressione, & quadrata atq; cubica radicum extractione: est debita, ac proportionata operatio ijs tribus operationibus, quæ sexto, octauo, & nono diffinitis primi tractatus tactæ fuerunt.

ℭ*Nullam impræsentiarum discretam diffinitionem assignamus pro progressione, aut pro radicum extractione, quemadmodum etiam in præcedenti tractatu fecimus: & ideo est, quia parum differunt operationes harum trium specierum ab iis quæ in primo tractatu ponebantur: ideo sub breuitate his tribus notabilibus absoluentur.*

De progressione fract.

PRIMO NOTANDVM EST duplicem in hac parte progressionem inueniri, scilicet arithmeticam, & geometricam. & in vtraq; earum operandum est per additionem, aut conformiter ad duas regulas tactas sexto diffinito primi tractatus. Seruabis tamen in hac parte istud documentum. Omnes fractiones progressiuo ordine se habentes, in eodem denominatore communicant. Si igitur istæ fractiones proponantur, quæ arithmetica progressione se habent, videlicet $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{5}$: debes ipsas addere modo declarato tertio diffinito huius tractatus: & consurgent $\frac{15}{5}$ pro summa. Et si iuxta tenorem prioris regulæ habitæ in primo tractatu sexto diffinito velles operari: omnino eandem summam generabis. Quòd si istæ fractiones proponantur, quæ geometrica progressione se habent, scilicet $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{16}{5}$, in ipsis operaberis per additionem modo iam declarato, & producetur summa $\frac{31}{5}$. & eadem habebitur, vbi iuxta secundę regulæ tenorem positæ in primo tractatu, velles operari.

Radicum extractio in quadratis. Documētum.

SECVNDO NOTANDVM EST, parum aut nihil radicum extractionem in quadratis in hac parte differre ab ea quæ visa est octauo diffinito primi tractatus. Est tamen istud documentum potissime obseruandū, scilicet. Si diuersorum denominatorum aliquæ proponantur fractiones, oportet ad vnam simplicem reducantur: deinde in eius numeratore radix quadrata inueniatur, pariter & in denominatore, vel saltem radix maximæ partis numeratoris & denominatoris, ad sensum habitum in primo tractatu. Exempli gratia. Si huius simplicis fractionis $\frac{25}{16}$ quadratam radicem cupis inuenire: operabere vt dictum est octauo diffinito primi tractatus, & inuenies $\frac{5}{4}$ pro radice illius fractionis. Nā 5, radix est quadrata numeratoris: & 4, radix quadrata denominatoris: quare dicere oportet quòd $\frac{5}{4}$ quadratam efficiunt radicem $\frac{25}{16}$. Vnde est aduertendum q̃ omnis radix quadrata, quæ à simplici fractione extrahitur, etiam simplex fractio dicitur, cuius numerator est radix quadrata numeratoris, & denominator radix denominatoris: quare quotiescūque proponetur aliqua simplex fractio, in cuius numeratore vel denominatore, non potest inueniri radix quadrata, cessandum est ab

operatione. Si vero hæc simplex fractio $\frac{18}{13}$ præsentetur, ab ea radicem quadratā subtrahere non potes: ideo radix quadrata maximæ partis in qua potest inueniri, subtrahatur, & ea erit $\frac{4}{3}$: & pro residuo $\frac{2}{4}$ manebunt. dic in cæteris consimili modo.

TERTIO NOTANDVM EST eodem modo esse operandum in cubica radicum extractione, ac in primo tractatu dictū est. nam si tibi proponatur hæc simplex fractio $\frac{67}{15}$, in qua radicem cubicam vis reperire: abstrahe in primis à numeratore radicem, deinc à denominatore radix cubica extrahatur, & inuenies facta operatione pro radice $\frac{4}{2}$, & pro residuo $\frac{3}{7}$. Hinc deducitur radicem non esse cubicam, postquā aliquod est residuum. Quòd si nullum esse residuum contingat: tunc cubica est censenda. vt si à $\frac{125}{27}$ cubicam extrahas radicem, ea erit $\frac{5}{3}$, & nihil pro residuo manebit. Tenebis tamen in hac parte illud documentum, quod in præcedenti notabili habetur, vt nunquam radix extrahatur à numeratore, si in denominatore non sit radix reperibilis: nec a denominatore etiam abstrahatur, si in numeratore non sit reperibilis.

Cubicæ radicis in fract. extractio.

DE QVAESTIONIBVS, QVAS COMMVNITER LOquentes aureas dicunt, tractatus quintus.

ALienarum rerum admodum curiosum fastidi, ait Chilo philosophus sapientissimus. Ne igitur fastidio habear, quippe qui in re aliena viro philosopho longius æquo immorer, quàm potero breuissime quæ sequuntur expediam: & ad edocendam illam scientiarum illustrissimam philosophiam, nostrum calamum dirigemus. Nam Aristonymus ille Chius, eos omnes qui circulares scientias sectantes, philosophiam negligebant, procis Penelopes comparabat: qua cum minime possent potiri, ad ancillas se conuertebant. Nihilominus iuxta Epicteti sententiam, parua primū admirari oportet, si maioribus digni cupimus videri. Ponam igitur in hoc quinto, & huius libri vltimo tractatu vnam regulam fundamentalem, quam de tri, priores nostri nuncupauerunt: deinde duodecim conditiones subijcientur: postmodum aliquot quæstiunculas mouebo: demum labores nostros quadam ioculatoria, eadémque faceta regula finiemus.

Chilo

Aristonymus.

Epictet.

REGVLA FVNDAMENTALIS.

¶Tribus numeris per ordinem dispositis, scilicet emptionis, precij, & quæstionis: numerus medius, per tertium est multiplicādus, & prouenens numerus, per primum est diuidendus: & numerus quotiens, propositæ quæstionis numerus nuncupabitur.

¶Hæc regula est huius tractatus fundamentum, & communiter de tri nuncupatur, hoc est de tribus in ea positis numeris, quorum primus emptionis seu rei emptæ numerus dicitur: secundus numerus precij appellatur: tertius autem propositæ quæstionis numerus nūcupatur, & ij tres numeri veniunt eo pacto locandi. Numerus emptionis, seu rei emptæ primo loco est ponendus: secundo autem loco, precij numerus ponatur: & tertio, numerus quæstionis locetur. Exempli gratia. Si quatuor vlnæ panni, tribus ducatis emantur, quæritur, quanti quadraginta vlnæ consimilis panni poterunt venundari? disponantur isti tres numeri, ac dictum est, & vt sequens forma ostendit. 4, 3, 40, deinde multiplica secundum numerum, scilicet 3, per tertium, videlicet 40, & proueniet numerus 120: quem per primum numerum diuide, videlicet 4, & quotiēs numerus erit 30: qui quæstionem soluit. Habes igitur, si 4 vlnę panni, tribus emantur ducatis, 40 vlnæ consimilis panni triginta ducatis poterunt venundari. In cæteris huiusmodi quæstionibus, est consimili arte operandum.

CONDITIONES.

¶Primus numerus qui emptionis nuncupatur, cum tertio numero 1

qui quæſtionis dicitur, debet re & nomine conuenire.

¶Defectu illius conditionis, ad hanc quæſtionem non eſt reſpondendum, *Si quinque equi, quadraginta emantur ducatis, quanti poterũt emi boues triginta?* Non enim con ueniunt re ipſa equi, & boues. Eodem modo ad quæſtionem reſpondendum non eſt, *Si tres libræ croci, ſeptem venundentur francis, quanti viginti vnciæ croci poterunt venundari?* Non enim conueniunt in nomine, vnciæ cum libra. Nihilominus, ſi ad vn-cias, libræ reducantur, ſic vt primum & tertium numerum eiuſdem denominationis ef-ficias, ad quæſtionem poteris reſpondere.

2 ¶Numerus ſecundus, & quartus qui ex operatione producitur, de-bent re & nomine conuenire.

¶Ex effectu huius cõditionis, male reſpondetur ad hanc quæſtionẽ, *Si tres vlnæ pan-ni, ſcutis quatuor venundentur, quanti venundabuntur nouem vlnæ conſimilis panni,* dicendo 420 duodenis venundari, quamuis ita ſit. nam duodecim ſcuta quibus nouem vlnæ venundabuntur, 420 duodenos efficiunt: debet igitur quartus numerus nomine & re correſpondere ſecundo.

☞ Scuto vni, vt in pręcedẽtibus, 35 du-odenos aſſignat non 41 vt hoc tempore fieri ſolet, alioqui ꝓ 420 reponẽdi eſſent 492 duodeni, ſexta ferè parte addita. idem emenda in cõ-ditione quarta.

3 ¶Talis geometrica proportio debet eſſe inter ſecundum & quartum numerum, qualis inter primum & tertium habetur: & talis debet eſſe geometrica proportio inter tertium, & quartum numerum, qualis in-ter primum & ſecundum reperitur.

¶Exempli gratia, ſi quinque vlnæ panni, viginti venundentur ducatis, quanti pote-runt venundari conſimilis panni duodecim vlnæ? dabis igitur, ſi per regulam opereris, pro quarto numero 48 ducatos: talis enim eſt proportio ſecundi numeri, puta 20, ad quartum, videlicet 48, qualis inter primum, & tertium reperitur: vtrobique enim eſt proportio ſubdupla ſuperbipartiens quintas. Etiam talis eſt proportio inter tertium & quartum numerum: qualis inter primum & ſecundum reperitur: nempe vtrobique ſub-quadrupla proportio habetur.

☞ Ad cognoſcẽdũ ánne eadẽ ſit ꝓpor-tio primi ad tertium & ad ſecundum quę eſt ſecũdi ad quartũ & tertij ad quartũ, accipiãtur ęque mul tiplices nũeri ad pri mũ & tertiũ, itémq; æque multiplices ad ſecũdũ & quartũ, fu erit'q; multiplex pri mi, ſic ſe habens ad multiplicẽ ſecũdi, ſi-cut multiplex tertij, ad mltiplicẽ quarti, quãtum vel ad addi tionẽ vel diminutio nẽ aut æqualitatem attinet, erit propor-tio primi eorũ ad ſe cundũ ſicut tertij ad quartũ: quẽadmodũ habet 6 diffinitio 5 lib. elementorũ Eu-clidis, & Cãpanus ſu per 16 eiuſdẽ de quã titate cõtinua. idem demonſtratur in nu meris lib. 7 propoſi-tione 14.

4 ¶Si numerus diuidendus fuerit diuiſore minor, in tot partes reſolua-tur, vt per diuiſorem diuidi permittat: deinde per diuiſorem diuidatur, & quotiens, quartum numerum declarabit.

¶Exempli gratia, ſi triginta capi, tribus ſcutis venundentur, quæritur, quanti quatuor capi conſimilis valoris poterunt venundari? multiplicabis igitur ſecundum regulæ te-norem, tertium numerum, videlicet 4, per 3 ſecundum numerum, & proueniet 12, qui per primum, videlicet 30, diuidi non poteſt: ideo numerus 12, qui ſcutorum dici-tur, in duodenos reſoluatur: & procreabis numerum 420, quem per primum nume-rum diuide: & numerus quotiens, qui quartus nuncupatur, 14 duodenorum erit. Ha-bes igitur ſi triginta capi tribus ſcutis venundentur, 4 conſimiles capi, 14 duodenis ve-nundabuntur. Et ſi dicas, id quod dictum eſt, ſecundæ conditioni obuiare, in qua di-ximus numerum ſecundum debere correſpondere quarto re & nomine: dico illud in-telligendum fuiſſe, vbi numerus productus maior numero primo ſeu diuiſore fuiſſet, ſic vt nullam reſolutionem pateretur.

5 ¶Si facta diuiſione aliquid fuerit reſiduum, id eſt reſoluendum in nu-merum, qui per primum diuidi poſſit: & ſi ex ſecũda diuiſione aliquid extiterit reſiduum: id etiam in numerum reſoluatur, qui per primum diuidi permittat: & toties reſidui fiat reſolutio, pariter & diuiſio, vſque-dum nullum tale deprehendatur.

¶Exempli gratia, ſi 4 vlnæ panni, 5 ſcutis venundentur, quanti 23 conſimilis venun-

3

dabuntur? facta igitur multiplicatione tertij numeri per secundũ, consurget numerus 115, qui si per primum diuidatur: numerus quotiẽs erit 28. & supersunt 3 scuta diuidẽda, quæ in duodenos resoluantur, & procreabis 105 per 4 diuidẽdos, & numerus quotiens erit 26 duodeni, & residuum est vnus duodenus, qui in turonos resoluatur, & 12 habebis: quos si per 4 diuidas, numerus quotiẽs erit 3, nullo residuo manente. Habes igitur, si 4 vlnæ panni, 5 scutis venundentur, 23 vlnæ consimilis panni 28 scutis cum 26 duodenis, & 3 turonis venundabuntur.

¶Si secundus ex integro, & fractione fuerit mixtus: debet antequam per regulam operetur, in aliquam simplicem fractionem resolui: deinde operatio fiat. 6

¶Exempli gratia, si tres vlnæ panni venundentur scutis 2 $\frac{3}{4}$, quanti septem vlnæ consimilis panni poterunt venundari? debes igitur antequam opereris secundum regulam fundamentalem, resoluere secundum illum numerum qui componitur ex integro & fractione: quod facies secundum quod declarauimus in secundo diffinito præcedentis tractatus: & inuenies $\frac{11}{4}$, deinde operari oportet iuxta tenorem regulæ, multiplicando illam simplicem fractionem per tertium numerum, videlicet per 7, & producetur numerus $\frac{77}{4}$, quem per primum numerum, scilicet 3, diuide, & numerus quotiẽs erit $\frac{77}{12}$, qui quartus numerus nuncupatur. Ex quibus omnibus patet, quòd si tres vlnæ panni scutis 2 $\frac{3}{4}$ venũdentur, 7 vlnas venũdari $\frac{77}{12}$ scutis, quæ 6 scuta efficiunt, cũ $\frac{5}{12}$ vnius scuti.

¶Si secundus numerus ex integro & simplici fractione, & fractionum fractione extiterit compositus: reducendus est ad aliquam simplicem fractionem: deinde fiat operatio secundum fundamentalis regulæ tenorem. 7

¶Exempli gratia: si 7 vlnæ panni venundentur scutis 7 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{1}{3}$ scuti, quanti venundabũtur 15 vlnæ eiusdem panni? Reducatur fractionum fractio primum ad simplicem fractionem, multiplicando numeratores in se, & denominatores in se etiam, & creabitur talis simplex fractio $\frac{4}{12}$. deinde hæc fractio priori addatur, multiplicando numeratorẽ vnius per denominatorem alterius, & econuerso, & numeri ex multiplicationibus producti simul addantur, & numeratorem additionis habebis: postmodum denominatores illarum fractionum per se multiplicentur, & communis denominator creabitur: quibus factis, compositam sub tali forma operationem habebis $\frac{36}{36}$. Sed quoniam omnis illa fractio valet integrum, cuius numerator denominatori est æqualis, ideo non opus est alia septem integra ad fractiones reducere: addatur igitur id integrum alijs 7, & creabitur integrorum, siue scutorum numerus 8, per quem tertium numerum, scilicet 15, multiplicabis, & proueniet 120, quem per primum numerum diuide, videlicet per 7, & numerus quotiẽs siue quartus numerus productus erit 17 scutorum cũ $\frac{1}{7}$ parte vnius scuti: habes igitur, si 7 vlnæ panni venundentur 7 scutis, & $\frac{2}{3}$ cum $\frac{4}{4}$ $\frac{1}{3}$ scuti, 15 vlnæ consimilis panni venundabuntur 17 scutis cum $\frac{1}{7}$ parte vnius scuti.

¶Si in primo vel in tertio numero, aut in ambobus fractionem esse cõtingat: oportet illos numeros ad simplices fractiones reduci: deinde secundum regulam poteris operari. 8

¶Exemplum, si tres vlnæ panni, cum $\frac{3}{5}$ vnius vlnæ, 4 emantur scutis: quanti poterunt 5 vlnæ cum $\frac{3}{4}$ venundari? Antequam respondeas ad quæstionem, oportet primum numerum in fractionem simplicem resoluere, videlicet in $\frac{18}{5}$ vnius vlnę: deinde tertius numerus in fractionem etiam simplicem resoluatur, scilicet in $\frac{23}{4}$. quo facto, per 4, secundum numerum, tertius multiplicetur, & creabuntur $\frac{92}{4}$. quæ si per primum diuidantur, iuxta ea quæ docuit secundum notabile 6 definiti 4 tractatus, scilicet $\frac{18}{5}$ numerus quo-

tiēs erit $\frac{450}{72}$ quæ 6 scuta efficiunt cum $\frac{18}{72}$, id est $\frac{7}{18}$ scuti, quibus 5 vlnæ cum $\frac{3}{4}$ venunda buntur. Consimili modo operandum est, vbi in primo numero ponitur fractio, non posita in tertio, etiam si in tertio habeatur, non habita in primo.

9 ¶ Si cuilibet trium numerorum fractionem addi contingat: quilibet eorum ad simplicem fractionem reducatur: postmodum per regulam opereris.

¶ Exemplum, si 6 vlnæ panni, cum $\frac{2}{3}$ venundentur 6 scutis, cum $\frac{3}{4}$: quanti venundari poterunt 15 vlnæ consimilis panni, cum $\frac{4}{5}$? Ad hoc faciundum oportet resoluantur primo illi tres numeri in simplices fractiones, & inuenies pro primo numero $\frac{20}{3}$. pro secundo $\frac{27}{4}$. pro tertio $\frac{79}{5}$. deinde multiplica secundam harum trium fractionum per tertiam, scilicet numeratores in se: & denominatores in se: & prouenient $\frac{2133}{20}$, quæ si per primam fractionem diuidantur, consurgent pro numero quotiente $\frac{6399}{400}$ quæ 15 scuta efficiunt, cum $\frac{399}{400}$ vnius scuti, quibus 15 vlnæ cum $\frac{4}{5}$ venundabuntur.

10 ¶ Si cuilibet trium numerorū simplex fractio & fractionis fractio adesse contingat: quilibet ad simplicem reducatur fractionem. Deinde operaberis, vt dictum est in præcedenti conditione.

¶ Exempli gratia, si 3 vlnæ panni cum $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}$. venundentur 5 scutis cum $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$. scuti: quanti poterunt venundari 15 vlnæ consimilis panni cum $\frac{4}{5}$ & $\frac{6}{9}$ $\frac{1}{5}$? Debet quilibet illorum trium numerorum, postquam ex numero integrorum, & simplici fractione, & fractionis fractione componitur, ad simplicem fractionem reduci, secundum quod declaratum est in præcedenti tractatu diffinito secundo: & habebis pro primo $\frac{274}{72}$. pro secundo $\frac{280}{48}$. & pro tertio $\frac{753}{45}$: deinde operaberis omnino taliter, ac in præcedenti conditione operatum est: & facillime poteris quartum numerum inuenire. videlicet 25 scutorum, 22 duodenorum, & 8 turonorum cum $\frac{116}{137}$ vnius turoni.

11 ¶ Si duo primi numeri conuerso modo ponantur, ita vt numerus qui primo loco poni deberet, secundo ponitur: & econtra, qui secundo deberet poni loco, in primo reperitur: debent hoc pacto ordinari, vt primus & tertius correspondeant. Deinde per regulam positam poteris operari.

¶ Verbi gratia, si talis tibi proponatur quæstio, scilicet si 5 scutis, 4 vlnæ panni venundantur: quanti 7 vlnæ consimilis panni poterunt venundari? Notum enim est primum numerum non correspondere tertio re, & nomine: eo quòd primus est numerus precij, & tertius rei venundandæ. Antequam igitur secundum regulam opereris, hoc modo quæstionem illam formabis. si 4 vlnæ panni, 5 venundantur scutis: quanti 7 vlnæ consimilis panni poterunt venundari? Nolo tamen negare sæpenumero quæstiones debite formari, vbi tamen primus numerus est precij. & secundus emptionis, siue rei emptæ numerus appellatur. Exempli gratia, Si 8 scutis emantur 5 vlnæ panni, quæritur, quot scutis poterunt emi vlnę 7? & quamuis dictum sit in principio primum numerum esse emptionis, & secundum precij: id intelligas sic, quòd antequam fiat operatio per regulam, oportet quòd numerus primus sit emptionis, & secundus precij, tertius autem quæstionis.

12 ¶ Si loco primi numeri tertium numerum (qui dicitur quæstionis) ponas: & econtra, loco tertij primum ponas numerum: & loco secūdi, quartus numerus productus (quem quotientem appellamus) locetur, & secundum regulam opereris: habebis pro quarto numero secundum numerum datorum.

¶Exemplum,4 vlnæ,6 emuntur scutis:quanti poterunt emi 10 vlnæ eiusdem panni? Si vis per regulam operari,reperies pro quotiente,siue pro quarto numero 15.fac igitur vt numeri modo dicto trāsmutentur,& talē formabis quæstionē,si 10 vlnæ panni,15 emuntur scutis: quæritur quanti 4 vlnæ consimilis panni poterunt emi?reperies enim secundum regulam operando,pro numero quotiente,6:qui prius secundus numerus erat. Et si hæc conditio in tuis operationibus obseruetur, poteris secure dicere operationes bene valere. Ideo pro tuarum operationum probatione hanc duodecimam cōditionem tenebis. ¶Hæc sunt 12 conditiones,regulæ de tri pertinentes, quas si recte noueris,ad omnem fere quæstionem facili animaduersione poteris respondere. Vt tamen vberiorem in hac materia habeas notitiam, infra positas quæstiones consyderabis, quibus longe promptior in hac parte euadere possis. & quamuis plures assignari possent quæstiones, hæc tamen pro huius artis intellectione sufficiunt.

QVAESTIONES.

1 ANIMOSVM MILITEM,dux quidam pro seruitio vnius anni accepit,cui promisit se daturum,si per totum annum deseruiret, 100 scuta : vnum equum, & arma vni militi competentia : completis autem tribus mensibus, non amplius dux ille milite eguit. sed pro laboribus trium mensium vnum equum,& arma ei contulit : & dixit,accipe hunc equum,& hæc arma pro laboribus, & vade, & hic à duce abeundi facultatem accepit. Quæritur nunc, quanti equus, & arma valebunt? Respondetur. Videbis quot remanent menses pro vnius anni complemento,& inuenies quòd 9. in quibus miles si seruiuisset, 100 scuta haberet: dispones igitur illa secundū regulam de tri,dicendo,si 9 menses dant 100 scuta, quot dabunt tres menses? & si operaberis per regulam,reperies equum,& arma simul 33 scutis,11 duodenis,cum 8 turonis valere.

2 MERCATORES TRES, emerunt 20 equos, 200 scutis. primus tamen dedit 80 scuta,secundus 70.tertius 50:& superlucrati sunt 60. Quæritur,quantum lucri quilibet pro sua parte secundum proportionem pecuniæ positæ habebit?Respōdetur. Tenebis pro communi diuisore, summam scutorum positorum, videlicet 200: deinde per lucrum,pecuniam positam à primo multiplicabis:& productum per diuisorem diuide, & numerus quotiens ostendet lucrum eiusdem . Idem facies de secundo, pariter & tertio. Primus igitur pro sua parte reperiet 24 scuta : secundus, 21. tertius vero,15.

3 ADOLESCENTES TRES,in foro hora septima, eadémque matutina, reperiuntur oua vendentes:quorum primus,8 duntaxat habet:secūdus,17. tertius,26. est tamen ab eorum magistris illis iniunctum, vt non maiori precio vnus vendat sua oua quàm alius, & cum hoc tantam pecuniarum summam vnus apportet ac alius, nec magis nec minus. Respondetur. Potest eo modo euenire, vt videlicet hora septima veniant mercatores empturi oua,qui pro turono quinque habebunt,sic quòd primus iuuenis,qui 8 oua habebat, 5 illorum dedit pro turono,& illi remanserūt 3: & secundus,qui 17 habebat,habuit ex 15 illorum, 3 turonos,& 2 retinuit oua: tertius autem,qui 26 tenebat,vendidit 5 turonis 25 illorū,& vnum remansit illi ouum:postmodum hora vndecima,alij venerunt mercatores vt emerent oua,qui cum pauca reperissent,pro quolibet ouorum,2 exhibebant turonos:& sic primus iuuenis vendidit sua 3 oua quæ retinuerat,6 turonis:& secūdus sua duo oua 4 turonis. tertius ouum quod remansit,duobus vendidit turonis: & ita patet qualiter eodem precio sua oua vendiderunt : & quilibet apportabit suo magistro septem turonos ex venditione suorum ouorum.

4 TRES socij vineam fodientes, thesaurum repererunt: sic q̀ primus tertiam partē in amphora ferrea inuenit:secundus quintam partem in amphora lapidea reperit:tertius autē in terrea amphora residuū thesauri,quod est 1000 scuta,inuenit. Quæritur, quot erunt scuta in amphora terrea,& quot in lapidea,quot pariter in toto reperiētur thesauro?Respondetur. Multiplicabis duos primos denominatores in se, videlicet 3 in 5,& creabitur 15.à quo vtrūq; subtrahe denominatorem:& residuū scilicet 7,tuus erit diuisor: multiplicator autem erit numerus scutorū repertorū à tertio in amphora ter-

rea, videlicet 1000. Postea per multiplicatorē 5, qui quinta 15 pars est, multiplicabis: & proueniet 5000. quē per diuisorē diuide, scilicet per 7. & quotiēs numerus erit 714 scuta, cum 10 duodenis: quæ tertia pars thesauri reperti in amphora ferrea dicuntur. Postremo per multiplicatorem 3, qui est tertia 15 pars, ducātur: & habebis 3000. qui per diuisorem diuidantur: & numerus quotiēs erit 428 scuta, cum 20 duodenis: quæ quintam efficiunt thesauri partem in amphora lapidea à secundo socio repertam. Si igitur hos tres addideris quotientes: inuenies totum thesaurum fuisse 2142 scuta, cū 30 duodenis.

714	scut.	10	duode.
428		20	
1000			
2142		30	

5 EX NOSTRA castella quædam nauis discessit Cimbriam versus: mare autem quod est nauigationis medium, continet 992 milliaria: quorum quolibet die, 50 pertransit: & quauis nocte (tempestate occurrente) per 19 milliaria retrocedit. Quæritur per quantum tempus manebit antequam in Cimbria erit? Respondetur. Nox venit à die subtrahenda, hoc est milliaria nocturna à diurnis milliaribus subtrahantur: & numerus remanēs, qui est 31, erit operationis diuisor, & diuidendus numerus, erit 992 quem per diuisorem diuide, & pro quotiente reperies 32 dies, per quos manebit nauis antequam Cimbricis oris appulerit.

6 VNVS mercator dedit seruitori suo 994 scuta, quibus emeret equos eiusdē precij, boues etiam eiusdem valoris, & arietes similiter: ei'q; præcepit q̄ non habeat plures equos, quàm boues, vel arietes. Quæritur quot habebit equos? Respōde. Debes primo cognoscere quanti venūdetur equus, & quanti bos, & quanti aries: deinde precia illorum simul addantur, & proueniens numerus, operis diuisor erit: per quem si 994 scuta diuidas, propositum reperies. Verbi gratia. Venundetur equus 10 scutis, & bos 3: & aries, 1. quæ si simul addantur, component 14, qui erit diuisor, per quem, 994 diuide: & quotiēs erit 71. & remanebit nihil. habebit igitur 71 equos, totidem boues, etiam arietes.

7 EX COMPOSITO quidam fur regium intrauit sacellum ducatis plenū, inuenit'q; eos sub tecto: cūmq; egredi conaretur, ab vno regis ostiario deprehenditur, cui mediam ducatorum partem obtulit, vt ab eius manibus liber efficeretur, ostiarius vero quadam pietate motus, ex pecunia recepta, 80 ei reddidit ducatos, eúmq; abire permisit: deinde paulopost à secundo regis ostiario arripitur, cui etiam eorum qui remanserant ducatorum medietatem præsentauit, quam cum ostiarius recepisset, liberalius egit cum eo, & ex accepta summa, 50 ducatos eidem furi reliquit: postremo autem à tertio regis ostiario deprehenditur, cui etiam ex relictis in sacculo ducatis medietatem contulit, ex qua ostiarius quatuor & 20 reddidit ducatos: itaq; extra regiam fur reperitur habens in sacculo ducentorum ducatorum summam. Quæritur iam, quanta fuerat ducatorum in sacculo summa reperta? Responde. A 200 ducatis manētibus furi in fine, veniunt subtrahendi quatuor & viginti, quos tertius ostiarius reddidit, & residui erunt 176, quos duplabis, & prouenient 352, à quibus 50 ducati subtrahantur, quos secundus ostiarius reddidit, & manebunt 302. quos duplabis, & consurget 604: à quibus subtrahe 80 ducatos, quos primus ostiarius reddidit, & residuum erit 524. quod duplabis, & prouenient 1048 ducati, quos in sacculo fur ille repererat.

8 SVNT IN exercitu 5000 equites, & pedites 10000: inter quos 1000 scutorum summa eo modo habet distribui, sic quòd vbi pedes 3 recipiat scuta, miles 7 habebit. Quæritur quantā scutorum summā equites recipiēt, & quantam pedites? Responde. Numerus equitū per numerū scutorū (quē quilibet respectu peditū recipere debet) multiplicetur, scilicet per 7, & proueniet 35000: deinde peditū numerus per suū numerum, videlicet per 3 multiplicetur, & creabitur numerus 30000. hos igitur numeros simul adde, & habebis 65000 pro diuisore: postmodum priorem numerum productū, scilicet 35000, per numerum distribuendæ pecuniæ, scilicet per 1000 multiplicabis, & proueniet 35000000, quem per diuisorem diuide, videlicet per 65000. & numerus quotiens 538 scuta, 16 solidi, 1 turo. cum $\frac{12}{13}$ vnius turoni erit summa pecuniarū quam equites habebunt: simili modo operandum est pro summa peditum reperienda, quæ est 461 scuta, 18 solidi cum turono & $\frac{1}{13}$.

TRES inueniuntur fluuij, quorum primus sufficit campum tria milliaria in longitudine habentem, & totidem in latitudine in 1 die rigare: secundus in 2, & tertius in 3. Quæritur in quanto tempore omnes tres simul eundem campum rigare poterunt? Responsio. Reperiẽdus est in primis numerus diuidendus, & diuisor hoc modo: si primus 1 die illum campum semel sufficit rigare, ergo in 6 diebus, sexies rigare potest: & si secundus in duobus diebus semel eundem campum sufficiebat rigare, sequitur q̃ in sex diebus ter ipsum rigare poterit. eodem modo dicas si tertius fluuius in tribus diebus semel illum campum rigare sufficiebat, ergo in sex diebus bis eum rigare poterit. 6 igitur pro numero diuidendo tenebis, & simul hos tres numeros addas, scilicet 6, 3, 2, & producentur 11, qui diuisor appellabitur. Iam operari poteris secundum regulã de tri: sic mouendo quęstionem. Si vndecies in 6 diebus isti tres fluuij possint rigare campum tria milliaria continentem: quæritur in quanto tempore ijdem tres fluuij semel tantum eundem campum sufficient rigare? Multiplicabis igitur secundum numerum, videlicet 6 per tertium: & proueniet 6, quem per primum numerum diuide, scilicet per 11: sed quoniam numerus diuidendus est diuisore minor, opus est secundum quartam cõditionem in tot resoluatur partes, vt per diuisorem possit diuidi: resoluatur ergo in horas 144, quas per diuisorem diuide: & numerus quotiẽs erit 13 horæ, cum $\frac{1}{11}$ vnius horæ, quæ tempus componunt in quo omnes fluuij simul illum campũ semel rigare sufficiunt. 9

REX quidam in quadrata vrbe, 4 iubet erigi muros, quorum quilibet 1000 vlnas in longitudine continebit, & in altitudine 50, in spissitudine seu profunditate 5. & fient ex lapidibus, quorum quilibet in longitudine $\frac{1}{2}$ vlnæ continebit, in latitudine $\frac{1}{3}$ vnius vlnæ, & in profunditate $\frac{1}{4}$ vlnæ habebit: & quilibet illorum lapidum dispositus, & muro affixus, emetur vno scuto. Quæritur quot tales requirantur lapides pro illis 4 muris faciundis, & quanta pecuniarum exponetur summa? Respondetur. Multiplicabis longitudinem illorum 4 murorum scilicet 1000 vlnas per latitudinem, hoc est per 50, & prouenient 200000 vlnæ, quas per vlnas profunditatis multiplicabis, videlicet per 5, & consurgent 1000000 vlnæ pro quadrato murorũ: consimiliter lapidum dimensiones multiplicabis, modo declarato quinto diffinito quarti tractat9, & inuenies $\frac{1}{24}$ vnius vlnæ pro quadrato lapidum: postmodum quadratum murorum per lapidum quadratum diuidatur, eo modo: posito quadrato lapidum in dextra manu pro diuisore, & murorum quadrato in sinistra pro numero diuidendo, multiplicetur diuisoris denominator per diuidendi numeratorem, & productum, numerator operis dicetur: deinde diuisoris numeratorem in denominatorem diuidendi ducas, & producetur operationis denominator: hoc igitur peracto, reperies 24000000 tales lapides, pro compositione illorum 4 murorum requiri. Ex quo facile constat de veritate secundæ partis quæstionis. 10

VXOREM grauidam quidam habens agonizans, cuius bona, 2000 scutis valebant, tale condidit testamẽtum. Si vxor mea filium pariat, ille meorum bonorum tria quinta habeat, & vxor vnum, & ecclesia residuum, scilicet vnum quintum. Si vero filiam pariat, ipsa duo habebit, & vxor duo, & ecclesia reliquum. Vxor autem, aduenitante tempore partus, vtrunq; peperit, videlicet & filium, & filiam. Quæritur qualiter distribuentur bona? Respondetur. Omnes numeri in testamento formaliter positi scribantur, scilicet 3 pro filio, 2 pro filia, 2 pro matre, & 1 pro ecclesia, quę simul addantur, & proueniet 8, quem pro diuisore tenebis: relicta vero scuta, videlicet 2000, multiplicator appellabuntur, per quem cuiuslibet partem siue numerum multiplicabis, & productum per 8 diuides, & quotiẽs, propositum ostendet. Et reperies quòd filius habebit 750 scuta: filia, 500. vxor, 500. & ecclesia, 250. Poteris consimili processu operari, vbi vxor peperisset duos filios, vel duas filias, aut duos filios, & vnam filiam. 11

☞ Vxor videtur tria quinta debere accipere, quot & filius de quo vnũ habet, reliqua duo de filia dãtur eidẽ matri. vnde 9, nõ 8, pro diuisore capiendus esset.

MERCATORES tres simul composuerunt pro mercibus faciundis: quorum primus posuit 80 scuta 6 mensibus, secundus 70 scuta 5 mensibus, & tertius posuit 60 scuta 4 mensibus, & de lucro habuerunt 100 scuta. Quæritur, quantum quilibet habebit secundum portionem temporis, & pecunię? Responsio. Multiplicabis cuiuslibet 12

ſummam pecuniarum per numerum menſium eiuſdem, & tres inde prouenientes numeros in vnam colliges ſummam, quam pro communi diuiſore tenebis: deinde ſummam quæ proueniebat ex multiplicatione pecuniarum primi per numerum menſium eiuſdem, multiplicetur per lucrum, & productum diuide per communem diuiſorem, & numerus quotiens oſtendet ſummam pecuniarum quam primus habebit. Idem faciendum eſt de alijs.

13 SANCTVM Iacobum duo preregrini petiuerunt, quorum prior per ſola decem milliaria poteſt itinerare, ſecundus vero per 13. prior tamen ſecundum per 9 dies præceſſit, in quibus 90 milliaria pertranſiuit. Quæritur, in quot diebus poterit ſecundus priorem attingere? Reſponſio. Debes in primis pro numero diuidendo capere milliaria pertranſita à priori antequam ſecundus itinerare inceperit, quæ ſunt 90: deinde id pro diuiſore accipies per quod in die ſecundus priorem excedit, videlicet 3, per quem ſi diuidas 90, numerus quotiens, qui erit 30, propoſitam quæſtionem ſoluet.

14 IN QVODAM curru, cuius quælibet rota eſt trepidalis, hoc eſt cuiuſuis rotæ diameter eſt tripedalis, vehũtur merces à ſancto Dionyſio in vrbem Pariſienſem. Quæritur quoties circumuoluentur rotæ antequam intrent Pariſium? Reſponſio. Eſt in primis ſupponendum ex geometria, peripheriam circuli ad eius diametrum in proportione tripla ſeſquiſeptima ſe habere, qua 22 ad 7 ſe habent: ſecũdo videndum eſt quot ſunt pedes à ſancto Dionyſio ad vrbem vſque Pariſienſem, & inuenies 20000: eo quòd ambæ vrbes à ſeinuicẽ per 4 milliaria diſtant: deinde videbis quot correſpondent pedalitates circũferentiæ rotæ cuius diameter eſt tripedalis: & inuenies quòd 9 cum $\frac{3}{7}$ vnius pedalis: tot igitur pertranſibunt rotæ illius currus in vna circuitione: diuidatur igitur numerus pedum, ſcilicet 20000 per 9 $\frac{3}{7}$: & numerus quotiens propoſitum repræſentabit.

15 LIBRARII tres, emerunt 1250 Arithmetices libros, precio 375 francorum: primus autem pro ſua parte vult quingentos habere, ſecundus quadringẽtos & quinquaginta, tertius reſiduum, ſcilicet trecentos. Quæritur, quantum ſoluet primus, & quantum ſecundus, pariter & tertius? Solutio. Accipies numerum francorum pro multiplicatore: deinde tres partes illorum in vnam ſummam colliges, & erit 1250, quæ pro diuiſore teneatur: poſtmodum cuiuſlibet librarij partem per multiplicatorem multiplica, & productum per diuiſorem diuide, & quotiens propoſitum declarabit. Soluet igitur pro ſua parte primus 150 francos: & ſecundus, 135: & tertius, 90.

16 INTER tres ſocios, 1000 franci ſunt diuidendi, primus autem ſociorum in duplo magis quàm ſecundus habebit, & ſecundus in triplo magis quàm tertius. Quæritur iam, quãtum quilibet pro ſua parte habebit? Solutio, debes certum numerum pro tertio accipere: verbi gratia 2. & quoniam ſecundus recipere debet in triplo magis quàm tertius, capies pro ſecundo 6: qui ad 2, in tripla ſe habet proportione: & poſtquam primus in duplo magis quàm ſecundus recipiet, ſumes numerum 12 pro primo, qui ad 6, in dupla ſe habet proportione: hos igitur tres numeros (qui multiplicatores appellantur) in vnum collige, & erit 20, qui diuiſor dicetur: iam multiplica numerum diuidendum, ſcilicet 1000 francorum per quemlibet illorum trium numerorum, & numerum prouenientem diuide per diuiſorem, & quotiens propoſitum oſtendet: quo peracto, primus pro parte ſua habebit 600, & ſecundus 300, & tertius 100.

17 CIVIS quidam in extremis laborans, reliquit 6000 ſcuta eo modo diſtribuẽda. Volo (inquit) illorum medietas detur monaſterio Iacobitarum, tertia vero pars illorum conuentui diui Auguſtini: quarta pars cœnobio fratrum minorum: quinta pars ordini Carmelitarum. Quæritur nunc, quantum quilibet prædictorum ordinum de 6000 ſcutis habebit? Reſponde. Sunt in primis pro illis 4 ordinibus accipiẽdæ partes diſtinctæ: ſic videlicet vt pro Iacobitis medietatem 6000 ſcutorum, videlicet 3000: deinde pro Auguſtinenſibus tertiam 6000 ſcutorum, videlicet 2000: poſtmodum quartam partem pro cordigeris, ſcilicet 1500: vltimo quintã partem pro Carmelitis, videlicet 1200. has igitur diſtinctas 4 partes in vnam collige ſummam, quæ erit 7700, & diuiſor appellabitur: multiplicator autem dicetur pecunia diſtribuenda, videlicet 6000 ſcuta: multiplica igitur quamlibet diſtinctam partem per multiplicatorem, & productum per diui-

sorem diuide:& numerus quotiēs propositum repræsentabit. Vnde si primā distinctam Iacobitarum partem, quæ est 3000, per multiplicatorem multiplices, productum erit 18000000:& si per diuisorem hunc productum diuidas, pro quotienti numero habebis 2337 scuta, cum 23 duodenis, 2 turonis, & $\frac{1400}{7700}$ vnius turoni: hæc erit igitur pars 6000 scutorum, quam monasterium Iacobitarum habebit. Si autem eodem modo multipli cando, & diuidendo procedas in cæteris, facillime reperies cuiusuis religionis partem.

EST GRANDIS ouium caterua à tribus pastoribus possessa, quorum nullus scit numerum omnium earum, nec etiam suarum ouium propriarum. Primus tamen scit bene ꝙ alij duo habent 2950. & secundus scit alios à se habere 3500. tertius scit duos priores habere 3550. Quæritur quot omnes simul habeant, pariter & singuli? Solutio. Tres illæ summæ ab illis scitæ, in vnam summā colligantur, & ea erit 10000. quam per 2 diuide, & proueniēt pro quotiente 5000:& hæc est summa omnium ouium. Et si sci re cupis quot oues primus possideat, subtrahe ab illo quotiēte summam quam primus sciebat cæteros possidere, videlicet 2950: & residuum est summa ouium quas primus possidet, & si hoc pacto in cæteris operari libet, quæstio soluta erit. Summa igitur omnium ouium erit 5000. & primus possidebit 2050. & secundus 1500. & tertius 1450. 18

VNVS paterfamiliâs aliquot operarios conduxit pro vnius diei labore, ipsi vero operarij parum citius quàm tempus expetebat, à labore cessarunt, & cōtentio mota est inter patremfamiliâs & operarios: nam operarij singuli septem duodenos quærunt, pater vero familiâs quàmlibentissime daret, sed deficiunt ei 23 duodeni, vult tamen cuilibet conferre 4, & supersunt ei 7. Quæritur quot habeat operarios, pariter & duodenorum summam? Solutio. subtrahe à 7, numerum 4, & residuum scilicet 3, diuisor dicetur: deinde adde 7 & 23, & producetur numerus 30, quem per 3 diuisorem diuide, & quotiens erit 10, qui est numerus operariorum: postmodum multiplica 10 per 4, & surgent 40, quibus adde 7, & profluent 47 duodeni, componentes summam omnium duodenorum à patrefamiliâs possessorum. 19

MERCATORES tres eo modo conuenerunt. Primus per 8 menses posuit 100 scuta: secundus per 5 menses aliquam ignotam pecuniarum summam: tertius per 4 menses, etiam incertam pecuniarum summam:& lucrati sunt 160 scuta, quæ ad æquales partes diuidunt. Quæritur quantam pecuniarum summā posuit secundus, & quantam tertius? Respondetur. Positum à primo, videlicet 100 scuta, per numerum mensium eiusdem, hoc est per 8, multiplicabis, & prouenientem numerum diuide per numerum mensium secūdi, videlicet 5, & numerus quotiens, summam pecuniarū quam posuit secūdus declarabit: si autē numerū illum proueniētem (scilicet 800) per numerū mensiū tertij, videlicet per 4, diuidas: summam pecuniarū, quam tertius posuit, numerus quotiēs ostēdet. Ex quo patet secundū posuisse 160 scuta:& tertiū imposuisse 200. 20

¶ Regula diuinatoria, eademq; ioculatoria atque faceta.

SI VIS vaticinari quot scuta sunt in marsupio tui socij, hac arte procedendū est. Petas ab ipso vtrum sciat numerū eorū: ꝙ si non sciuerit, respiciat:& numerū seruet in mēte, nihil tibi dicēdo: tu tamen dicas illi, medietatē illius numeri supra eundē numerū ponat, & productū seruet in mente: deinde ex illo quæras vtrum ex tali additione cōsurgat fractio, vel non: si primū accidat, illam fractionē per additionē medietatis impleat: deinde toti illi numero medietatē addat: si autē secundū eueniat, producto numero medietatem eiusdē addat. & iterū quæras vtrū ex illa secunda additione cōsurgat fractio, vel non: si primū, reddatur integra per additionē medietatis: postea iubeas ex producto numero extrahi 9 quotiescūq; extrahi permittit, & tu ipse animaduertes quoties 9 separat, & in mente pro quolibet 9 abstracto retineas 4, & pro prima fractione (si fuerit) 1, & pro secūda, 2:& tandem in mēte tua repositus erit numerus scutorū repositorū in marsupio tui socij. ¶ Hæc regula tribus declaratur exēplis. primū exemplū. Sit rei veritas ꝙ socius tuus 8 habeat scuta, quæ ipse scit se habere, te tamē lateat: fac vt illis medietatem addat, & proueniēt 12, in quibus non reperitur fractio: fac igitur vt illi prædicto numero, videlicet 12, medietatē addat, & proueniet 18. à quo solū bis extrahi potest 9. &

Primum exēplum

cum dictū ſit 4 eſſe in mēte tenendū pro quolibet 9, dices illi ſcuta ſui marſupij eſſe 8, quod eſt verum. Secundum exemplum. Sit veritas q in marſupio amici, 5 inueniantur ſcuta, fac vt illorum medietatem ſumat, quam illis addat, & proueniet 7 cum dimidio, in quibus eſt fractio: fac igitur vt integra reddatur per additionem medietatis ſcuti, & ſic erunt 8 ſcuta, quæ adhuc tu neſcis eſſe: deinde iubeas toti illi ſummæ eiuſdem medietatem addi, & prouenient 12, in quibus fractio non reperitur. ſeparet igitur 9 quoties poteſt, & quia tantum ſemel à 12 extrahi permittit: ideo 4 pro illa vnius 9 abſtractione in mente tua tenebis, & ex prima fractione, 1 eſt accipienda (vt dictum eſt) quæ ſimul cū 4, efficit 5. ideo dices ſocio, quinq; in eius marſupio ſcuta fuiſſe. Tertiū exemplum. Sit verū q in marſupio amici 7 reperiantur ſcuta, te tamen lateat: fac vt illorum medietatem illis ſuperaddat, & conſurgent 10 ſcuta cum dimidio: nunc petes an fractio reperiatur: & ſi ipſe dicat tibi verū, dicet ita eſſe: iubeas ergo integram fieri per medietatis ſcuti additionē, & ſic prouenient 11 ſcuta, quæ adhuc tu neſcis eſſe: tenebis tamen in mente ratione illius primæ fractionis, 1. deinde iubeas medietatem producti numeri ſuperponi, & habebis 16 ſcuta cum dimidio: quæres iterum an fractio ex tali additione conſurgat, & ſi verum fateatur, dicet q ſic: ideo iubeas integram fieri per additionem medietatis, & conſurget numerus ſcutorum 17, tu tamen ratione huius ſecundæ fractionis, 2 ſeruabis in mente, qui cum prius habita vnitate efficit 3. Poſtmodum precipias extrahat 9 quoties poteſt. & quia ſolum ſemel extrahi permittit: ideo gratia illius 9, ſeruabis 4 in mente: qui ſimul cum 3 prius habito, 7 componunt numerum. Hoc igitur completo, illi amico ſignificabis 7 in ſuo marſupio ſcuta fuiſſe. Poteris hac via omnia conſimilia vaticinari: ideo placet hanc regulam diuinatoriam appellare.

Secūdum exemplū — *Tertium exemplū*

☞ Si numerus minor fuerit quatuor, vt 3, 2, & 1: tunc non ex abiectione 9, quæ fieri non poteſt: ſed ex prima & ſecunda fractionibus cognoſcitur. Et quandocunque, facta diuiſione per 9, aliquod reſiduum manet, non curandum eſt: nihil enim facit ad rem.

OPERIS PERORATIO.

SIT LAVS omnipotenti deo, eiúſque intemeratæ genitrici, & toti curiæ cæleſti. Et felicitas, atque beatitudo ſit tribus præceptoribus meis, Ludouico Romano, Roberto Caubraith, & Ioanni Dullart mihi ſemper venerando præceptori, cuius anima cæleſti munere fruatur. Nempe Ludouicus in grammatica, Robertus in dialectica, & Ioannes in philoſophia me vnum de eorum diſcipulis habuerunt. Iſti enim ſunt quibus eam pro eruditione eorúmq; laboribus mercedem confero, quam Thales ille Mileſius à Mandraico Prienenſi eius diſcipulo petiuit: vt videlicet prædicaret quæ ſub Thalete didicerat, Thaletis fuiſſe, ipſum'que Thaletem repertorem talium ſtetiſſe. Prædico igitur eius quod eſt in me grammaticæ, Ludouicum inuentorem fuiſſe: eius vero quod in dialectica, Robertum: & eius quod in philoſophia, Ioannem. Nunc vero benigniſſimi lectores, ſi quid minus bene dictum in hac arte ſit reperire, ſoli mihi parcite precor. Nam pręceptorem neminem in hac ipſa audiui. Valete mitiſſimi lectores: vobis'que valentibus, Siliceana valeat ars.

EX OFFICINA SIMONIS COLINAEI SVB SOLE AVREO, vici ſancti Ioannis Bellouacenſis, menſe Septembri. M. D. XXVI.

ERRATA.

Fol.	pag.	lin.	
2	1	6	lege, vt in reformando, haud ſcio, an minore negocio &c.
7	1	1	naturali
18	2	9	ſcilicet 15
18	2	12	conſurget 74
18	2	46	ſua baſi
28	1	25	in principio lineæ poſt 8, pro 4 lege 5
56	2		in marginalibus additionibus, pro additio, lege multiplicatio.
61	2	30	vlnæ

ARITHMETICES AD SVI STVDIOSOS Paranesis.

Huc ades:huc celeri confer tua pectora gressu,
Qui cupis ingenuæ Palladis arma sequi:
Siue paras varios cœlorum ediscere motus:
Solis & errores, noctiuagæq; deæ.
Quæq; errant,quantum consumant temporis astra,
Vt redeant,ad quem deseruere,locum.
Ac vbi tardantur radijs solaribus acta:
In gemina quanta sint statione mora.
Pondera,seu vasti(quæ dat Geometria)cœli,
Mensuras terræ, cæruleiq; freti.
Præstabo faciles aditus:paruóq; labore
Edisces,quod vix dat secus vlla dies.
Me duce cognosces loca cuncta,sitúsque locorum
Mundi, q̃ lata est,longáve quæq; plaga.
Aptior ad sanctæ fueris rimanda poœsis
Abdita:doctrinæ quæ genus omne tenent.
Seu mercatorem eoos percurrere ad Indos
Te iuuat,aut vastum puppe secare fretum,
Me duce tutus eris.nunquam faciet tibi fucum,
Aut fraudem quisquam,sit licet ille dolus.
Ipse pater rerum fecit numero omnia certo:
Si fas sit docto credere Pythagoræ.
Huc ades:& tantum pacta exige munera.certe
Pollicitis nunquam deteriora feres.
Ignauis neglecta viris,quæ squallida putri
Marcebam carie,& contaminata situ:
Tersior ac antehac in lætam prodeo lucem
Erepta à mendis barbaricaq; manu.
Cuius ope exquiris? Thomæ,quem patria Rhætum
Nominat,Helueticis fœdere iuncta viris.
Hic mihi restituit formam,priscumq; decorem:
Hoc ego nobilior vindice semper ero.
Nec tulit auxilium ingratæ. Nanq; artibus illum
Instructum æthereis,aurea ad astra tuli.
Metiri inde dedi oceanum,terrámq;,polumq;,
Astráq;:sed dominæ fulta sororis ope.
Hunc ego naturæ edocui secreta parentis.
Quæq; gerit pleno Philosophia sinu.
Authore Iacobo Rogerio Neruio.